TENTAMEN

HÅLLFASTHETSLÄRA OCH MASKINELEMENT

Tid:	12 oktober 2018, 14:00-18:00 (SB)
Ansvarig lärare:	Thomas Abrahamsson, tel 1506
Hjälpmedel:	- Grundläggande hållfasthetslära; Hans Lundh - Formelsamling i hållfasthetslära; Ekh, Hansbo och Brouzoulis - Typgodkänd kalkylator
Lösningar:	Anslås senast 13 oktober på kurshemsidan
Granskning:	Efter överenskommelse med ansvarig lärare via epost
Poängbedömning:	Varje uppgift kan ge fem poäng, d.v.s. max 25 poäng på tentamen. Halva poäng kan delas ut. För att få poäng på en uppgift måste lösningen vara läslig och uppställda ekvationer klart motiverade. Vidare skall entydiga beteckningar användas och tydliga figurer ritas.
Betygsgränser:	-9,5p = underkänt 10-14.5p = betyg 3 15-19.5p = betyg 4 20p- = betyg 5

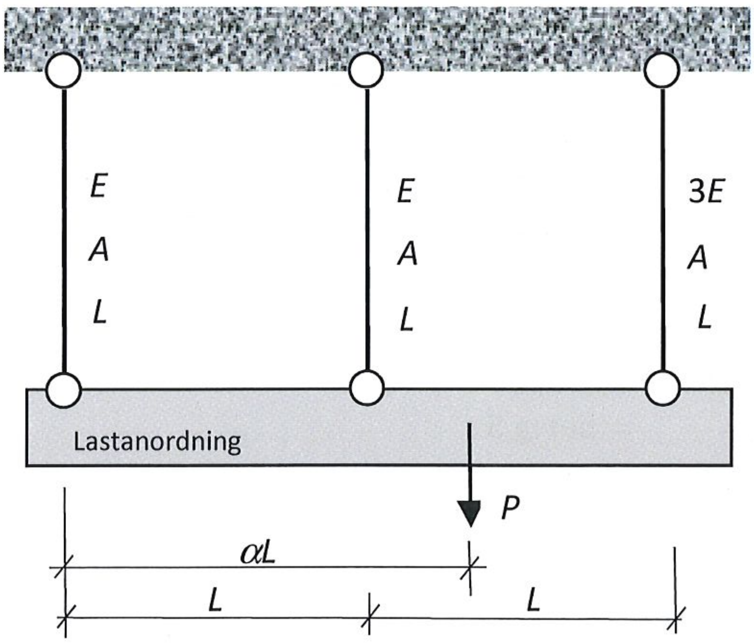
Uppgift 1

I en skiva i *xy*-planet med plant spänningstillstånd är största huvudspänningen $\sigma_1 = -2\sigma_0$ och den största skjuvspänning är $\tau_{max} = \sigma_0$. Spänningen σ_0 är positiv. Bestäm den minimala huvudspänningen i skivans plan. (4p)

Rita (med tydlig och välgjord frihandsritning) Mohrs spänningscirkel för det spänningstillståndet. (1p)

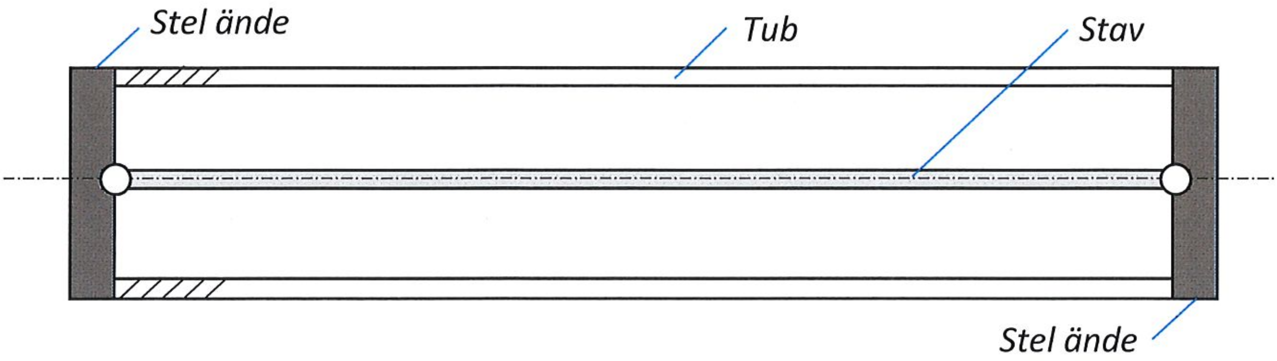
Uppgift 2

En (approximativt viktlös och stel) lastanordning hänger i tre stänger och bär lasten *P* på det sätt figuren visar. De tre stängerna är gjorda av olika material (olika elasticitetsmodul *E*) men har lika tvärsnittsareor (se figur). Bestäm normalkrafterna i de tre stängerna. (5p)



Uppgift 3

Inuti en cirkulär tub med (approximativt) stela ändar har man fäst en rund stav (se figur). I rumstemperatur är tub och stav förspända så att spänningen i staven är $-10\sigma_0$ och i tuben σ_0. Man kan höja temperaturen från rumstemperatur i tuben och staven lika mycket (ΔT) och får därmed förändrade krafter i staven och tuben eftersom dessas längdutvidgnings-koefficienter är olika. Bestäm spänningarna i stav och tub vid temperaturökningen ΔT. (5p)



Data för tuben: Längd – L, Elasticitetsmodul – E, Tvärsnittsarea – $10A$, Längdutvidgnings-koefficient - 2α

Data för staven: Längd – L, Elasticitetsmodul – E, Tvärsnittsarea – A, Längdutvidgnings-koefficient - α

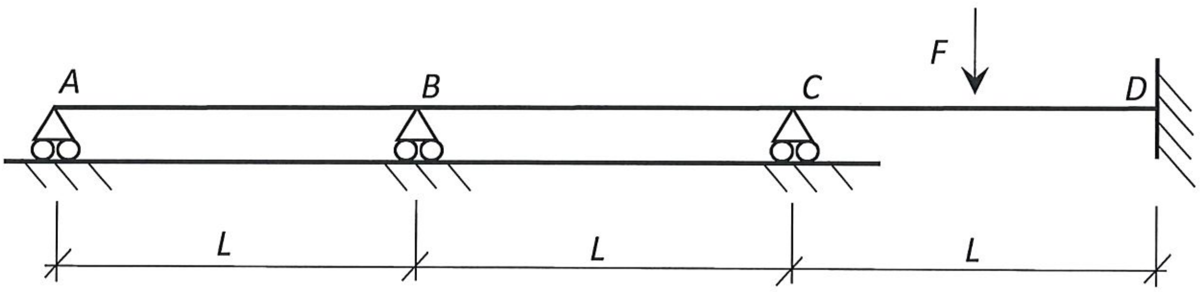
Uppgift 4

En mycket tunnväggig cylindrisk behållare (tryckkärl med radie R och godstjocklek t) av stål (E=210GPa och ν=0,3) belastas med ett inre övertryck p och dessutom en yttre längsgående dragkraft $\pi R^2 p$. Beräkna förhållandet mellan cylinderns ringtöjning ε_ϕ och längstöjning ε_z. (5p)

Uppgift 5

En balk med totala längden $3L$ ligger på fyra stöd av olika typ (enligt figur). Den belastas mitt mellan C och D av en punktkraft F. Bestäm balkens lutning över stödet C. Balkens böjstyvhet är EI. (5p)

Tips: Använd elementarfallslösningar.



Uppgift 1

I en skiva i *xy*-planet med plant spänningstillstånd är största huvudspänningen $\sigma_1 = -2\sigma_0$ och den största skjuvspänning är $\tau_{max} = \sigma_0$. Spänningen σ_0 är positiv. Bestäm den minimala huvudspänningen i skivans plan. (4p)

Rita (med tydlig och välgjord frihandsritning) Mohrs spänningscirkel för det spänningstillståndet. (1p)

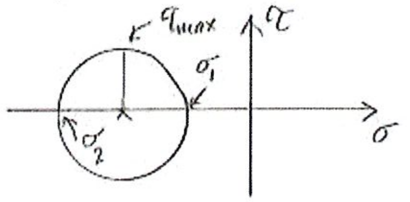
Maximal skjuvspänning är radien i Mohrs spänningscirkel, se (9-83) och Figur 109

Här: $\tau_{max} = \sigma_0$

Minsta huvudspänningen ges av (9-78)

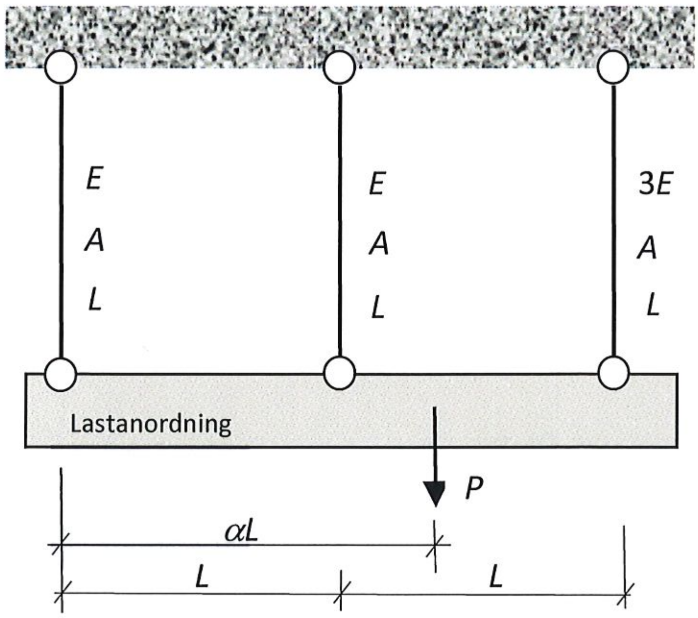
$\sigma_2 = \sigma_1 - 2\tau_{max} = \{\text{Här}\} = -2\sigma_0 - 2\sigma_0 = -4\sigma_0$

Mohrs spänningscirkel för detta tillstånd

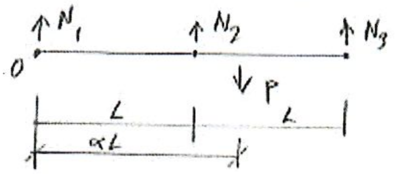


Uppgift 2

En (approximativt viktlös och stel) lastanordning hänger i tre stänger och bär lasten P på det sätt figuren visar. De tre stängerna är gjorda av olika material (olika elasticitetsmodul E) men har lika tvärsnittsareor (se figur). Bestäm normalkrafterna i de tre stängerna. (5p)



Frilägg lastanordningen



Jämvikt

$\uparrow \quad N_1 + N_2 + N_3 - P = 0 \qquad (1)$

$\circlearrowleft O \quad N_2 L + 2N_3 L - \alpha L P = 0$

dvs: $\alpha P - N_2 - 2N_3 = 0 \qquad (2)$

Kompatibilitet

Med denna geometri inses att u_2 är medelvärde av u_1 och u_3

$u_2 = \frac{1}{2}(u_1 + u_3) \qquad (3)$

Konstitutiva samband

$\sigma_1 = \frac{N_1}{A} = E\varepsilon_1 = E\frac{u_1}{L} \Rightarrow N_1 = \frac{EA}{L} u_1 \qquad (4)$

$\sigma_2 = \frac{N_2}{A} = E\varepsilon_2 = E\frac{u_2}{L} \Rightarrow N_2 = \frac{EA}{L} u_2 \qquad (5)$

$\sigma_3 = \frac{N_3}{A} = 3E\varepsilon_3 = 3E\frac{u_3}{L} \Rightarrow N_3 = \frac{3EA}{L} u_3 \qquad (6)$

(4)-(6) i (1) och (2) ger

$u_1 + u_2 + 3u_3 = \frac{PL}{EA} \qquad (7)$

$u_2 + 6u_3 = \alpha \frac{PL}{EA} \qquad (8)$

På matrisform ges ekvationerna (7)(8) och (3)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{PL}{EA} \begin{Bmatrix} 1 \\ \alpha \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 1 \\ \alpha \\ 0 \end{Bmatrix} \frac{PL}{EA}$$

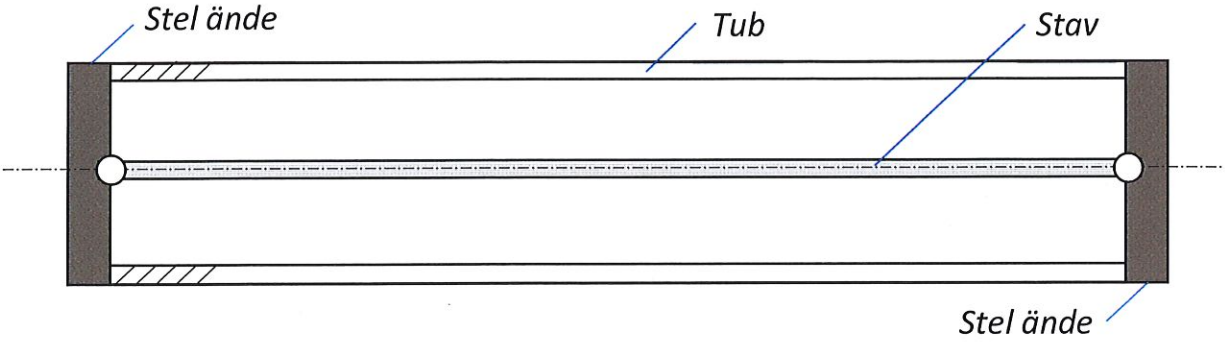
Med lösning

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 1 \\ \alpha \\ 0 \end{Bmatrix} \frac{PL}{EA} = \frac{PL}{9EA} \begin{bmatrix} 13 & -7 & 3 \\ 5 & -2 & -3 \\ -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ \alpha \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{PL}{9EA} \begin{Bmatrix} 13 - 7\alpha \\ 5 - 2\alpha \\ -3 + 3\alpha \end{Bmatrix}$$

$\Rightarrow N_1 = \frac{P}{9}(13 - 7\alpha) \quad , \quad N_2 = \frac{P}{9}(5 - 2\alpha) \quad , \quad N_3 = P(\alpha - 1)$

Uppgift 3

Inuti en cirkulär tub med (approximativt) stela ändar har man fäst en rund stav (se figur). I rumstemperatur är tub och stav förspända så att spänningen i staven är $-10\sigma_0$ och i tuben σ_0. Man kan höja temperaturen från rumstemperatur i tuben och staven lika mycket (ΔT) och får därmed förändrade krafter i staven och tuben eftersom dessas längdutvidgnings-koefficienter är olika. Bestäm spänningarna i stav och tub vid temperaturökningen ΔT. (5p)



Data för tuben: Längd – L, Elasticitetsmodul – E, Tvärsnittsarea – $10A$, Längdutvidgnings-koefficient - 2α

Data för staven: Längd – L, Elasticitetsmodul – E, Tvärsnittsarea – A, Längdutvidgnings-koefficient - α

Utan förspänning:

Jämvikt för stav (normalkraft N_S) och tub (normalkraft N_T) kräver

$N_T = -N_S$ (1)

Kompatibilitet kräver att töjning i staven (ε_S) och tuben (ε_T) är lika. Se (5-3)

Staven: $\varepsilon_S = \frac{\sigma_S'}{E} + \alpha\Delta T = \frac{N_S}{EA} + \alpha\Delta T$

Tuben: $\varepsilon_T = \frac{\sigma_T'}{E} + \alpha\Delta T = \frac{N_T}{10EA} + 2\alpha\Delta T$

$\Rightarrow \frac{N_S}{EA} + \alpha\Delta T = \frac{N_T}{10EA} + 2\alpha\Delta T$ (2)

(1) & (2) ger nu

$$\frac{N_S}{EA} = -\frac{N_S}{10EA} + \alpha\Delta T \Rightarrow N_S = \frac{10}{11}EA\alpha\Delta T \Rightarrow \sigma_S' = \frac{N_S}{A} = \frac{10}{11}E\alpha\Delta T$$

$$\sigma_T' = \frac{N_T}{10A} = -\frac{N_S}{10A} = -\frac{1}{11}E\alpha\Delta T$$

Superponera spänningarna från förspänning och temperaturökning

Staven: $\sigma_S^{tot} = \sigma_S' - 10\sigma_0' = \frac{10}{11}E\alpha\Delta T - 10\sigma_0'$

Tuben: $\sigma_T^{tot} = \sigma_T' + \sigma_0' = -\frac{1}{11}E\alpha\Delta T + \sigma_0'$

Uppgift 4

En mycket tunnväggig cylindrisk behållare (tryckkärl med radie R och godstjocklek t) av stål (E=210GPa och ν=0,3) belastas med ett inre övertryck p och dessutom en yttre längsgående dragkraft $\pi R^2 p$. Beräkna förhållandet mellan cylinderns ringtöjning ε_ϕ och längstöjning ε_z.

(5p)

Tryckkärlsformler (9-97) och (9-101)

Omkretsspänning: $\sigma_\varphi = \frac{pR}{t}$ (1)

Längsspänning: $\sigma_z = \frac{pR}{2t}$ (2)

Till denna längsspänning tillkommer spänningen från yttre längsgående kraften på tvärsnittsytan $A = 2\pi R t$. Således blir längsspänningen

$$\sigma_z = \frac{pR}{2t} + \frac{\pi R^2 p}{A} = \frac{pR}{2t} + \frac{pR}{2t} = \frac{pR}{t} \quad (3)$$

I plant spänningstillstånd råder (se (10-25) och (10-26))

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{E}(\sigma_\varphi - \nu\sigma_x) = \{\text{Här}\} = \frac{pR}{Et}(1-\nu)$$

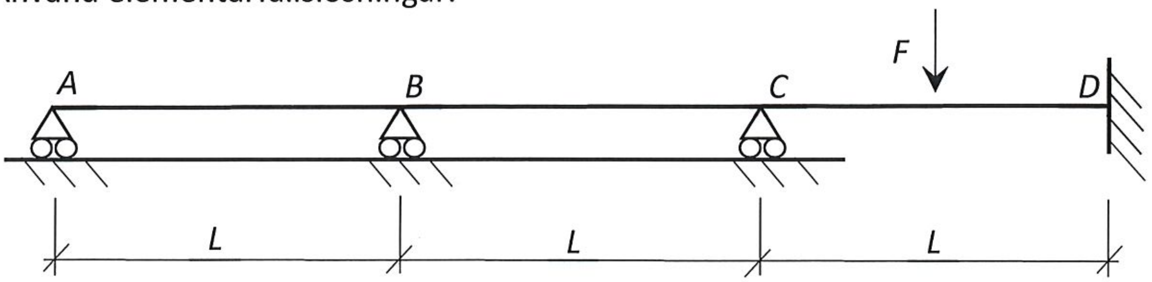
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu\sigma_\varphi) = \{\text{Här}\} = \frac{pR}{Et}(1-\nu)$$

Förhållandet mellan ringtöjning och längstöjning blir således = 1

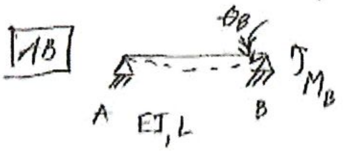
Uppgift 5

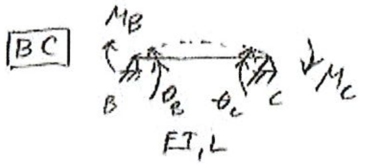
En balk med totala längden 3*L* ligger på fyra stöd av olika typ (enligt figur). Den belastas mitt mellan C och D av en punktkraft *F*. Bestäm balkens lutning över stödet *C*. Balkens böjstyvhet är *EI*. (5p)

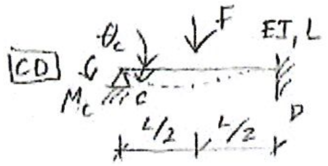
Tips: Använd elementarfallslösningar.



Använd elementarfall, jämviktsamband (balkdelarna) Mittmoment är lika över momentfria stöd) och vinkelkompatibilitet över stöd







Formelsamling (6.3 Fri upplägning) ger:

AB: $\theta_B = \frac{M_B}{3EI}$ (1)

BC: $\theta_B = -\frac{M_B L}{3EI} + \frac{M_C L}{6EI}$ (2)

$\theta_C = -\frac{M_B L}{6EI} + \frac{M_C L}{3EI}$ (3)

CD: (6.5 Fast inspänning på ena sidan, fri upplägning i andra)

$\theta_C = -\frac{M_C L}{4EI} + \frac{FL^2}{32EI}$ (4)

(1) & (2) ger: $2M_B = -2M_B + M_C \Rightarrow 4M_B - M_C = 0$ (5)

(3) & (4) ger: $-16M_B + 32M_C = -24M_C + 3FL \Rightarrow -16M_B + 56M_C = 3FL$ (6)

På matrisform (5) & (6):

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -16 & 56 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_B \\ M_C \end{Bmatrix} = FL \begin{Bmatrix} 0 \\ 3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} M_B \\ M_C \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -16 & 56 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ 3 \end{Bmatrix} FL = \frac{FL}{208} \begin{Bmatrix} 3 \\ 12 \end{Bmatrix}$$

Ekv (4) ger nu: $\theta_C = -\frac{12FL^2}{4 \cdot 208 EI} + \frac{FL^2}{32EI} = \frac{7}{416} \frac{FL^2}{EI}$