

# TENTAMEN

## HÅLLFASTHETSLÄRA OCH MASKINELEMENT – TME061

|                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Tid</b>             | 08.30–12.30                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
| <b>Ansvarig lärare</b> | Jim Brouzoulis. Tel 772 2253                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| <b>Hjälpmedel</b>      | <ul style="list-style-type: none"><li>– Formelsamling i hållfasthetslära, Tillämpad mekanik, Ekh, Hansbo och Brouzoulis (utan marginalanteckningar)</li><li>– Valfri typgodkänd kalkylator</li></ul>                                                                                                                                |
| <b>Resultat</b>        | Anslås senast 23-10-2017 på kurshemsidan                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
| <b>Granskning</b>      | <p>Avdelningen för Material och Beräkningsmekanik:</p> <ul style="list-style-type: none"><li>• 23-10-2017, kl. 12.30–13.00</li><li>• 24-10-2017, kl. 12.30–13.00.</li></ul>                                                                                                                                                         |
| <b>Poängbedömning</b>  | Varje uppgift kan ge fem poäng, d.v.s. max 25 poäng på tentamen och halva poäng delas ut. För att få poäng på en uppgift måste lösningen vara läslig och uppställda ekvationer klart motiverade. Vidare skall entydiga beteckningar användas och tydliga figurer ritas. Tänk på att kontrollera dimensioner och rimlighet i svaren. |
| <b>Betygsgränser</b>   | 0 - 9.5p = underkänt<br>10 - 14.5p = betyg 3<br>15 - 19.5p = betyg 4<br>20p – 25p = betyg 5                                                                                                                                                                                                                                         |

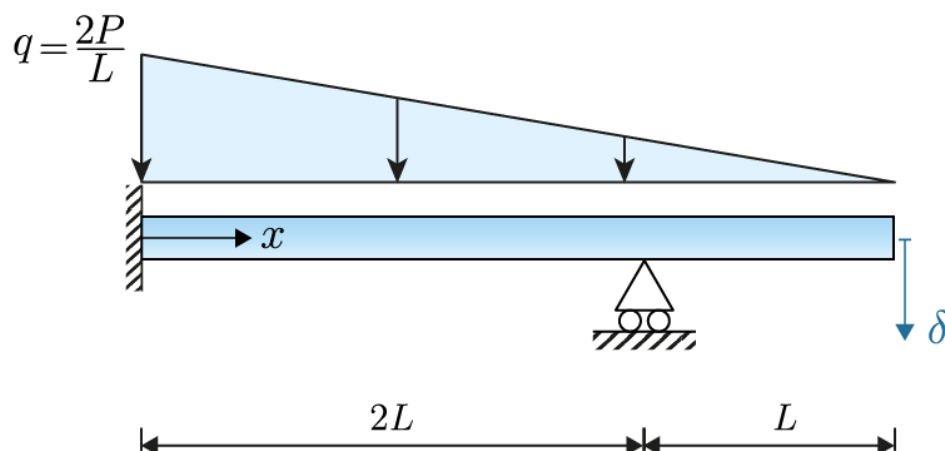
## UPPGIFT 1

En konsolbalk vilandes på ett stöd belastas av en triangellast enligt figuren nedan. Beräkna utböjningen  $\delta$  i balkens fria ände. **(5.0p)**

Ledning: Ersätt rullstödet med en obekant yttre punktlast (statiskt övertalig last) och använd elementarfall.

Givet:

- Balkens materialbeteende kan beskrivas av Hookes lag med elasticitetsmodulen  $E$ .

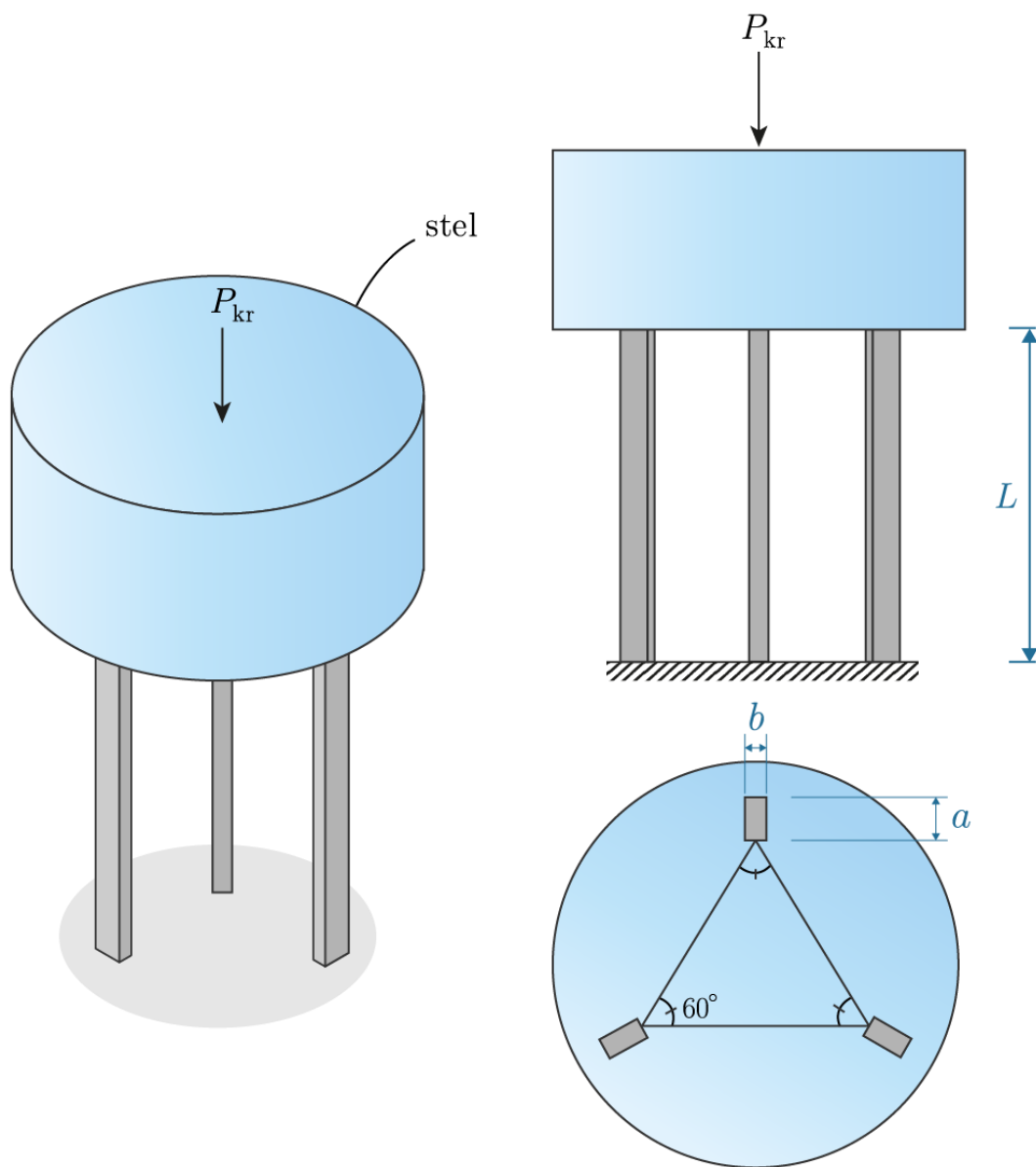


## UPPGIFT 2

Ett cylindriskt vattentorn bärs upp av tre identiska pelare med rektangulära tvärsnitt. Bestäm den kritiska last  $P_{kr}$  som vattentornet kan bära innan det blir instabilt **(5.0p)**.

Notera att den cylindriska behållaren antas vara stel.

Ledning: Studera olika knäckningsmoder för strukturen.



## UPPGIFT 3

Utifrån Euler-Bernoullis antaganden för balkteori, härled relationen mellan utböjning  $w$  och böjmoment  $M$ , dvs härled formeln  $M = -EIw''$  **(5.0p)**.

Givet:

- Balkens materialbeteende kan beskrivas av Hookes lag med elasticitetsmodulen  $E$ .

## UPPGIFT 4

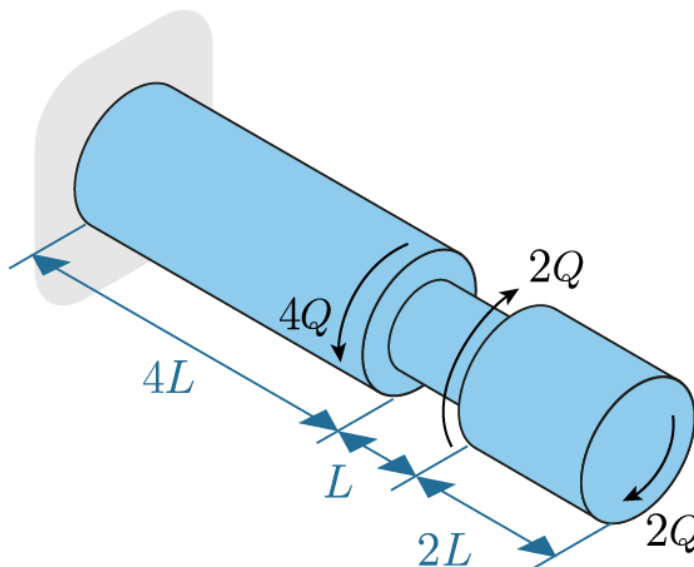
Ett system av axlar består av tre massiva delar som belastas av tre vridmoment enligt figuren. Systemet är fast inspänt till vänster och är fritt till höger i figuren.

För systemet:

- Beräkna och rita diagram över vridmomentets,  $M_V$ , variation längs systemet **(3.0p)**
- Beräkna maximal skjuvspänning som uppkommer i systemet **(2.0p)**

Givet:

- Det två yttersta delarna har ytterradien  $2a$  och delen med längd  $L$ , har ytterradien  $a$ .



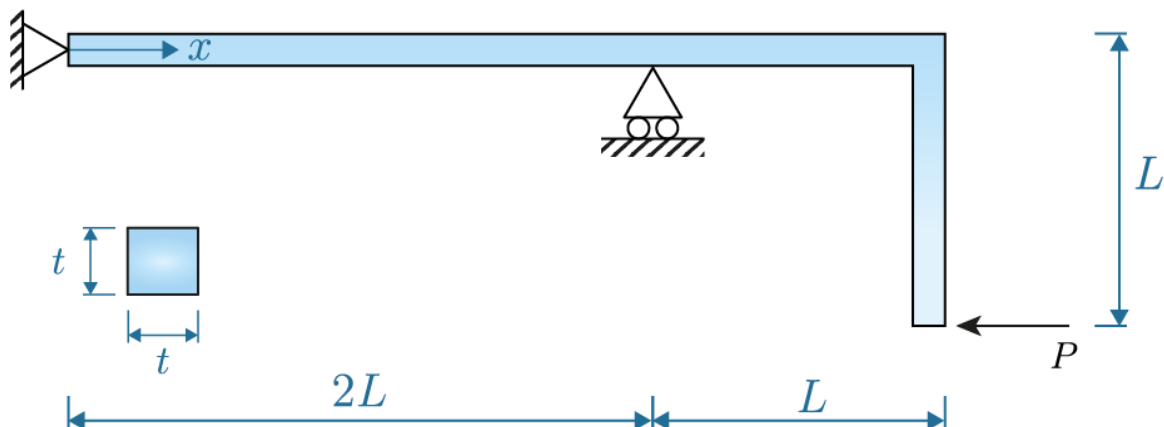
## UPPGIFT 5

För balken nedan:

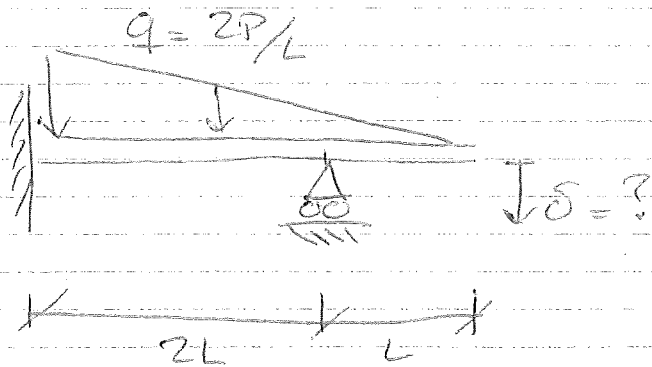
- Beräkna och rita normalkraft-, tvärkraft- och momentdiagram för balken. **(3.0p)**
- Beräkna till beloppet maximal normalspänning  $\sigma_x$  som uppkommer i balken. **(2.0p)**

Givet:

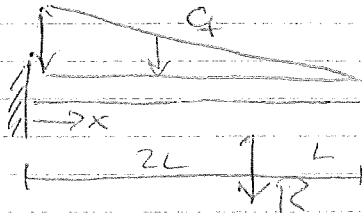
- Balken har ett kvadratisk tvärsnitt med sidlängd  $t$ .



①



Ersätt störet med en statiskt övertalig last  $\Rightarrow$



Nedböjningen vid  $x=2L$  måste vara noll (värt def. samb.)

$$\delta_q^{(2L)} + \delta_R^{(2L)} = 0$$

El. fall 6.4 ger

$$\delta_q = q \frac{a^2 L^2}{120EI} \left( 10 - \frac{10a}{L} + \frac{5a^2}{L^2} - \frac{a^3}{L^3} \right) + R \frac{a^3}{3EI} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=2L \\ L=3L \end{cases} \Rightarrow q \frac{(2L)^2 (3L)^2}{120EI} \left( 10 - \frac{10 \cdot 2L}{3L} + \frac{5(2L)^2}{(3L)^2} - \frac{(2L)^3}{(3L)^3} \right)$$

$$+ R \frac{(2L)^3}{3EI} = \frac{71}{45} \frac{qL^4}{EI} + R \frac{8L^3}{3EI} = 0 \Leftrightarrow$$

$$R = -\frac{71}{120} qL = -\frac{71}{60} P$$

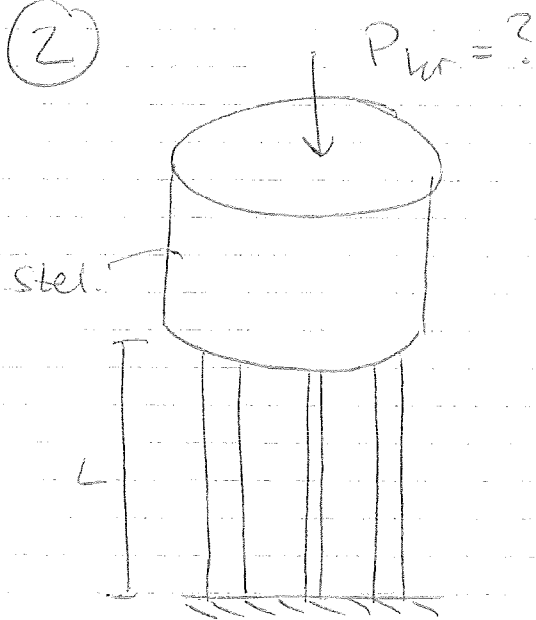
Räkna nu ut nedböjningen  $\delta$  pga  $q$  och  $R$ :

$$\delta = \left\{ \text{El. fall 4} \right\} = \frac{qL^4}{30EI} + R \frac{a^2 L}{2EI} \left( 1 - \frac{a}{3L} \right)$$

$$= \frac{2P/L (3L)^4}{30EI} - \frac{71}{60} P \frac{(2L)^2 (3L)}{2EI} \left( 1 - \frac{2L}{3(3L)} \right)$$

$$= \frac{81}{15} \frac{PL^3}{EI} - \frac{497}{90} \frac{PL^3}{EI} = -\frac{11}{90} \frac{PL^3}{EI}$$

(2)



- Strukturen är symmetrisk m.a.p. de tre benen (rotationssymmetrisk för  $60^\circ$ )
- Cyindern är stel vilket innebär att balkarnas position relativt varandra inte kan ändras,

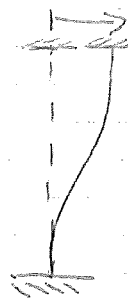
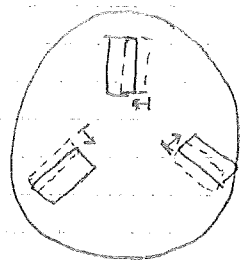
### Möjliga knäckningsfall:

- Balkarna är fast i bägge ändar och knäcker längs sin vecka riktning  $a > b$ .

$$\Rightarrow P_{E4} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2} = \frac{4\pi^2 E \frac{ba^3}{12}}{L^2} = \frac{\pi^2 Eba^3}{3}$$



- Varje balk rör sig tangentiellt med sitt tvärsnitt vilket får cyindern att rotera  $\Rightarrow P_{E5} = \frac{\pi^2 Eba^3}{12}$



$$P_{E5} < P_{E4}$$

### Normalkraftsfördelning

Pga symmetri + stel cylinder  $\Rightarrow N_{kr} = \frac{P_{kr}}{3} \Rightarrow$

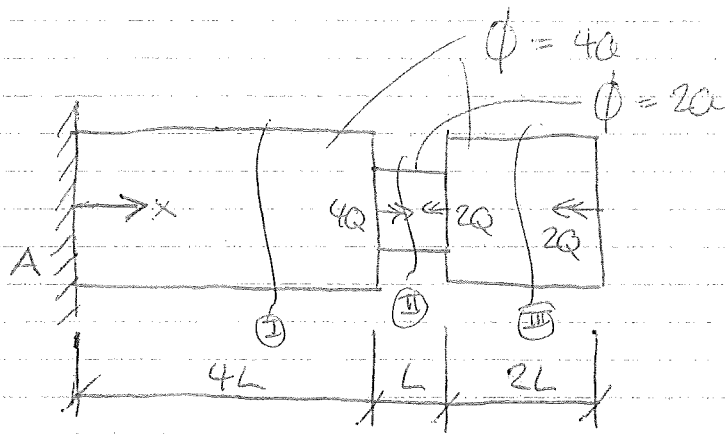
$$P_{kr} = 3 \cdot P_{E5} = 3 \cdot \frac{\pi^2 E \frac{ba^3}{12}}{L^2} = \frac{\pi^2 Eba^3}{4L^2}$$



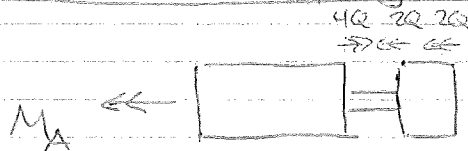
③

Se kursmaterial för härledning

4



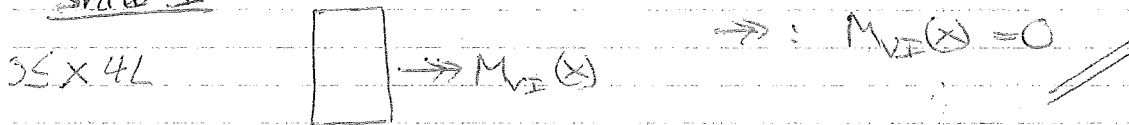
Frilägg och ställ upp jämvikt



$$\leftarrow : M_A = 4Q - 2Q - 2Q = 0 //$$

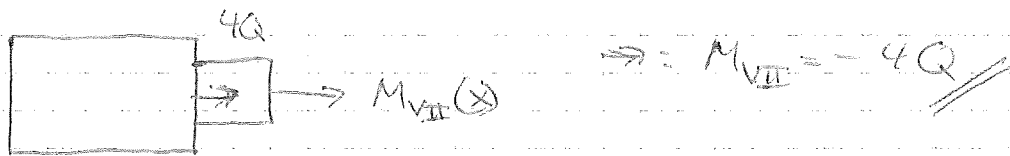
Snitta

Snitt I



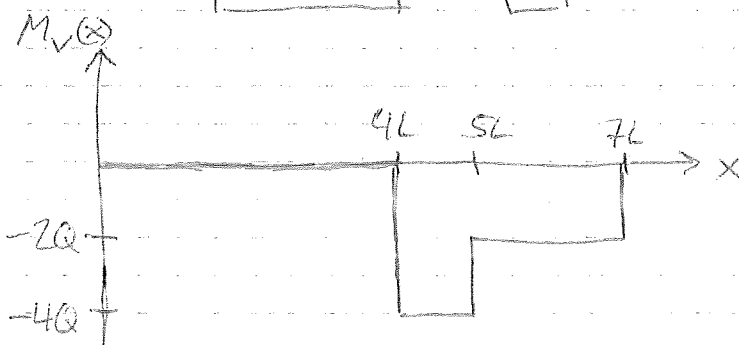
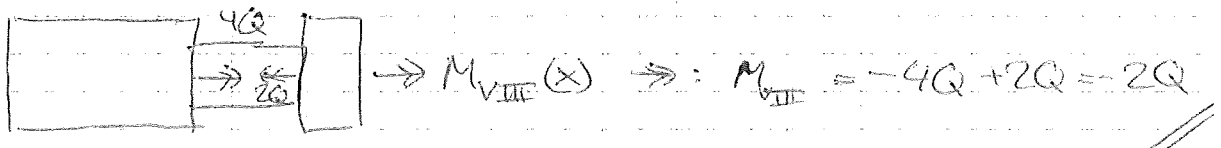
Snitt II

$4L \leq x \leq 5L$



Snitt III

$5L \leq x \leq 7L$



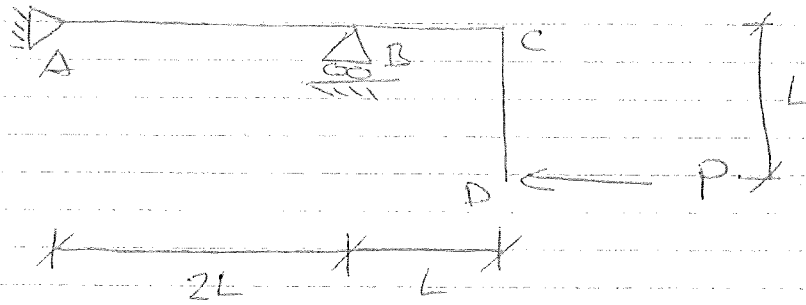
## Spänningar

$$\tau = \frac{M_v(x)}{I_v(x)} \cdot r$$

- Max spänning fås på mantelytan och där kvoten  $M_v / I_v$  är som störst vilket sker för den korta delen

$$\tau_{\max} = \frac{|-4Q|}{I_v} a = \frac{4Qa}{\frac{\pi}{2} a^4} = \frac{8Q}{\pi a^3} //$$

5

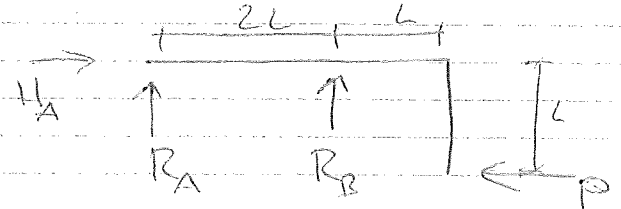


### Reaktionskräfte

$$\rightarrow: H_A = P //$$

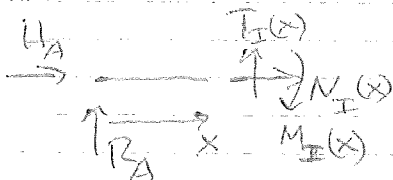
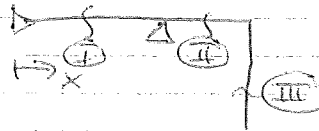
$$\uparrow: R_A + R_B = 0$$

$$\curvearrowleft: R_B \cdot 2L = PL \Leftrightarrow R_B = \frac{P}{2} \Rightarrow R_A = -\frac{P}{2} //$$



### Snittkraftsdiagramm

#### Snitt I $0 \leq x \leq 2L$

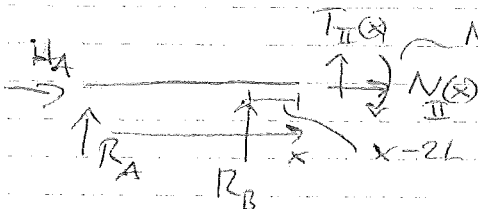


$$\rightarrow: N_I(x) = -P //$$

$$\uparrow: T_I(x) = -R_A = \frac{P}{2} //$$

$$\curvearrowleft: M_I(x) = -R_A x = -\frac{P}{2} x //$$

#### Snitt II $2L \leq x \leq 3L$

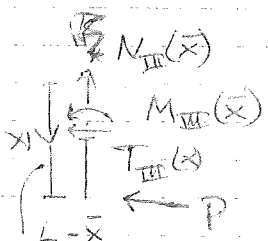


$$\rightarrow: N_{II}(x) = -P //$$

$$\uparrow: T_{II}(x) = -R_A - R_B = 0 //$$

$$\curvearrowleft: M_{II}(x) = -R_A x - R_B (x - 2L) = \frac{P}{2} x - \frac{P}{2} x + PL = PL //$$

#### Snitt III $0 \leq \bar{x} \leq L$

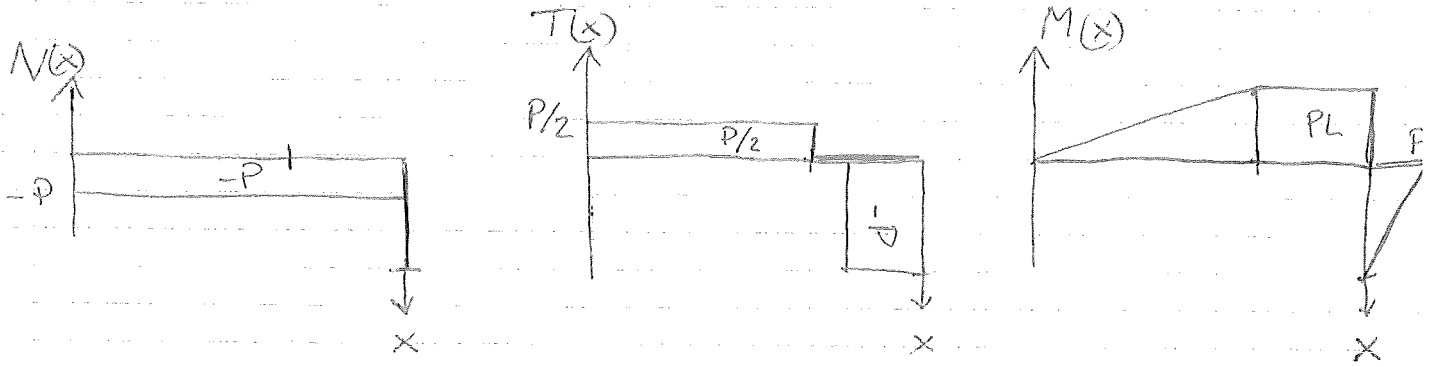


$$\uparrow: N_{III}(\bar{x}) = 0$$

$$\leftarrow: T_{III}(\bar{x}) = -P$$

$$\curvearrowleft: M_{III}(\bar{x}) = P(L - \bar{x})$$

## Diagram



### b) Maximal böjnormalspänning

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{Mz}{I_y}$$

Uppkommer där vi har störst böjmoment och normalkraft  $\Rightarrow$

$$\sigma_{\max} \text{ vid } 2L \leq x \leq 3L \Rightarrow \begin{cases} M = PL \\ N = -P \end{cases}$$

$$A = t^2, \quad I_y = \frac{t \cdot t^3}{12} = \frac{t^4}{12} //$$

$$\Rightarrow \sigma_{\max} = \left| \frac{-P}{A} + \frac{PL}{I_y} \left( \frac{t}{2} \right) \right| = \left| \frac{-P}{t^2} + \frac{PL}{t^4/12} \cdot \frac{t}{2} \right| =$$

$$= \frac{P}{t^2} + \frac{6PL}{t^3} //$$