TENTAMEN

HÅLLFASTHETSLÄRA OCH MASKINELEMENT

Tid:	28 augusti 2018, 08:30-12:30 (M)
Ansvarig lärare:	Thomas Abrahamsson, tel 1506
Hjälpmedel:	- Grundläggande hållfasthetslära; Hans Lundh - Formelsamling i hållfasthetslära; Ekh, Hansbo och Brouzoulis - Valfri typgodkänd kalkylator
Resultat:	Anslås senast 29 augusti på kurshemsidan
Granskning:	Efter överenskommelse med ansvarig lärare via epost
Poängbedömning:	Varje uppgift kan ge fem poäng, d.v.s. max 25 poäng på tentamen. Halva poäng kan delas ut. För att få poäng på en uppgift måste lösningen vara läslig och uppställda ekvationer klart motiverade. Vidare skall entydiga beteckningar användas och tydliga figurer ritas.
Betygsgränser:	-9,5p = underkänt 10-14.5p = betyg 3 15-19.5p = betyg 4 20p- = betyg 5

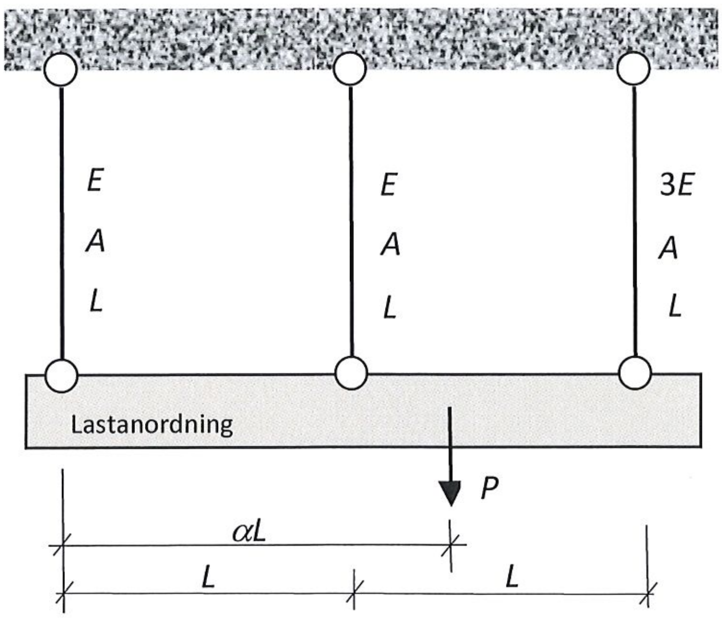
Uppgift 1

I en skiva i xy-planet med plant spänningstillstånd är $\sigma_x = 3\sigma_0$ och $\sigma_y = \sigma_0$. Man belastar också skivan med en skjuvspänning $\tau_{xy} = \alpha\sigma_0$. Både α och σ_0 är positiva. Bestäm α så att en den maximala skjuvspänningen i skivans plan blir $2\sigma_0$. (4p)

Rita (med tydlig och välgjord frihandsritning) Mohrs spänningscirkel för det spänningstillståndet. (1p)

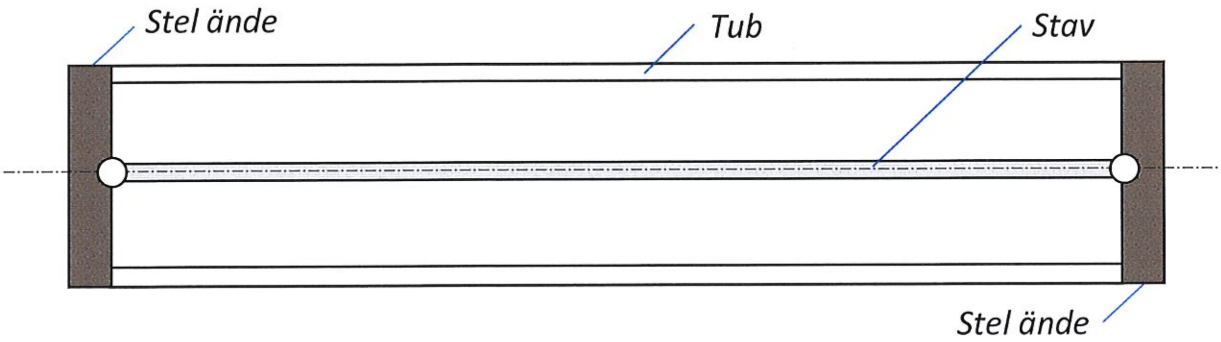
Uppgift 2

En (approximativt viktlös och stel) lastanordning hänger i tre stänger och bär lasten P på det sätt figuren visar. De tre stängerna är gjorda av olika material (olika elasticitetsmodul E) men har lika tvärsnittsareor (se figur). Bestäm den lastposition αL ($0<\alpha<2$) som gör att den till absolutbelopp största spänningen i de tre stängerna blir så liten som möjligt. (5p)



Uppgift 3

Inuti en cirkulär tub med (approximativt) stela ändar har man fäst en rund stav (balk, se figur). I rumstemperatur är tub och balk spänningsfria. Man kan höja temperaturen i tuben och staven lika mycket (ΔT) och får därmed dragkraft i staven eftersom dess längdutvidgningskoefficient är lägre än tubens. Bestäm det ΔT som gör att staven går av ifall dess brottgräns är σ_{brott} och det får här förutsättas att materialet beter sig linjärt elastiskt ända till brott. (5p)



Data för tuben: Längd – L, Elasticitetsmodul – E, Tvärsnittsarea – $10A$, Längdutvidgningskoefficient - 2α

Data för staven: Längd – L, Elasticitetsmodul – E, Tvärsnittsarea – A, Längdutvidgningskoefficient - α

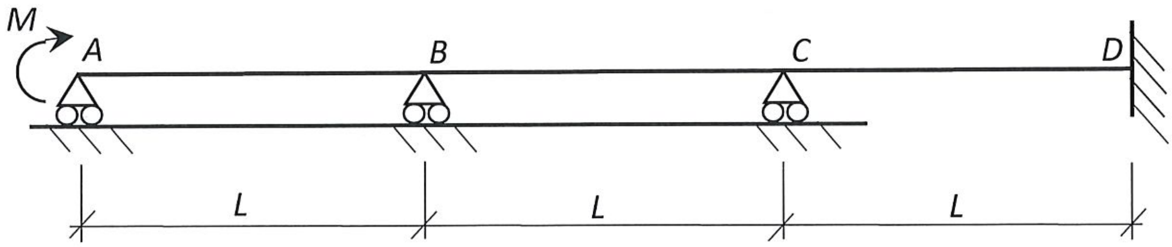
Uppgift 4

I ett försök att bestämma ett isotropt materials elasticitetsmodul (E) och tvärkontraktionstal (Poissons tal) ν, tillverkas en mycket tunnväggig cylindrisk behållare (tryckkärl med radie R och godstjocklek t) och dess längs- och omkretstöjningar (ε_x och ε_ϕ) mättes då behållaren hade trycksatts med ett övertryck p. Beräkna E och ν! Data: R=0,25m, t=1mm, p=0,10MPa, ε_x=0,0001 och ε_ϕ=0,0004. (5p)

Uppgift 5

En balk med totala längden $3L$ ligger på fyra stöd av olika typ (enligt figur). Den belastas i ena änden av ett punktmoment M. Bestäm balkens lutning över stödet C. Balkens böjstyvhet är EI. (5p)

Tips: Använd elementarfallslösningar.

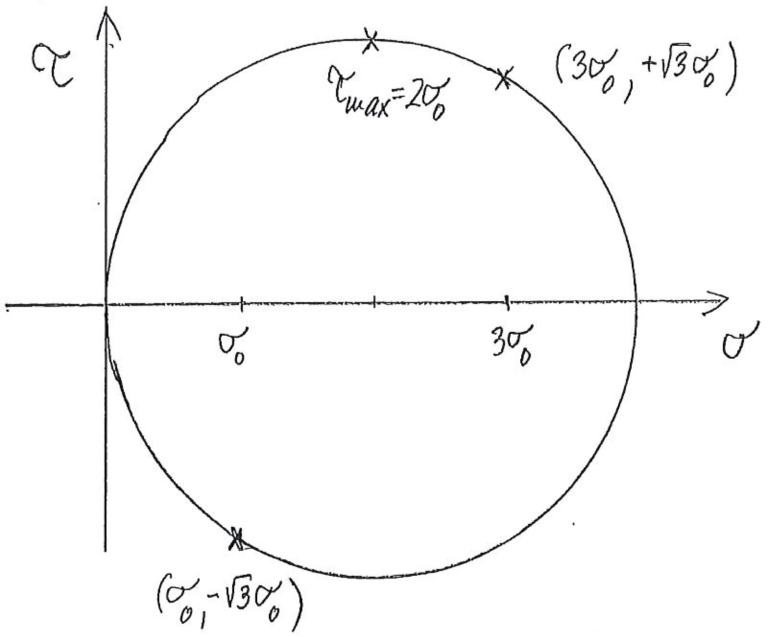


1. Maximal skjuvspänning är radien i Mohrs spänningscirkel
Se (9-83) och Figur 109.

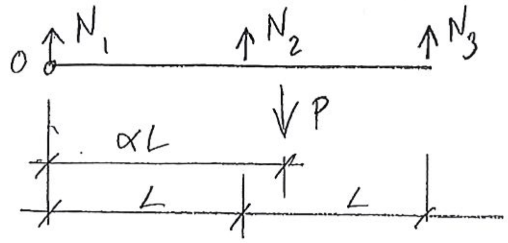
$$\tau_{max}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 = \{\text{här}\} = \sigma_0^2 + \alpha^2 \sigma_0^2 = (1+\alpha^2)\sigma_0^2$$

Sätt $\tau_{max} = 2\sigma_0$ som medför $1+\alpha^2 = 4 \Rightarrow \underline{\alpha = \sqrt{3}}$

Mohrs spänningscirkel:



2. Frilägg stela lastanordningen



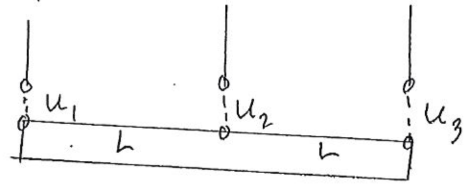
Jämvikt:

$\uparrow \quad N_1 + N_2 + N_3 - P = 0 \quad (1)$

$\overset{\curvearrowright}{O} \quad \alpha L P - N_2 L - 2N_3 L = 0$

dvs $\alpha P - N_2 - 2N_3 = 0 \quad (2)$

Kompatibilitet



Det inses att:

$u_2 = \frac{1}{2}(u_1 + u_3) \quad (3)$

Konstitutiva samband

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A} = E\varepsilon_1 = E\frac{u_1}{L} \Rightarrow N_1 = \frac{EA}{L}u_1 \quad (4)$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A} = \frac{Eu_2}{L} = \{\text{med } (3)\} = \frac{E}{2L}(u_1 + u_3) \Rightarrow N_2 = \frac{EA}{2L}(u_1 + u_3) \quad (5)$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A} = \frac{3Eu_3}{L} \Rightarrow N_3 = \frac{3EA}{L}u_3 \quad (6)$$

Eftersom alla stänger har samma tvärsnittsarea söks den lösning då den (till absolutbelopp) största normalkraften blir så liten som möjligt. Ekv (4,5,6) i (1):

$$\frac{EA}{2L}(2u_1 + u_1 + u_3 + 6u_3) - P = 0 \Rightarrow 3u_1 + 7u_3 = \frac{2PL}{EA}$$

Ekv (5,6) i (2):

$$\alpha P - \frac{EA}{2L}(u_1 + u_3 + 12u_3) = 0 \Rightarrow u_1 + 13u_3 = \frac{2\alpha PL}{EA}$$

eller

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 13 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ \alpha \end{Bmatrix}\frac{2PL}{EA} \Rightarrow \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{44}\begin{bmatrix} 17 & -7 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ \alpha \end{Bmatrix}\frac{2PL}{EA}$$

$$= \begin{Bmatrix} 17 - 7\alpha \\ -1 + 3\alpha \end{Bmatrix}\frac{PL}{22EA}$$

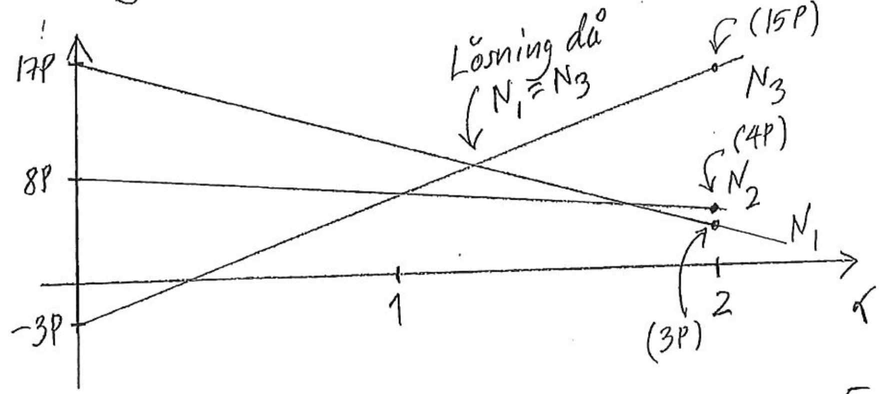
och således (se ekv (3)):

$$u_2 = (8-2\alpha)\frac{PL}{22EA}$$

Dvs med ekv (4,5,6)

$$N_1 = (17-7\alpha)P \qquad N_2 = (8-2\alpha)P \qquad N_3 = (-3+9\alpha)P$$

Åskådliggör med grafik N_i som funktioner av α



Sätt $N_1 = N_3$: $17-7\alpha = -3+9\alpha \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = \frac{5}{4}}}$

Alla andra α ger att N_1 eller N_3 är större

3. Jämvikt (för en ände) ger ~~att~~ normalkraft i stav N_S och i tub N_T förhåller sig som

$$N_T = -N_S \quad (1)$$

Kompatibilitet kräver att totaltöjningen i staven ε_S är samma som i tuben ε_T. Se ekv (5-3)

Staven: $\varepsilon_S = \dfrac{\sigma_S}{E} + \alpha \Delta T = \dfrac{N_S}{EA} + \alpha \Delta T$

Tuben: $\varepsilon_T = \dfrac{\sigma_T}{E} + 2\alpha \Delta T = \dfrac{N_T}{10EA} + 2\alpha \Delta T$

Sätt $\varepsilon_S = \varepsilon_T$ så fås:

$$\frac{N_S}{EA} + \alpha \Delta T = \frac{N_T}{10EA} + 2\alpha \Delta T \quad (2)$$

Ekv (1) & (2) ger

$$\frac{N_S}{EA} = -\frac{N_S}{10EA} + \alpha \Delta T \Rightarrow N_S = \frac{10}{11} EA \alpha \Delta T$$

Sätt spänningen i staven till σ_{brott}:

$$\sigma_{brott} = \frac{N_S}{A} = \frac{10}{11} E \alpha \Delta T \Rightarrow \underline{\underline{\Delta T = \frac{11}{10} \frac{\sigma_{brott}}{E\alpha}}}$$

4. Tryckkärlsformler (9-97 och 9-101)

Omkrets: $\sigma_\varphi = \frac{pR}{t}$ (1) Längs: $\sigma_x = \frac{pR}{2t}$ (2)

I plant spänningstillstånd råder (10-25, 10-26)

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{E}(\sigma_\varphi - \nu\sigma_x) = \{\text{med (1) och (2)}\} = \frac{pR}{Et}\left(1-\frac{\nu}{2}\right) \quad (3)$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_\varphi) = \frac{pR}{Et}\left(\frac{1}{2}-\nu\right) \quad (4)$$

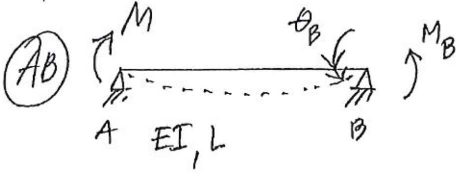
Multiplicera ekv (3) med -2 och addera sedan (3) och (4) för att eliminera ν. Dvs

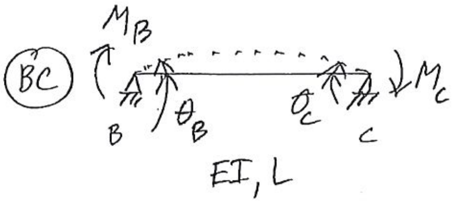
$$\varepsilon_x - 2\varepsilon_\varphi = \frac{pR}{Et}\left(\frac{1}{2}-2\right) \Rightarrow \underline{\underline{E}} = \frac{3pR}{2t(2\varepsilon_\varphi - \varepsilon_x)} = \underline{\underline{53{,}57\,\text{MPa}}}$$

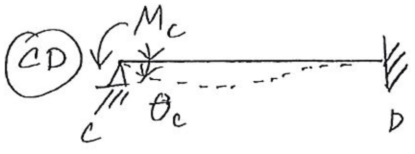
Ekv (4) ger då:

$$\underline{\underline{\nu}} = \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon_x E t}{pR} = \underline{\underline{0{,}2857}}$$

5 Elementarfall där jämvikt (balkarnas snittmoment är lika över momentfria stöd) och kompatibilitet för vinklarna över stöd använts







Formelsamling (6.3 Fri uppläggning) ger:

AB: $$\theta_B = \frac{ML}{6EI} + \frac{M_B L}{3EI} \quad (1)$$

BC: $$\theta_B = -\frac{M_B L}{3EI} + \frac{M_C L}{6EI} \quad (2)$$

$$\theta_C = -\frac{M_B L}{6EI} + \frac{M_C L}{3EI} \quad (3)$$

CD: (6.5 Fast inspänning på ena sidan)

$$\theta_C = -\frac{M_C L}{4EI} \quad (4)$$

(1) & (2) ger: $M + 2M_B = -2M_B + M_C$ (5)

(3) & (4) ger: $-2M_B + 4M_C = -3M_C$ (6)

eller

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_B \\ M_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} M_B \\ M_C \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} M \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{M}{26} \begin{Bmatrix} -7 \\ -2 \end{Bmatrix}$$

Ekv (4) ger nu: $\theta_C = \dfrac{ML}{52EI}$