Fiktiv Tentamen i TME061, 2021-05

- **Tid:** 08:30-12:30 **Lokal:** Zoomövervakad tentamen.
- **Lärare:** Magnus Ekh, tele 7723479
- **Hjälpmedel**
  - Alla hjälpmedel tillåtna dock inte tillåtet att samarbeta eller att ta hjälp av annan person.
  - Viktigt att ange källhänvisning om ekvationer, lösningar av exempel (inklusive gamla tentatal), datorkod och/eller annan information används.
  - Som kalkylator kan Matlab, Python, ... användas. Om dessa används ladda också upp .m, .py,... filer på Canvassidan för tentamen.
  - Zoomövervakad tentamen.
- Du behöver scanna dina handskrivna lösningar och ladda upp dom på Canvas (ladda upp .pdf eller .doc filer). Skriv namn, personnummer, problemnummer, sidonummer på varje inscannad sida. Se till att ha bra ljusförhållande och en scanningsapp t.ex. CamScanner eller Genius Scan. namnge dina filer ProblemYYsidaXX. Exempel: Problem01sida02.pdf. Om du vill kan bilder kombineras till ett dokument i Word eller PDF som kallas ProblemYY. Om du har använt Matlab, Python, etc som redskap ladda då upp dina filer till Canvas.
- **Lösningar**: Anslås på kurshemsidan (Canvas) dagen efter tentamen.
- **Betygslista**: Medddelas senast 14 juni på Canvas.

- **Poängbedömning**: Maxpoäng på tentan är 25. För att få poäng måste det skrivna vara läsligt och uppställda ekvationer skall klart motiveras. Vidare skall entydiga beteckningar användas och tydliga figurer ritas. Tänk på att kontrollera dimensioner och rimlighet i svaren.

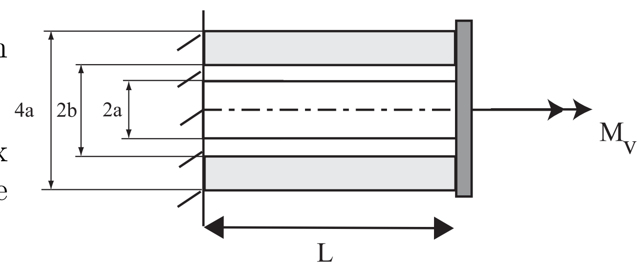
- **Betygsgränser**:
  20-25p: betyg 5
  15-19p: betyg 4
  10-14p, betyg 3
  0-9p, betyg U

Uppgift 1

En axelkonstruktion består av två axlar: en massiv axel inuti ett tjockväggigt rör. De båda axlarna ar båda fast inspända i sina vänstra ändar och fastsatta i en stel skiva i sina högra ändar. Den stela skivan utsätts för ett vridande moment $M_v = 7.6 \cdot 10^3$ [Nm]. Båda axlarna är av samma material med skjuvmodulen $G = 81000$ [MPa]. Övriga data: $L = 100$ [mm], $a = 10$ [mm], $b = 12$ [mm].

(a) Bestäm hur mycket den stela skivan roterar.

(b) Bestäm max vridspänning i de båda axlarna.



Uppgift 2

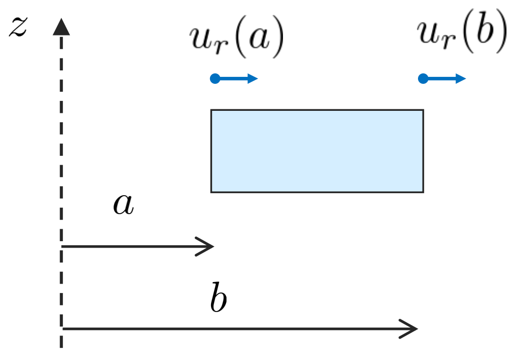
Man har med hjälp av finita elementmetoden bestämt ett spänningstillstånd i en punkt till $\sigma_x = 216$ MPa, $\sigma_y = -67$ MPa, $\tau_{xy} = 51$ MPa, $\sigma_z = 55$ MPa och $\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$.

(a) Bestäm von Mises och Trescas effektivspänning.

(b) Om elasticitetsmodulen $E = 200$ GPa och Poissons tal $\nu = 0.3$ vad blir töjningarna ϵ_x, ϵ_y, γ_{xy}, ϵ_z, γ_{yz} and γ_{zx}.

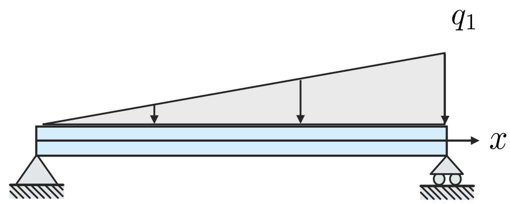
Uppgift 3

En cirkulär hålskiva med innerradie a och ytterradie b är belastad i plan spänning. Dess material kan anses var linjärt isotropt elastiskt med elasticitetsmodul E och Poissons tal ν. Om den radiella förskjutningen är $u_r(a) = u_a$ vid innerradien och $u_r(b) = u_b$ vid ytterradien (enligt figuren) bestäm radiella spänningen $\sigma_r(r)$ och omkretsspänningen $\sigma_\varphi(r)$. Om $a = 10$ mm, $b = 20$ mm, $u_a = a/200$, $u_b = b/400$, $E = 80$ GPa, $\nu = 0.3$ vad blir numeriska värdena på $\sigma_r(a)$ och $\sigma_\varphi(a)$?



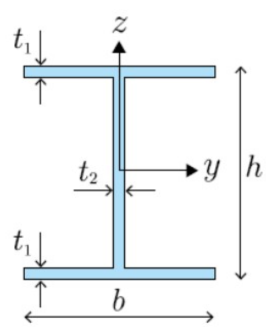
Uppgift 4

En fritt upplagd balk belastas med den utbredda lasten $q(x) = -q_1\,x/L$ enligt figuren. Balken har längd L och elasticitetsmodul E.



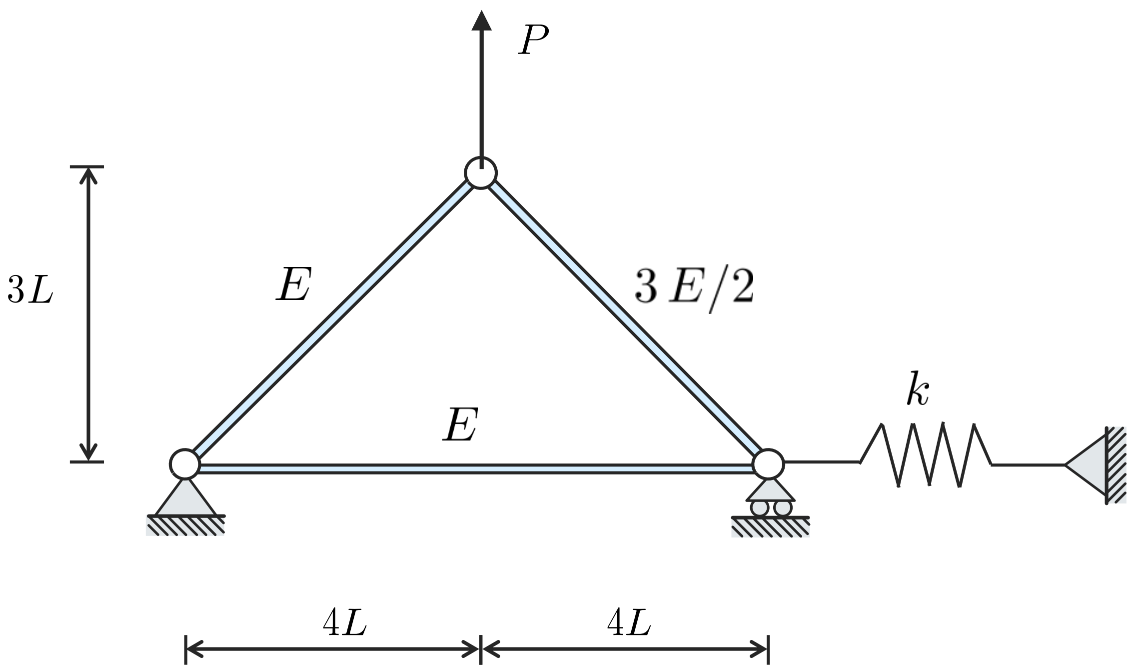
(a) Bestäm det (till belopp) största böjmomentet längs balken.

(b) Bestäm största normalspänningen i balken med följande tunnväggiga tvärsnitt då $L = 1000$ mm, $q_1 = 10$ N/mm, $t_1 = t_2 = 5$ mm, $b = h = 50$ mm.



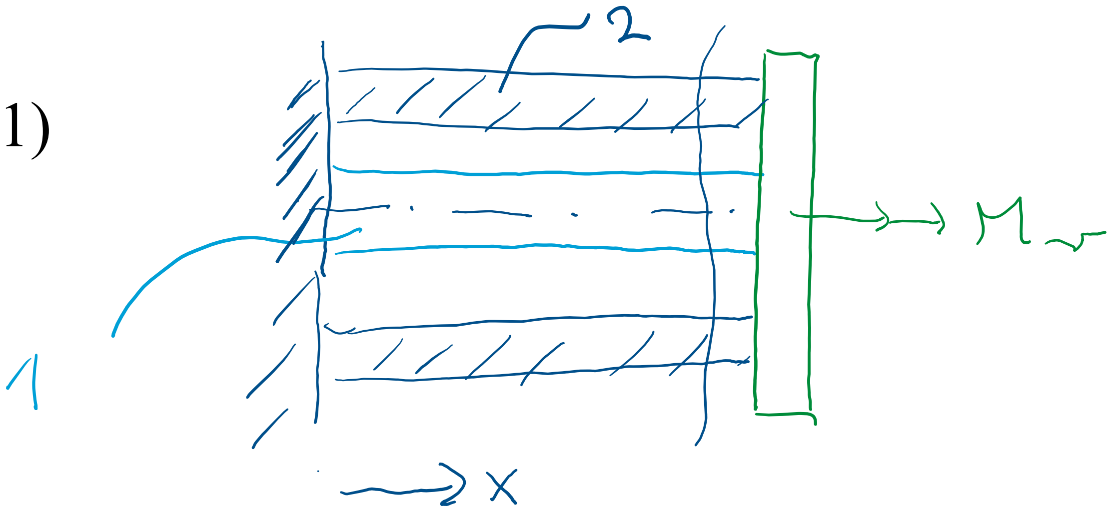
Uppgift 5

Ett stångsystem består av tre stänger och en fjäder enligt figuren nedan. Stängerna har alla tre ett cirkulärt tvärsnitt med diameter d. Två av stängerna



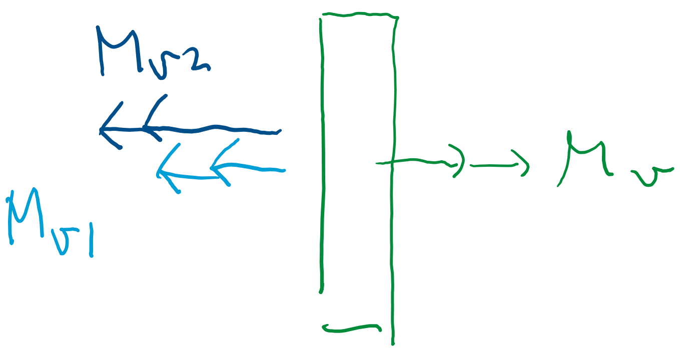
har elasticitetsmodulen E medan den tredje har elasticitetsmodul $3\,E/2$. Bestäm största tillåtna kraft P så att utknäckning undviks med en tvåfaldig säkerhet. Försumma egentyngder. Fjäderstyvheten $k = \pi\, d^2\, E/(40\, L)$

1)



Se exempel 3.4.1 s. 56 i kompendium

Snitta och frilägg



$$\rightarrow: M_v - M_{v1} - M_{v2} = 0 \qquad (1)$$

För axeldelarna gäller enl ekv (3.7) - (3.8):

$$\begin{cases} M_{v1} = \dfrac{G K_{v1}}{L_1 \approx L} \left(\varphi(L) - \underbrace{\varphi(0)}_{=0} \right) = \dfrac{G K_{v1}}{L} \varphi(L) \\ M_{v2} = \dfrac{G K_{v2}}{L_2 \approx L} \left(\varphi(L) - \underbrace{\varphi(0)}_{\approx 0} \right) = \dfrac{G K_{v2}}{L} \varphi(L) \end{cases} \qquad (2)$$

(2) insatt i (1):

$$M_v = M_{v1} + M_{v2} = \frac{G}{L}(K_{v1}+K_{v2})\,\varphi(L) \Rightarrow \varphi(L) = \frac{M_v \cdot L}{G\,(K_{v1}+K_{v2})} \quad (1')$$

Vridstyvhetens tvärsnittsfaktorer:

$$K_{v1} = \left\{ \text{enl s. 53 } "\frac{\pi}{2}(b^4 - a^4)" \right\} = \frac{\pi}{2} a^4$$

$$K_{v2} = \text{——— " ———} = \frac{\pi}{2}\left((2a)^4 - b^4\right) \quad (3)$$

(3) insatt i (1') med numeriska värden:

$\varphi(L) \simeq 0{,}040$ rad svar i a)

```
clear all
format long e

Mv=7.6*10^3*10^3; %Nmm
G=81000; %MPa
L=100; %mm
a=10; %mm
b=12; %mm
%
Kv1=pi/2*a^4; Kv2=pi/2*((2*a)^4-b^4);

phi_L=Mv*L/G/(Kv1+Kv2)
```

b) Max vridskjuvspänning enl ekv (3.10)

$$\begin{cases} \max|\tau_1| = \left\{ \dfrac{|M_v|}{K_v} \cdot b \right\} = \dfrac{|M_{v1}|\, a}{K_{v1}} \\ \\ \max|\tau_2| = \text{---}\ \text{''}\ \text{---} = \dfrac{|M_{v2}|\, 2a}{K_{v2}} \end{cases}$$

där $M_{v1} = \dfrac{G K_{v1}}{L} \varphi(L)$, $M_{v2} = \dfrac{G K_{v2}}{L} \varphi(L)$

enl (2) ovan.

$$\Rightarrow \begin{cases} \max|\tau_1| = \dfrac{G a}{L} \varphi(L) \approx 324 \text{ MPa} \\ \\ \max|\tau_2| = \dfrac{G\, 2a}{L} \varphi(L) \approx 648 \text{ MPa} \end{cases} \quad \text{enl Matlab}$$

```
max_tau_1=G*a/L*phi_L
max_tau_2=G*2*a/L*phi_L
```

2 a) $\sigma_x = 216$, $\sigma_y = -67$, $\tau_{xy} = 51$, $\sigma_z = 55$, $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ [MPa]

Spänningsmatrisen blir då:

$$S = \begin{bmatrix} 216 & 51 & 0 \\ 51 & -67 & 0 \\ 0 & 0 & 55 \end{bmatrix} \quad \text{MPa}$$

a) + b) von Mises spänning enl. formelsamling

von Mises:

$$\sigma_e^{vM} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x\,\sigma_y - \sigma_y\,\sigma_z - \sigma_z\,\sigma_x + 3\tau_{xy}^2 + 3\tau_{yz}^2 + 3\tau_{zx}^2}$$

eller enl Matlabkod 4.7.1

$$\sigma_e^{vM} \approx 261 \text{ MPa}$$

```
clear all
format long e

S=[216 51 0; 51 -67 0; 0 0 55];
seff_vM=vonMises(S)
```

$\Rightarrow \sigma_e^{vM}$

Tresca

alt/ Huvudspänningar:

$\sigma_1 = 55$ (eftersom ingen skjuvspänning $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$)

$$\sigma_{2,3} = \left\{ \underset{s.15}{\text{enl}} \text{ FS} \right\} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Enl. formelsamling Tresca $\sigma_{eT} = \max\left(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|\right)$

eller enl Matlabkod 4.7.2

seff_T=Tresca(S) $\Rightarrow$ $\sigma_{eT} \approx 301$ MPa //

b) Töjningarna fås från Hookes generaliserade lag. ekv (6.3)

$$
\begin{cases}
\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right) \approx 1.1 \cdot 10^{-3} \\
\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right) \approx -7.4 \cdot 10^{-4} \\
\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left(\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right) \approx 5.2 \cdot 10^{-5} \\
\gamma_{xy} = \tau_{xy}/G = \tau_{xy} \cdot 2(1+\nu)/E \approx 6.6 \cdot 10^{-4} \\
\gamma_{yz} = \tau_{yz}/G = 0 \\
\gamma_{xz} = \tau_{xz}/G = 0
\end{cases}
$$

$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ enl FS

//

```
E=200e3; nu=0.3;
sigma_x=216; sigma_y=-67; sigma_z=55; tau_xy=51;
eps_x=1/E*(sigma_x-nu*(sigma_y+sigma_z))
eps_y=1/E*(sigma_y-nu*(sigma_x+sigma_z))
eps_z=1/E*(sigma_z-nu*(sigma_y+sigma_x))
gamma_xy=tau_xy*2*(1+nu)/E
```

3) Använd Matlabkod 8.2.1 med randvillkoren

$u_r(a) = u_a$ och $u_r(b) = u_b$

ger $\boxed{u_r(r) = A_1 \cdot r + A_2 / r}$ med

$$A_1 = \frac{a \cdot u_a - b\, u_b}{a^2 - b^2} \qquad A_2 = \frac{a \cdot b \cdot (a \cdot u_b - b \cdot u_a)}{a^2 - b^2}$$

```
clear all
syms A1 A2 ur(r) a b nu Em ua ub
%lösning d.e.
ur(r)=A1*r+A2/r;
%töjningar
eps_r=diff(ur(r),r); eps_phi=ur(r)/r;
%spänningar
sigma_r(r)=Em/(1-nu^2)*(eps_r+nu*eps_phi)
sigma_phi(r)=Em/(1-nu^2)*(eps_phi+nu*eps_r)
%bestämning av integrationskonstanter
[A1_,A2_]=solve(ur(b)==ub,ur(a)==ua,A1,A2)
disp(['A1= ' char(A1_)])
disp(['A2= ' char(A2_)])
%sätt in lösning
ur_=simplify(subs(ur,[A1,A2],[A1_,A2_]))
sigma_r_=simplify(subs(sigma_r,[A1,A2],[A1_,A2_]))
sigma_phi_=simplify(subs(sigma_phi,[A1,A2],[A1_,A2_]))
```

$\varepsilon_r, \varepsilon_\varphi$

σ_r, σ_φ

$u_r(a) = u_a$

$u_r(b) = u_b$

$$\begin{cases} A_1 \cdot a + \dfrac{A_2}{a} = u_a \\ A_1 \cdot b + \dfrac{A_2}{b} = u_b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_1 = \\ A_2 = \end{cases}$$

Uttrycken för spänningarna ges av Matlabkoden

sigma_r_(r) =

$\sigma_r(r)$

-(Em*(a*r^2*ua - b*r^2*ub + a*b^2*ua - a^2*b*ub - a*b^2*nu*ua + a^2*b*nu*ub + a*nu*r^2*ua - b*nu*r^2*ub))/(r^2*(nu^2 - 1)*(a^2 - b^2))

sigma_phi_(r) =

$\sigma_\varphi(r)$

-(Em*(a*r^2*ua - b*r^2*ub - a*b^2*ua + a^2*b*ub + a*b^2*nu*ua - a^2*b*nu*ub + a*nu*r^2*ua - b*nu*r^2*ub))/(r^2*(nu^2 - 1)*(a^2 - b^2))

Om vi sätter in numeriska värden fås

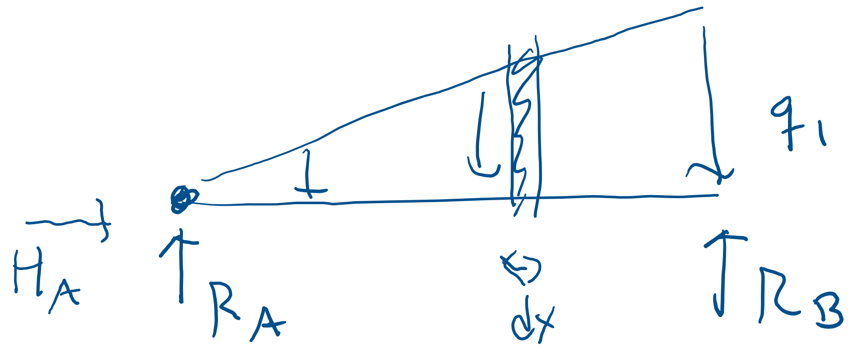
$$\sigma_r(a) = -4000/273 \approx \underline{-14,7 \text{ MPa}}$$

$$\sigma_\varphi(a) = 36000/91 \approx \underline{396 \text{ MPa}} \quad //$$

se Matlabkod nedan.

```
%numeriska värden
a_=10; b_=20; %mm
nu_=0.3;
Em_=80e3; %MPa
ua_=10/200; ub_=20/400;
sigma_r_num=subs(sigma_r_,{a,b,nu,Em,ua,ub,r},{a_,b_,nu_,Em_,ua_,ub_,a_})
sigma_phi_num=subs(sigma_phi_,{a,b,nu,Em,ua,ub,r},{a_,b_,nu_,Em_,ua_,ub_,a_})
```

4) a) Bestäm stödreaktionerna

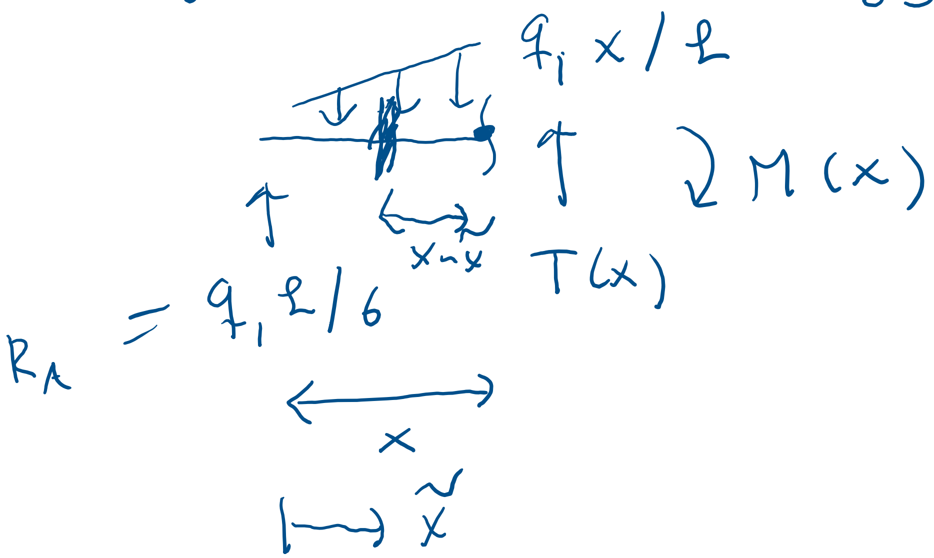


$\rightarrow: \; H_A = 0$

$$\begin{cases} \uparrow: \; R_A + R_B - \underbrace{\int_0^L q_1 \, x/L \, dx}_{q_1/2 \cdot L} = 0 \qquad (*) \\[2em] A\circlearrowright: \; -R_B \cdot L + \underbrace{\int_0^L \overbrace{q_1 \cdot x/L}^{\text{kraft}} \cdot \overbrace{x}^{\text{hävarm}} \, dx}_{q_1 L/2 \cdot 2L/3} = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \; \underline{R_B = q_1 L/3} \; \overset{(*)}{\Rightarrow} \; \underline{R_A} = q_1 L/2 - R_B = \underline{q_1 L/6}$

Snitta och frilägg vid x:



$$\uparrow: \quad q_1 L/6 - \underbrace{\int_0^x q_1 \tilde{x}/L \, d\tilde{x}}_{\frac{q_1 x}{2L} x} + T(x) = 0$$

$$T'(x) = \frac{q_1 x}{L} = -q(x)$$

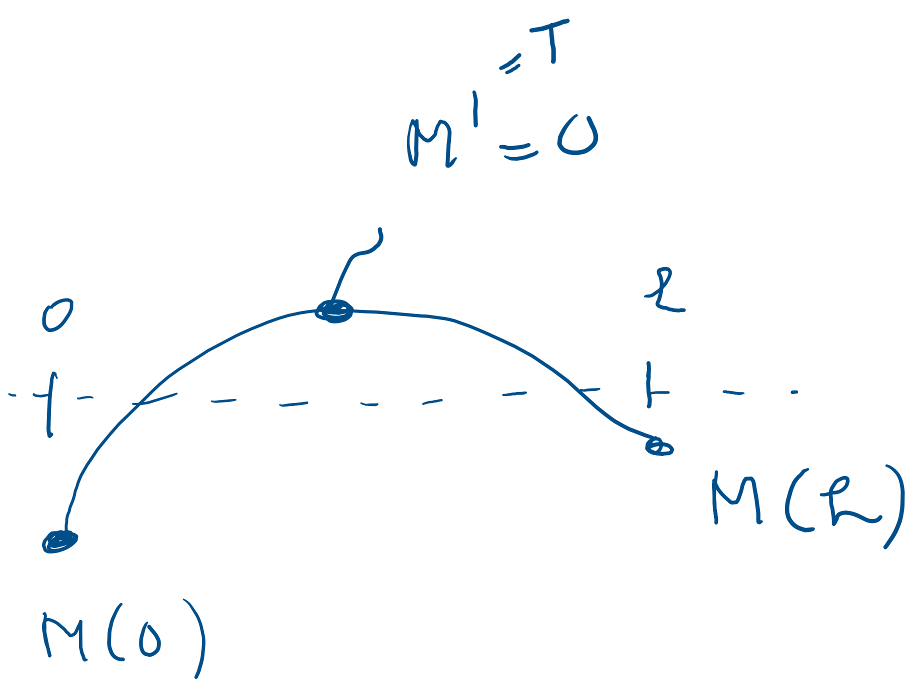
ok!

$$\Rightarrow T(x) = -q_1 L/6 + q_1 x^2/(2L)$$

$$x \curvearrowright: \quad q_1 L/6 \cdot x - \underbrace{\int_0^x q_1 \tilde{x}/L \, (x - \tilde{x}) \, d\tilde{x}}_{\frac{q_1 x^2}{2L} \frac{x}{3}} + M(x) = 0$$

$$\Rightarrow M(x) = -\frac{q_1 L x}{6} + \frac{q_1}{6L} x^3$$

$0 \leq x \leq L$



Koll: $M'(x) = -\frac{q_1 L}{6} + \frac{q_1 x^2}{2L} \stackrel{?}{=} T(x)$

ok!

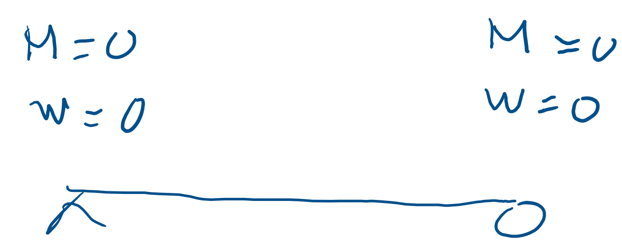
Alternativ använd Matlab kod 9.7.1

$$L^2 = 3x^2 \Rightarrow x = \frac{L}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T(x) = -\dfrac{q_1}{6L}\left(L^2 - 3x^2\right) \\[2ex] M(x) = -\dfrac{q_1 x}{6L}\left(L^2 - x^2\right) \end{cases}$$

```
clear all
close all
syms C1 C2 C3 C4 w(x) L EIy q(x) q1

%utbredd last
q(x)=-q1*x/L;
%%samband mellan qmax och Q
%qmax_=solve(-Q==int(q(x),x,0,L),qmax)
%q(x)=-qmax_*x/L
%allmän lösning till elastiska linjens d.e.
w(x)=C1*x^3/6+C2*x^2/2+C3*x+C4+int( int( int( int(q/EIy,x),x ),x ), x)
wprim(x)=diff(w,x);
%böjmoment
M(x)=-EIy*diff( diff(w,x),x )
%tvärkraft
T(x)=-EIy*diff( diff( diff(w,x),x ),x )
%bestämning av integrationskonstanter
[C1_,C2_,C3_,C4_]=solve(w(0)==0,M(0)==0,w(L)==0,M(L)==0,[C1,C2,C3,C4]);
%utskrift av lösning på integrationskonstanter
disp(['C1= ' char(simplify(C1_))])
disp(['C2= ' char(simplify(C2_))])
disp(['C3= ' char(simplify(C3_))])
disp(['C4= ' char(simplify(C4_))])
%sätt in integrationskonstanter i utböjningen, böjmoment och tvärkraft
w_(x)=simplify(subs(w,[C1,C2,C3,C4],[C1_,C2_,C3_,C4_]))
M_(x)=simplify(subs(M,[C1,C2,C3,C4],[C1_,C2_,C3_,C4_]))
T_(x)=simplify(subs(T,[C1,C2,C3,C4],[C1_,C2_,C3_,C4_]))
```



Största M (till belopp) fås i ändpunkter

$M(0) = 0$, $M(L) = 0$

eller lokala max/min dvs där $M'(x) = T(x) = 0 \Rightarrow x = L/\sqrt{3}$

$$M(L/\sqrt{3}) = -\frac{q_1 L/\sqrt{3}}{6L}\left(L^2 - L^2/3\right) =$$

$$= -\frac{q_1 \, 2/3}{6 \cdot \sqrt{3}} L^2 \approx \underline{-q_1 L^2 \cdot 0{,}064}$$

b) Enl FS

$$I_y \approx \frac{t_2 h^3}{12} + \frac{t_1 b h^2}{2} \approx 3{,}65 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$$

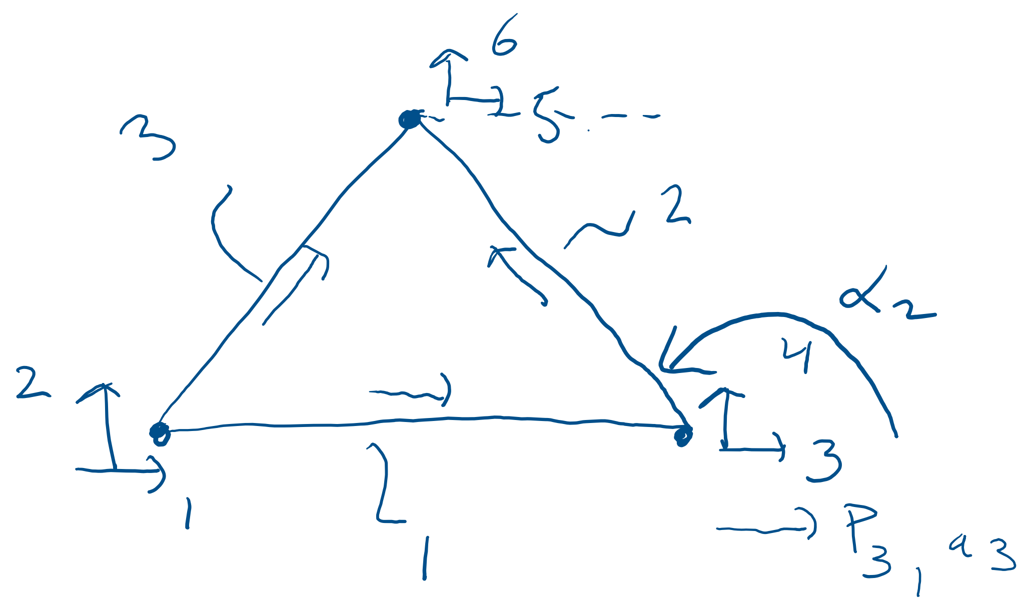
Max spänning enl (9.12)

$$\sigma_x = \frac{M(x) \cdot z}{I_y} \Rightarrow \max|\sigma_x| = \frac{\max|M(x)| \, h/2}{I_y} =$$

≈ 44 MPa//

```
t1=5; t2=t1; b=50; h=50;
Iy=t2*h^3/12+t1*b*h^2/2
q1=10; L=1000;
sigma_max=q1*L^2*6.415002990995843e-02*h/2/Iy
```

5) Inför frihetsgraderna och elementnummer enl:



givet $a_1 = a_2 = 0$

$a_4 = 0$

$P_3 = -k\, a_3$ // positiv a_3 ger neg yttre kraft //

$P_5 = 0$

$P_6 = P$

element 1: $L_1 = 8L$ $\quad \alpha_1 = 0 \Rightarrow \cos\alpha_1 = 1, \ \sin\alpha_1 = 0$

element 2: $L_2 = \sqrt{3^2+4^2}\, L = 5L$

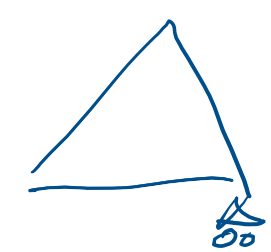
$\cos\alpha_2 = -4/5 \qquad \sin\alpha_2 = 3/5$

element 3: $L_3 = L_2 = 5L$

$\cos\alpha_3 = 4/5 \qquad \sin\alpha_3 = 3/5$

Använd följande Matlabkod ≈ Matlabkod 10.0.1

```
clear all
syms EA L a1 a2 a3 a4 a5 a6 P1 P2 P3 P4 P5 P6 P k
%givna storheter
a1=0; a2=0;  a4=0;
P5=0; P6=P;
%yttre kraft från fjädern
P3=-k*a3; %kraft från fjädern åt vänster om förflyttning åt höger
%definiera avektor pvektor
avektor = [a1; a2; a3; a4; a5; a6];
Pvektor = [P1; P2; P3; P4; P5; P6];
%elementstyvheter
%%%Element 1:
L1=8*L; EA1=EA; alpha1=0; c=cos(alpha1);s=sin(alpha1);
Ke1=EA1/L1*[ c^2 c*s -c^2 -c*s;
             c*s s^2 -c*s -s^2;
             -c^2 -c*s c^2 c*s;
         -c*s -s^2 c*s s^2];
Kmatris1=sym(zeros(6,6));
Kmatris1([1 2 3 4],[1 2 3 4]) = Ke1;
%%%Element 2:
L2=5*L ;EA2=3*EA/2; c=-4/5;s=3/5;
Ke2=EA2/L2*[ c^2 c*s -c^2 -c*s;
             c*s s^2 -c*s -s^2;
             -c^2 -c*s c^2 c*s;
         -c*s -s^2 c*s s^2];
Kmatris2=sym(zeros(6,6));
Kmatris2([3 4 5 6],[3 4 5 6]) = Ke2;
%%%Element 3:
L3=5*L; EA3=EA; c=4/5;s=3/5;
Ke3=EA3/L3*[ c^2 c*s -c^2 -c*s;
             c*s s^2 -c*s -s^2;
             -c^2 -c*s c^2 c*s;
         -c*s -s^2 c*s s^2];
Kmatris3=sym(zeros(6,6));
Kmatris3([1 2 5 6],[1 2 5 6]) = Ke3;
%addera
Ktot=Kmatris1+Kmatris2+Kmatris3;
%Lös de obekanta
Sol = solve(Ktot*avektor==Pvektor,[a3,a5,a6,P1,P2,P4])
%Skriv ut resultat
disp(['a3= ' char(simplify(Sol.a3))])
disp(['a5= ' char(simplify(Sol.a5))])
disp(['a6= ' char(simplify(Sol.a6))])
disp(['P1= ' char(simplify(Sol.P1))])
disp(['P2= ' char(simplify(Sol.P2))])
disp(['P4= ' char(simplify(Sol.P4))])
```



Längdändring av horisontell stång $= a_3 - a_1 = -\dfrac{16 \cdot P \cdot L}{3(EA + 8kL)}$

$\underbrace{a_1}_{=0}$

$\Rightarrow$ töjning $\dfrac{a_3}{8L} = -\dfrac{16 \cdot P}{3 \cdot 8(EA + 8kL)}$

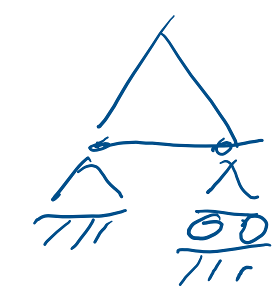
$\Rightarrow$ spänning $= -\dfrac{16 \cdot P \cdot E \cdot}{3 \cdot 8(EA + 8kL)}$

$\sigma = E\varepsilon$

$\Rightarrow$ kraft $= -\dfrac{16 \cdot P \cdot E \cdot A}{3 \cdot 8(EA + 8kL)} = \left\{ \begin{array}{l} \text{givet} \\ kL = \dfrac{EA}{10} \end{array} \right\} =$

$N = \sigma A$

$= -\dfrac{16 \cdot P}{3 \cdot 8(1 + 8/10)} = \dfrac{-10}{27} \cdot P$



Kritisk trycklast enl Euler 2, Ex 11.4.2

$\underline{\underline{\dfrac{\pi^2}{(8 \cdot L)^2}}} EI = \dfrac{10}{27} \cdot P \Rightarrow$ kritisk P fås som

$P = \dfrac{27}{10} \cdot \dfrac{\pi^2}{8^2} \dfrac{EI}{L^2}$ där enl FS

$I = \dfrac{\pi (d/2)^4}{4}$.

Tvåfaldig säkerhet mot utknäckning, tillåten trycklast fås då som

$$P_{till} = \frac{1}{2}\,\frac{27}{10}\,\frac{\pi^2}{64}\,\frac{E\cdot\pi\,d^4}{16\cdot 4\cdot \ell^2} = 3{,}3\cdot 10^{-4}\cdot\frac{E\cdot d^4\cdot\pi^3}{\ell^2}$$

//