

TENTAMEN

HÅLLFASTHETSLÄRA OCH MASKINELEMENT

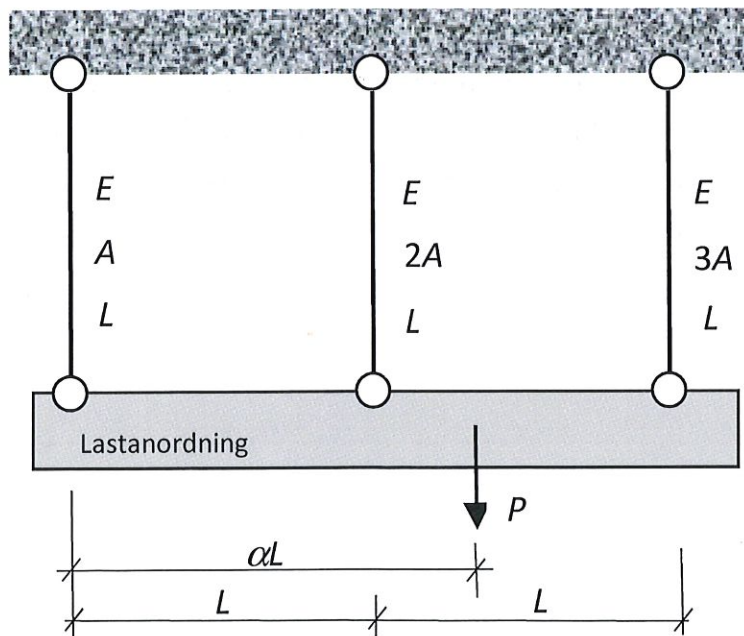
Tid:	30 maj 2018, 08:30-12:30
Ansvarig lärare:	Thomas Abrahamsson, tel 1506
Hjälpmedel:	- Grundläggande hållfasthetslära; Hans Lundh - Formelsamling i hållfasthetslära; Ekh, Hansbo och Brouzoulis - Valfri typgodkänd kalkylator
Resultat:	Anslås senast 31 maj på kurshemsidan
Granskning:	Efter överenskommelse med ansvarig lärare via epost
Poängbedömning:	Varje uppgift kan ge fem poäng, d.v.s. max 25 poäng på tentamen. Halva poäng kan delas ut. För att få poäng på en uppgift måste lösningen vara läslig och uppställda ekvationer klart motiverade. Vidare skall entydiga beteckningar användas och tydliga figurer ritas.
Betygsgränser:	-9,5p = underkänt 10-14.5p = betyg 3 15-19.5p = betyg 4 20p- = betyg 5

Uppgift 1

I en skiva i xy -planet med plant spänningstillstånd är $\sigma_x = 3\sigma_0$ och $\sigma_y = \sigma_0$. Man belastar också skivan med en skjuvspänning $\tau_{xy} = \alpha\sigma_0$. Både α och σ_0 är positiva. Bestäm α så att en huvudspänning i skivans plan blir noll. (4p). Rita (med tydlig och välgjord frihandsritning) Mohrs spänningscirkel för det spänningstillståndet. (1p)

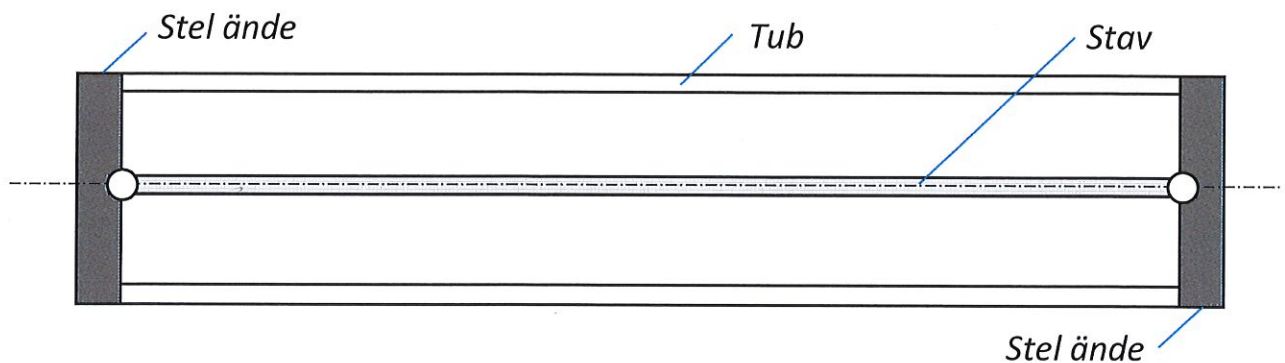
Uppgift 2

En (approximativt viktlös och stel) lastanordning hänger i tre stänger och bär lasten P på det sätt figuren visar. De tre stängerna är gjorda av samma material (samma elasticitetsmodul E) men har olika tvärsnittsareor (se figur). Bestäm den lastposition αL som gör att den uppkomna spänningen är lika i alla tre stängerna. (5p)



Uppgift 3

Inuti en cirkulär tub med (approximativt) stela ändar har man fäst en rund stav (balk) med ledad infästning i dessa ändar (se figur). I rumstemperatur är tub och balk spänningsfria. Man kan sänka temperaturen i tuben (ΔT) från rumstemperatur utan att påverka temperaturen i staven och får därmed kompressionskraft i staven. Bestäm det ΔT som gör att staven knäcker. (5p)



Data för tuben: Längd – L , Elasticitetsmodul – E , Tvärsnittsarea – A_T , Längdutvidgningskoefficient – α

Data för staven: Längd – L , Elasticitetsmodul – E , Tvärsnittsarea – A_S , Yttröghetsmoment – I

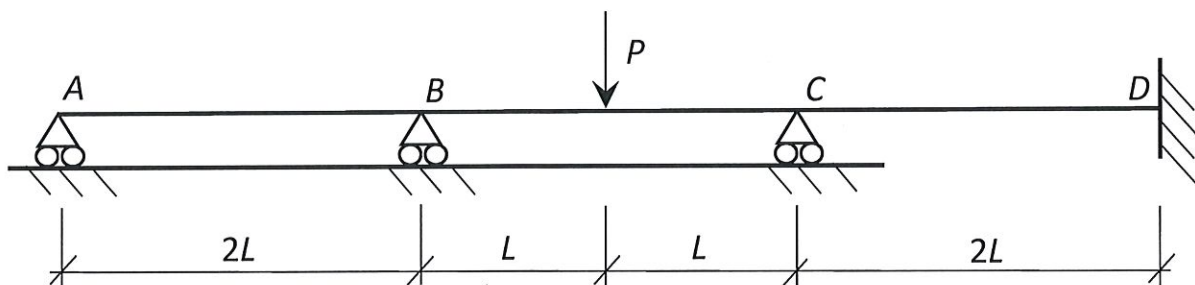
Uppgift 4

I ett försök att bestämma ett isotropt materials tvärkontraktionstal (Poissons tal) ν , tillverkas en tunnväggig cylindrisk behållare (tryckkärl) och dess längs- och omkretstöjningar mättes (ϵ_x och ϵ_ϕ) då behållaren hade trycksatts. Relationen mellan dessa töjningar blev $\epsilon_x / \epsilon_\phi = 1/4$. Bestäm materialets tvärkontraktionstal. (5p)

Uppgift 5

En balk med totala längden $6L$ ligger på fyra stöd av olika typ (enligt figur). Den belastas på mitten av en punktlast P . Bestäm nedböjningen vid lastangreppspunkten. Balkens böjstyvhets är EI . (5p)

Tips: Använd elementarfallslösningar och ansätt att vinklarna över de två mellersta stöden är problemets två frihetsgrader.



Uppgift 1

I en skiva i xy -planet med plant spänningstillstånd är $\sigma_x = 3\sigma_0$ och $\sigma_y = \sigma_0$. Man belastar också skivan med en skjuvspänning $\tau_{xy} = \alpha\sigma_0$. Både α och σ_0 är positiva. Bestäm α så att en huvudspänning i skivans plan blir noll. (4p). Rita (med tydlig och välgjord frihandsritning) Mohrs spänningscirkel för det spänningstillståndet. (1p)

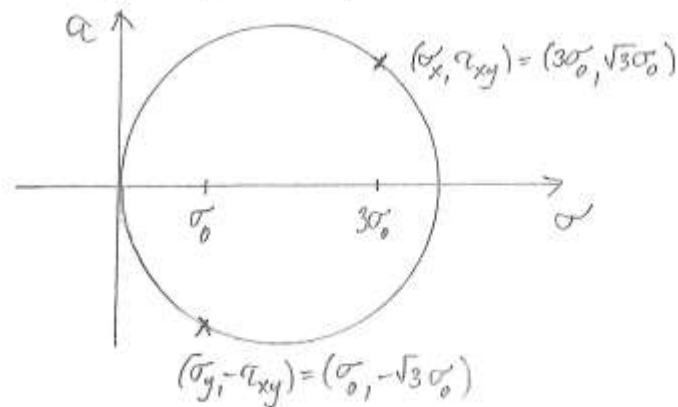
LB Ekv (9-84) ger

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \{ \text{Här} \} = 2\sigma_0 \pm \sqrt{\sigma_0^2 + \alpha^2 \sigma_0^2}$$

Minsta huvudspänningen σ_2 är noll då

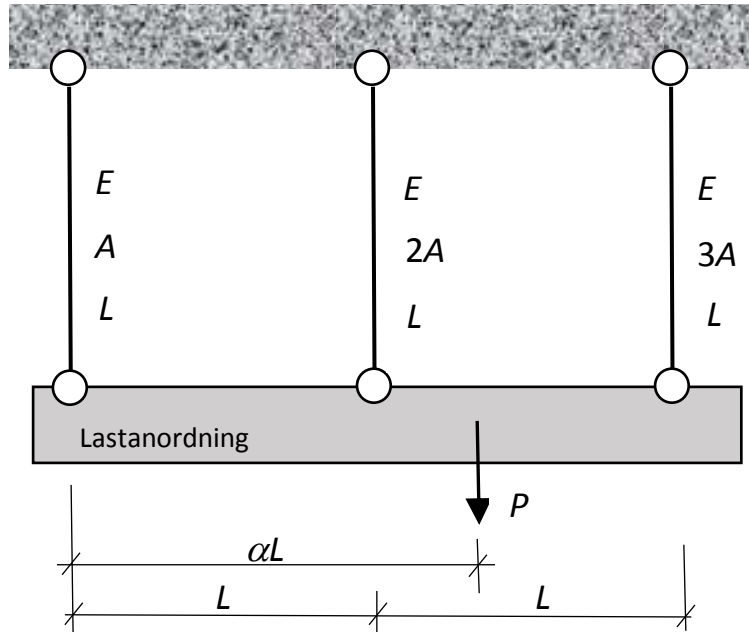
$$2\sigma_0 - \sigma_0 \sqrt{1 + \alpha^2} = 0 \quad \text{dvs då} \quad \sqrt{1 + \alpha^2} = 2 \Rightarrow \alpha = \sqrt{3}$$

Mohrs spänningscirkel för fallet då $\alpha = \sqrt{3}$

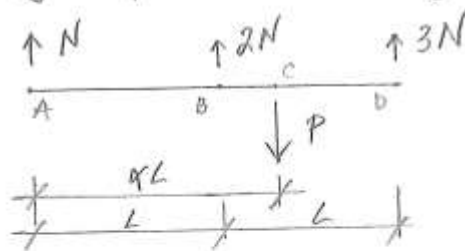


Uppgift 2

En (approximativt viktlos och stel) lastanordning hänger i tre stänger och bär lasten P på det sätt figuren visar. De tre stängerna är gjorda av samma material (samma elasticitetsmodul E) men har olika tvärsnittsareor (se figur). Bestäm den lastposition αL som gör att den uppkomna spänningen är lika i alla tre stängerna. (5p)



Eftersom alla tre stänger har samma E och L inses att spänningen är lika i stängerna ifall töjningen är lika (Hookes lag), dvs längdändringen lika. Eftersom tvärsnittsytorna förhåller sig som 1/2/3 blir då de uppkomna normalkrafterna i stängerna i samma proportioner. Säg att vänstra stängens normalkraft är N . Då uppstår följande frikroppsdiagram för lastanordningen:



Jämviktsekvationer ger

$$\uparrow N + 2N + 3N - P = 0 \Rightarrow N = \frac{P}{6}$$

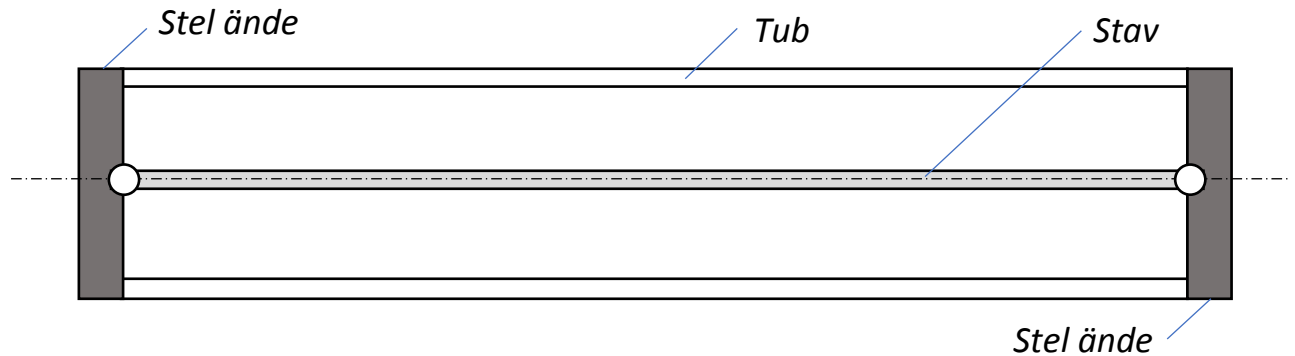
$$\curvearrowright P \cdot \alpha L - 2N \cdot L - 3N \cdot 2L = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{8N}{P} = \frac{8}{P} \cdot \frac{P}{6} = \frac{4}{3}$$

$$\therefore \alpha L = \frac{4}{3} L$$

Uppgift 3

Inuti en cirkulär tub med (approximativt) stela ändar har man fäst en rund stav (balk) med ledad infästning i dessa ändar (se figur). I rumstemperatur är tub och balk spänningsfria. Man kan sänka temperaturen i tuben (ΔT) från rumstemperatur utan att påverka temperaturen i staven och får därmed kompressionskraft i staven. Bestäm det ΔT som gör att staven knäcker. (5p)



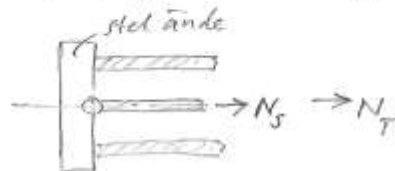
Data för tuben: Längd – L , Elasticitetsmodul – E , Tvärsnittsarea – A_T , Längdutvidgningskoefficient – α

Data för staven: Längd – L , Elasticitetsmodul – E , Tvärsnittsarea – A_S , Yttröghetsmoment – I

Tubens och stavens totala töjningar (ε_T och ε_S) är lika

$$\varepsilon_T = \varepsilon_{mek,T} + \alpha \Delta T, \quad \varepsilon_S = \varepsilon_{mek,S} \quad \therefore \varepsilon_{mek,T} + \alpha \Delta T = \varepsilon_{mek,S} \quad (1)$$

Jämvikt för stel ände ger normalkrafterna i tub och stav (N_T och N_S)



$$\rightarrow N_T + N_S = 0 \Rightarrow N_T = -N_S \quad (2)$$

Mekanisk töjning

$$\varepsilon_{mek,T} = \{ \text{Hookes lag} \} = \frac{\sigma_T}{E} = \frac{N_T}{EA_T} = \{ \text{ekv (2)} \} = -\frac{N_S}{EA_T} \quad (3)$$

$$\varepsilon_{mek,S} = \{ \text{På samma sätt} \} = \frac{N_S}{EA_S} \quad (4)$$

(1), (2) & (4) ger

$$-\frac{N_S}{EA_T} + \alpha \Delta T = \frac{N_S}{EA_S} \Rightarrow N_S = \frac{A_S A_T}{A_S + A_T} E \alpha \Delta T$$

Da ΔT är negativ uppstår tryck (negativ N_S) som kan knäcka staven (Eulers andra knäckfall, LB (8-27))

$$P_{kr} = \pi^2 \frac{EI}{L^2}$$

Sätt $P_{kr} = -N_S$ och få

$$\pi^2 \frac{EI}{L^2} = -\frac{A_S A_T}{A_S + A_T} E \alpha \Delta T \Rightarrow \Delta T = -\pi^2 \frac{A_S + A_T}{A_S A_T} \cdot \frac{I}{\alpha L^2}$$

Uppgift 4

I ett försök att bestämma ett isotropt materials tvärkontraktionstal (Poissons tal) ν , tillverkas en tunnväggig cylindrisk behållare (tryckkärl) och dess längs- och omkretstöjningar mäts (ε_x och ε_ϕ) då behållaren hade trycksatts. Relationen mellan dessa töjningar blev $\varepsilon_x / \varepsilon_\phi = 1/4$. Bestäm materialets tvärkontraktionstal. (5p)

Tryck-kärl, LS elev (9-97) och (9-101)

$$\sigma_x = \frac{pa}{2h}, \quad \sigma_\phi = \frac{pa}{h} \quad (a = \text{kärlens radie, } h = \text{dess godsfjocklek})$$

Hook's lag, LB elev (10-7) och (10-8) med $\sigma_y = \sigma_z = 0$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_\phi) = \frac{pa}{hE} \left(\frac{1}{2} - \nu \right)$$

$$\varepsilon_\phi = \frac{1}{E} (\sigma_\phi - \nu \sigma_x) = \frac{pa}{hE} \left(1 - \frac{\nu}{2} \right)$$

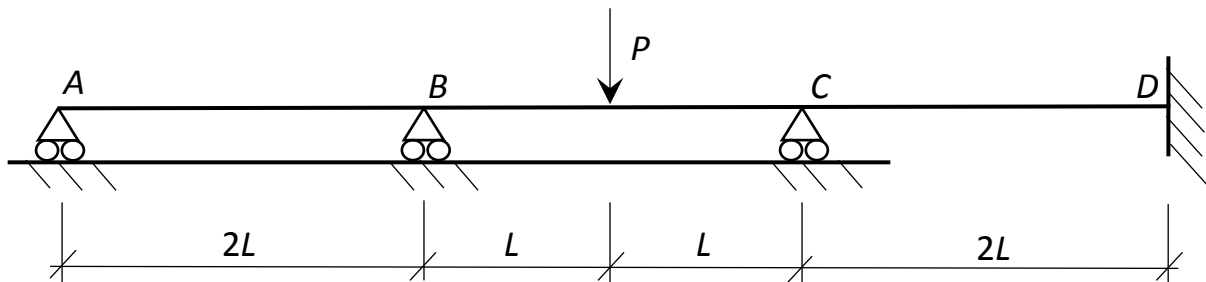
Bilda kvoten $\varepsilon_x / \varepsilon_\phi$ och sätt den till $1/4$

$$\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_\phi} = \frac{1/2 - \nu}{1 - \nu/2} = \frac{1 - 2\nu}{2 - \nu} = \frac{1}{4} \Rightarrow \underline{\underline{\nu = 2/7}}$$

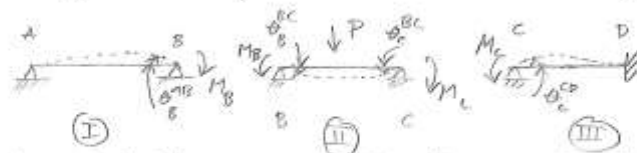
Uppgift 5

En balk med totala längden $6L$ ligger på fyra stöd av olika typ (enligt figur). Den belastas på mitten av en punktlast P . Bestäm nedböjningen vid lastangreppspunkten. Balkens böjstyvhets är EI . (5p)

Tips: Använd elementarfallslösningar och ansätt att vinklarna över de två mellersta stöden är problemets två frihetsgrader.



Delar upp i elementarfall och använder formelsamling (FS)



Kompatibilitets samband: $\theta_B^{AB} = \theta_B^{BC}$ (1) $\theta_C^{BC} = \theta_C^{CD}$ (2)

① $\theta_B^{AB} = \frac{M_B L}{6EI}$ (3)

② $\theta_B^{BC} = -\frac{M_B L}{3EI} + \frac{PL^2}{16EI} - \frac{M_C L}{6EI}$ (4)

$\theta_C^{BC} = -\frac{M_B L}{6EI} + \frac{PL^2}{16EI} - \frac{M_C L}{3EI}$ (5)

③ $\theta_C^{CD} = \frac{M_C L}{4EI}$ (6)

Ekv (1), (3) & (4) ger

$$\frac{M_B L}{6EI} = -\frac{M_B L}{3EI} + \frac{PL^2}{16EI} - \frac{M_C L}{6EI} \Rightarrow 24M_B + 8M_C = 3PL$$

Ekv (2), (5) & (6) ger

$$\frac{M_C L}{4EI} = -\frac{M_B L}{6EI} + \frac{PL^2}{16EI} - \frac{M_C L}{3EI} \Rightarrow 8M_B + 28M_C = 3PL$$

Pa' matrisform: $\begin{bmatrix} 24 & 8 \\ 8 & 28 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_B \\ M_C \end{Bmatrix} = 3PL \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} M_B \\ M_C \end{Bmatrix} = 3PL \begin{bmatrix} 24 & 8 \\ 8 & 28 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = PL \begin{Bmatrix} 15/152 \\ 3/38 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

Nedböjningen under lasten P förs nu som (FS s.9)

$$P_1 = -\frac{M_B L^2}{16EI} + \frac{PL^3}{48EI} - \frac{M_C L^2}{16EI} = \sum \text{mod (7)} = -\frac{15PL^3}{152 \cdot 16EI} + \frac{PL^3}{48EI} - \frac{3PL^3}{38 \cdot 16EI} = \frac{71PL^3}{7296EI} \approx 0,009731 \frac{PL^3}{EI}$$