Tentamen i TME061, 2021-10-08

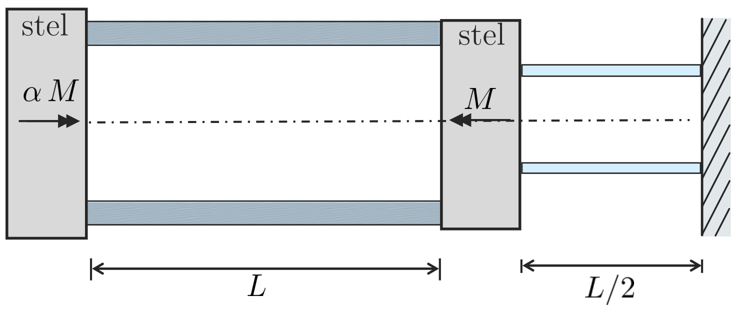
- **Tid:** 14:00-18:00 **Lokal:** Zoomövervakad tentamen.
- **Lärare:** Magnus Ekh, tele 7723479, 0708-282358
- **Hjälpmedel**
  - Alla hjälpmedel tillåtna dock inte tillåtet att samarbeta eller att ta hjälp av annan person.
  - Viktigt att ange källhänvisning om ekvationer, lösningar av exempel (inklusive gamla tentatal), datorkod och/eller annan information används.
  - Som kalkylator kan Matlab, Python, ... användas. Om dessa används ladda också upp .m, .py,... filer på Canvassidan för tentamen.
  - Zoomövervakad tentamen.
- Du behöver scanna dina handskrivna lösningar och ladda upp dom på Canvas (ladda upp .pdf eller .doc filer). Skriv namn, personnummer, problemnummer, sidonummer på varje inscannad sida. Se till att ha bra ljusförhållande och en scanningsapp t.ex. CamScanner eller Genius Scan. namnge dina filer ProblemYYsidaXX. Exempel: Problem01sida02.pdf. Om du vill kan bilder kombineras till ett dokument i Word eller PDF som kallas ProblemYY. Om du har använt Matlab, Python, etc som redskap ladda då upp dina filer till Canvas.
- **Lösningar**: Anslås på kurshemsidan (Canvas) dagen efter tentamen.
- **Betygslista**: Medddelas senast 20 oktober på Canvas.

- **Poängbedömning**: Maxpoäng på tentan är 25. För att få poäng måste det skrivna vara läsligt och uppställda ekvationer skall klart motiveras. Vidare skall entydiga beteckningar användas och tydliga figurer ritas. Tänk på att kontrollera dimensioner och rimlighet i svaren.

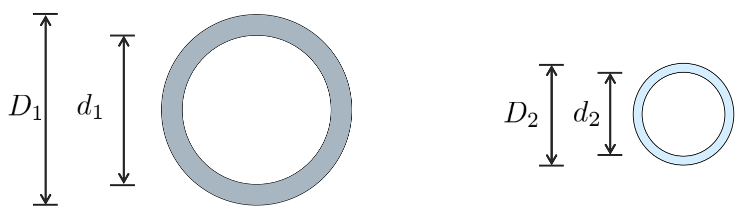
- **Betygsgränser**:
  20-25p: betyg 5
  15-19p: betyg 4
  10-14p, betyg 3
  0-9p, betyg U

Uppgift 1

En axelkonstruktion består av två axlar som är sammankopplade med en stel skiva enligt figuren nedan. Den högra axeln är fast inspänd i en vägg till höger. På den vänstra stela skivan verkar vridmomentet $\alpha\, M$. Medan på den stela skivan mellan axlarna verkar vridmomentet M (i motsatt riktning). Antag att längden på axeldelarna är $L = 1000$ mm och $L/2$.



Axlarna har cirkulära tvärsnitt enligt figuren nedan.



Där $D_1 = 30$ mm, $d_1 = 0.8\, D_1$, $D_2 = 20$ mm och $d_2 = 0.8\, D_2$.

(a) Om $M = 10^5$ Nmm bestäm för vilket lägsta α (antag $\alpha > 0$) som någon av axlarna plasticerar (dvs då den största skjuvspänningen till belopp uppnår skjuvflytspänningen τ_s). Antag de numeriska värdena $E = 200 \cdot 10^3$ MPa, $\nu = 0.3$, $\tau_s = 300$ MPa

(b) För värdet på α från (a), hur mycket roterar den vänstra stela skivan?

Uppgift 2

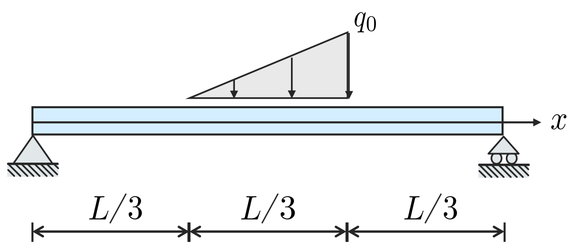
Man har med hjälp av ett experiment bestämt följande töjningar $\epsilon_x = 0.002$, $\epsilon_y = -0.001$, $\epsilon_z = 0.001$ och $\gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0$. Den töjningen man inte kunde bestämma var γ_{xy}.

(a) Om elasticitetsmodulen E är 200 GPa och Poissons tal är $\nu = 0.3$, bestäm σ_x, σ_y, σ_z, τ_{yz} och τ_{zx}.

(b) Om materialet precis börjar plasticera (med spänningarna enligt (a)). Vad är spänningen τ_{xy} enligt von Mises flythypotes om flytspänningen är 500 MPa?

Uppgift 3

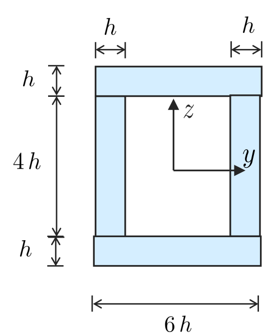
En fritt upplagd balk belastas med en utbredd last. Lasten ökar linjärt mellan $x = L/3$ till $x = 2\,L/3$ med värdena $q(L/3) = 0$ och $q(2L/3) = -q_0$. Antag $L = 1000$ mm och $q_0 = 1$ N/mm.



(a) Bestäm tvärkraft $T(x)$ och böjmoment $M(x)$ längs balken.

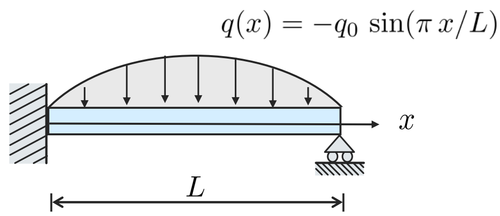
(b) Bestäm det (till belopp) största böjmomentet längs balken.

(c) Bestäm största normalspänningen i balken med följande sammansatta tvärsnitt där $h = 5$ mm. Balken böjs kring y-axeln.



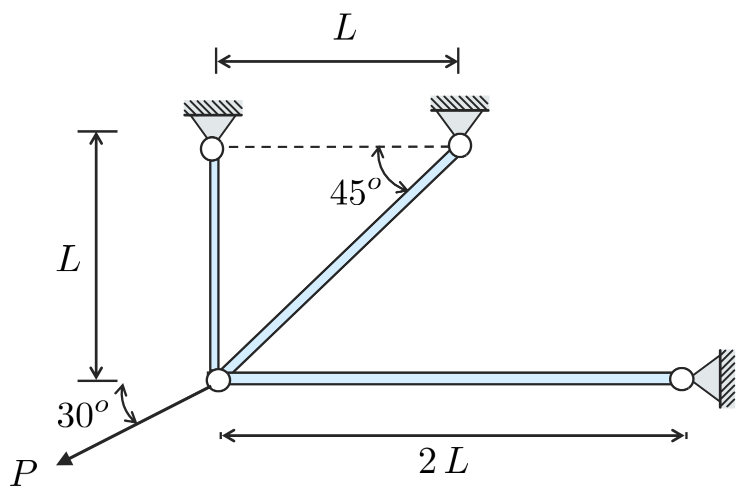
Uppgift 4

En fast inspänd och fritt upplagd balk belastas med en utbredd last enligt figuren. Balken har böjstyvheten EI. Bestäm balkens utböjning $w(x)$ och samtliga stödreaktioner.



Uppgift 5

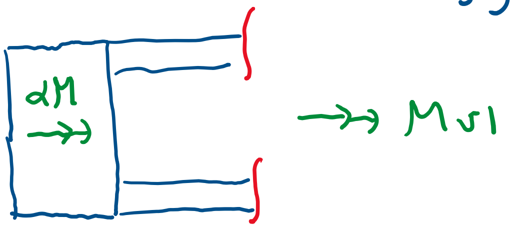
Ett stångsystem består av tre stänger enligt figuren nedan. Stängerna har alla tre ett tvärsnitt med arean A och är gjorda av samma material med elasticitetsmodulen E.



(a) Bestäm förskjutningen av knutpunkten där lasten P appliceras. Antag följande numeriska värden $A = 100$ mm^2, $L = 500$ mm, $E = 210 \cdot 10^3$ MPa och $P = 10$ kN.

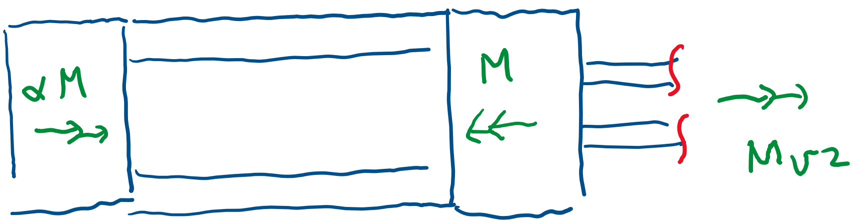
(b) Bestäm storleken på P när någon stång plasticerar. Antag flytgräns $\sigma_s = 400$ MPa.

1) Snitta och frilägg



$\rightarrow\!\!\!\rightarrow: M_{v1} + \alpha M = 0$

$\Rightarrow M_{v1} = -\alpha M \qquad (1)$



$\rightarrow\!\!\!\rightarrow: M_{v2} - M + \alpha M = 0$

$\Rightarrow M_{v2} = M(1-\alpha) \qquad (2)$

Enl (3.10), (3.11):

$$\max(|\tau_1|) = \frac{|M_{v1}|}{W_{v1}} = \tau_s$$

där $|M_{v1}| \overset{(1)}{=} \alpha M$

$$W_{v1} \overset{(3.11)}{=} \frac{\pi}{2}\left((D_1/2)^3 - \frac{(d_1/2)^4}{D_1/2}\right) \approx 3.13 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\tau_s W_{v1}}{M} \approx 9.39$$

$$\max(|\tau_2|) = \frac{|M_{v2}|}{W_{v2}} = \tau_s$$

där $|M_{v2}| = M(1-\alpha)$ eller $M(\alpha-1)$

$$W_{v2} = \pi/2\left((D_2/2)^3 - \frac{(d_2/2)^4}{D_2/2}\right) \approx 927 \text{ mm}^3$$

Om $\alpha < 1$

$$\Rightarrow \quad 1-\alpha = \frac{\tau_s \cdot W_{v2}}{M} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx -1{,}78$$ dvs ej tillåten lösning

om $\alpha > 1$

$$\Rightarrow \quad \alpha - 1 = \frac{\tau_s W_{v2}}{M} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 3{,}78$$

Lägsta α då plasticering sker är således 3,78

Rotationen fås som

$$\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2 \overset{(38)}{=} \frac{M_{v1} L}{G K_{v1}} + \frac{M_{v2} L/2}{G K_{v2}} = \frac{-\alpha M L}{G K_{v1}} + \frac{(1-\alpha) M L}{2G K_{v2}}$$

där $K_{v1} = \frac{\pi}{2}\left((D_1/2)^4 - (d_1/2)^4\right) \approx 4{,}695 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$

$K_{v2} = \frac{\pi}{2}\left((D_2/2)^4 - (d_2/2)^4\right) \approx 9{,}274 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$

$$\Rightarrow \quad \Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2 \approx -0{,}300 \text{ rad} \approx -17{,}1^\circ$$

2) Hookes Lag

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu \\ \nu & 1-\nu & \nu \\ \nu & \nu & 1-\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 538 \\ 76,9 \\ 385 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

$$\tau_{yz} = G \gamma_{yz} = 0$$

$$\tau_{zx} = G \gamma_{zx} = 0$$

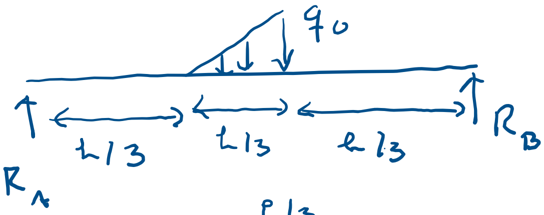
von Mises

$$\sigma_e^{vM} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x\sigma_y - \sigma_x\sigma_z - \sigma_y\sigma_z + 3\tau_{xy}^2 + 3\tau_{yz}^2 + 3\tau_{zx}^2}$$

$$= \sigma_s = 500 \text{ MPa}$$

$$\Rightarrow |\tau_{xy}| \approx 167,7 \text{ MPa} \;//$$

3)



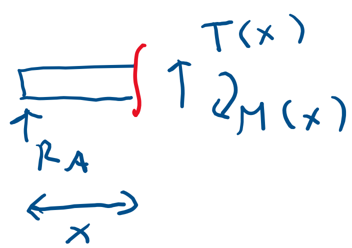
$$\uparrow: \quad R_A + R_B - \underbrace{\int_0^{\ell/3} \frac{q_0 \tilde{x}}{\ell/3}\, d\tilde{x}}_{\frac{q_0}{2}\frac{\ell}{3} = \frac{q_0 \ell}{6}} = 0 \qquad (1)$$

$$A\curvearrowright: \quad \underbrace{\int_0^{\ell/3} \frac{q_0 \tilde{x}}{\ell/3}\left(\ell/3 + \tilde{x}\right) d\tilde{x}}_{\frac{q_0 \ell}{6}\cdot\left(\frac{\ell}{3} + \frac{2\ell}{9}\right) = \frac{q_0 \ell^2 5}{54}} - R_B \ell = 0 \Rightarrow R_B = \frac{5 q_0 \ell}{54}$$

$(1) \Rightarrow$

$$R_A = \frac{2 q_0 \ell}{27}$$

$0 < x < \ell/3$

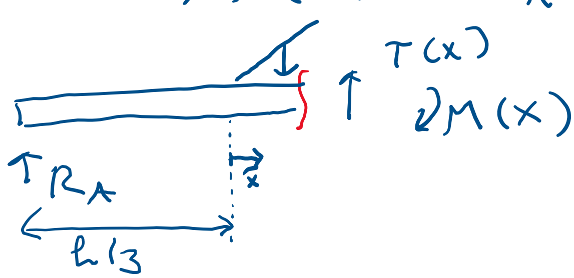


$$\uparrow: \quad R_A + T(x) = 0$$

$$\Rightarrow T(x) = -R_A$$

$$x\curvearrowright: \quad M(x) + R_A \cdot x = 0 \Rightarrow M(x) = -R_A \cdot x$$

$\ell/3 < x < 2\ell/3$

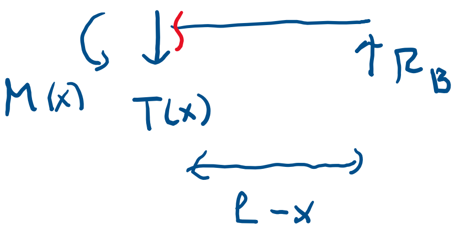


$$\uparrow: \quad R_A - \int_0^{x-\ell/3} \frac{q_0 \tilde{x}}{\ell/3}\, d\tilde{x} + T(x) = 0$$

$$\Rightarrow T(x) = -R_A + \int_0^{x-\ell/3} \frac{q_0 \tilde{x}}{\ell/3}\, d\tilde{x} = -R_A + \frac{q_0(\ell-3x)^2}{6\ell}$$

$$x\curvearrowright: \quad M(x) + R_A \cdot x - \int_0^{x-\ell/3} \frac{q_0 \tilde{x}}{\ell/3}\left(x - \ell/3 - \tilde{x}\right) d\tilde{x} = 0 \Rightarrow M(x) = -R_A \cdot x + - q_0(\ell-3x)^3/(54\ell)$$

$2\ell/3 < x < \ell$

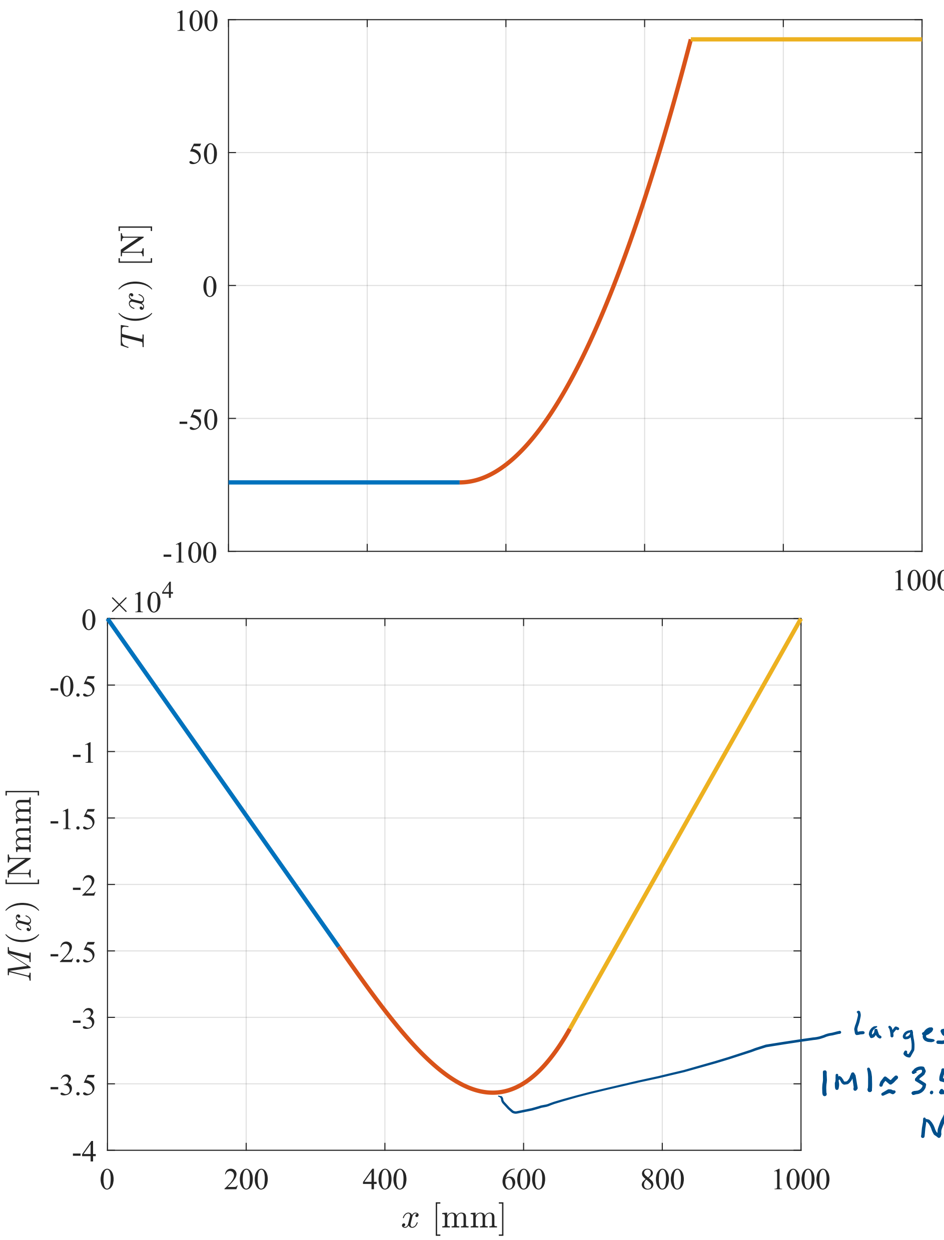


$\uparrow: -T(x) + R_B = 0 \Rightarrow T(x) = R_B$

$x\circlearrowleft: -M(x) - R_B(\ell - x) = 0$

$\Rightarrow M(x) = R_B(x - \ell)$

Plot in Matlab



Largest $|M| \approx 3.567 \cdot 10^4$ Nmm

```
clear all
q0=1; L=1000;
npoints=1000;
RA=2*q0*L/(27); RB=5*q0*L/54;



%intervall 1
x1=linspace(0,L/3,npoints);
T1=-RA*ones(size(x1)); M1=-RA.*x1;
%intervall 2
x2=linspace(L/3,2*L/3,npoints);
T2=-RA+q0*(L-3*x2).^2/(6*L); M2=-RA.*x2-q0*(L-3.*x2).^3./(54*L);
%intervall 3
x3=linspace(2*L/3,L,npoints);
T3=RB*ones(size(x3)); M3=RB*(x3-L);



close all
figure(1)
plot(x1,T1,x2,T2,x3,T3,'linewidth',2)
set(gca,'FontSize',14,'fontname','Times New Roman')
xlabel('$x$ [mm]','FontSize',16,'interpreter','latex')
ylabel('$T(x)$ [N]','FontSize',16,'interpreter','latex')
grid on
figure(2)
plot(x1,M1,x2,M2,x3,M3,'linewidth',2)
set(gca,'FontSize',14,'fontname','Times New Roman')
xlabel('$x$ [mm]','FontSize',16,'interpreter','latex')
ylabel('$M(x)$ [Nmm]','FontSize',16,'interpreter','latex')
grid on
```

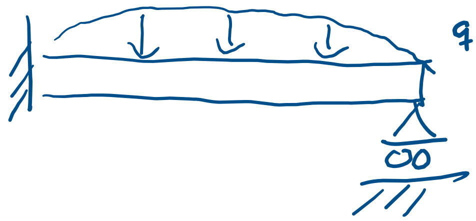
Yttröghetsmomentet

$$I = \frac{6h\,(6h)^3}{12} - \frac{4h\cdot(4h)^3}{12} = h^4\,\frac{260}{3} \approx 5.42\cdot10^4 \text{ mm}^4$$

$$\sigma_{max} = \frac{|M|_{max}\cdot 3h}{I} \approx 9.9 \text{ MPa}$$

//

4)



$q(x) = -q_0 \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)$

RV $w(0)=0$, $w'(0)=0$

$w(\ell)=0$, $M(\ell)=0$

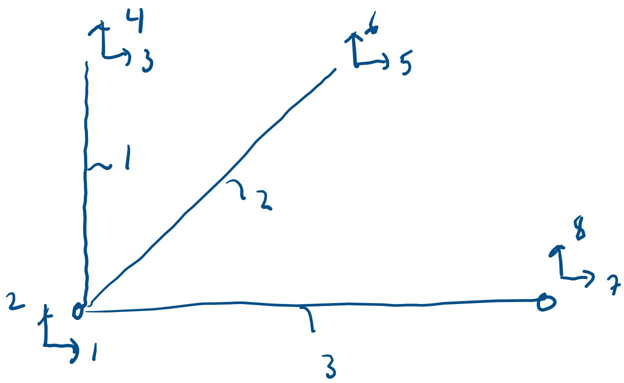
Baserat på Matlabkod 9.7.1

```
syms q(x) q0 L Emod I C1 C2 C3 C4
q(x)=-q0*sin(pi*x/L) %distributed loading
%general solution
w(x)=int(int( int( int(q(x)/(Emod*I),x),x),x),x)+C1*x^3/6+C2*x^2/2+C3*x+C4
wprime(x)=diff(w(x),x)
M(x)=-Emod*I*diff(wprime(x),x) %bending moment
V(x)=diff(M(x),x) %shear force
sol=solve(w(0)==0,wprime(0)==0,M(L)==0,w(L)==0,[C1 C2 C3 C4])
disp(['C1= ' char(sol.C1)])
disp(['C2= ' char(sol.C2)])
disp(['C3= ' char(sol.C3)])
disp(['C4= ' char(sol.C4)])
w_(x)=simplify(subs(w(x),[C1,C2,C3,C4],[sol.C1,sol.C2,sol.C3,sol.C4]))

>>w_(x) = -(L*q0*(2*L^3*sin((pi*x)/L) - pi*x^3 + 3*pi*L*x^2 -
2*pi*L^2*x))/(2*Emod*I*pi^4)
M_(0)
>>  (3*L^2*q0)/pi^3
V_(0)
>>  -(L*q0*(pi^2 + 3))/pi^3
simplify(V_(L))
>> (L*q0*(pi^2 - 3))/pi^3
```

5)

Välj t.ex. elementnummer och frihetsgrader enl. nedan.



Från Matlabkod (se nästa sida)

$a_1 \approx -0{,}23$ mm $\qquad a_2 \approx -0{,}028$ mm

och för $P = 10$ kN

$\sigma_1 \approx 11{,}7$ MPa $\qquad \sigma_2 \approx 54{,}2$ MPa $\qquad \sigma_3 \approx 48.3$ MPa

Eftersom linjär teori (små deformationer, linjär elast.) så är varierar spänningarna linjärt med P

Plasticering fås därmed i stång 2

för $$P = \underbrace{10 \cdot 10^3}_{\text{nuvarande last}} \cdot \frac{400}{54{,}2} \approx 73{,}9 \text{ kN}$$

```
clear all
syms a1 a2 a3 a4 a5 a6 a7 a8 P1 P2 P3 P4 P5 P6 P7 P8
%givna storheter
Em=210e3;
EA=210e3*100; L=500;
P=10e3;
a3=0; a4=0; a5=0; a6=0; a7=0; a8=0;
P1=-P*cos(pi/6); P2=-P*sin(pi/6);
%definiera avektor pvektor
avektor = [a1; a2; a3; a4; a5; a6; a7; a8];
Pvektor = [P1; P2; P3; P4; P5; P6; P7; P8];
%elementstyvheter
%%%Element 1:
L1=L; EA1=EA; alpha1=pi/2; c=cos(alpha1);s=sin(alpha1);
Ke1=EA1/L1*[ c^2 c*s -c^2 -c*s;
c*s s^2 -c*s -s^2;
-c^2 -c*s c^2 c*s;
-c*s -s^2 c*s s^2];
Kmatris1=sym(zeros(8,8));
Kmatris1([1 2 3 4],[1 2 3 4]) = Ke1;
%%%Element 2:
L2=sqrt(2)*L; EA2=EA; alpha2=pi/4; c=cos(alpha2);s=sin(alpha2);
Ke2=EA2/L2*[ c^2 c*s -c^2 -c*s;
c*s s^2 -c*s -s^2;
-c^2 -c*s c^2 c*s;
-c*s -s^2 c*s s^2];
Kmatris2=sym(zeros(8,8));
Kmatris2([1 2 5 6],[1 2 5 6]) = Ke2;
%%%Element 3:
L3=2*L; EA3=EA; alpha3=0; c=cos(alpha3);s=sin(alpha3);
Ke3=EA3/L3*[ c^2 c*s -c^2 -c*s;
c*s s^2 -c*s -s^2;
-c^2 -c*s c^2 c*s;
-c*s -s^2 c*s s^2];
Kmatris3=sym(zeros(8,8));
Kmatris3([1 2 7 8],[1 2 7 8]) = Ke3;
%addera
Ktot=double(Kmatris1+Kmatris2+Kmatris3)
avektor
Pvektor
%Lös de obekanta
Sol = solve(double(Ktot)*avektor==Pvektor,[a1,a2,P3,P4,P5,P6,P7,P8])
%Skriv ut resultat
double(Sol.a1)
double(Sol.a2)
```

```
% förskjutningar i längsled av element, s. 208
u1_bar_1=cos(alpha1)*Sol.a1+sin(alpha1)*Sol.a2;
u2_bar_1=cos(alpha1)*a3+sin(alpha1)*a4;
delta_bar_1=u2_bar_1-u1_bar_1;
sigma_bar_1=double(Em*delta_bar_1/L1)



u1_bar_2=cos(alpha2)*Sol.a1+sin(alpha2)*Sol.a2;
u2_bar_2=cos(alpha2)*a5+sin(alpha2)*a6;
delta_bar_2=u2_bar_2-u1_bar_2;
sigma_bar_2=double(Em*delta_bar_2/L2)



u1_bar_3=cos(alpha3)*Sol.a1+sin(alpha3)*Sol.a2;
u2_bar_3=cos(alpha3)*a7+sin(alpha3)*a8;
delta_bar_3=u2_bar_3-u1_bar_3;
sigma_bar_3=double(Em*delta_bar_3/L3)
```