

TENTAMEN

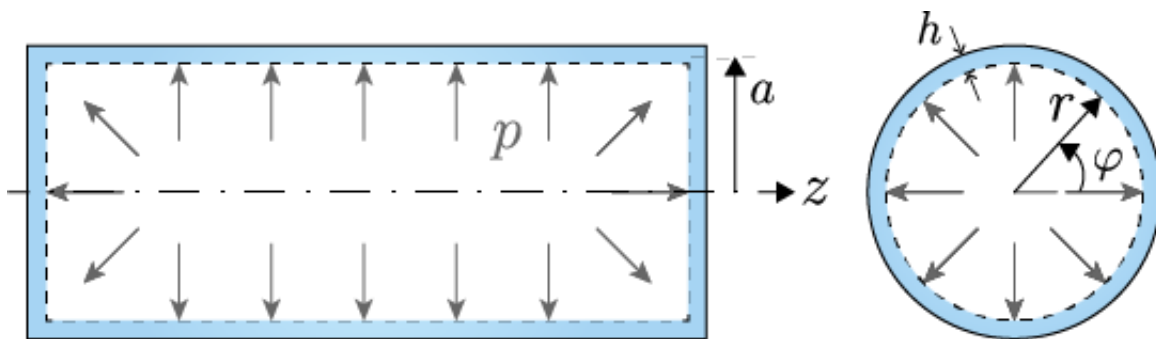
HÅLLFASTHETSLÄRA OCH MASKINELEMENT – TME061

Tid	08.30–12.30
Ansvarig lärare	Jim Brouzoulis. Tel 772 2253
Hjälpmedel	– Formelsamling i hållfasthetslära, Tillämpad mekanik, Ekh, Hansbo och Brouzoulis (utan marginalanteckningar) – Valfri typgodkänd kalkylator
Resultat	Anslås senast 2017-09-04 på kurshemsidan
Granskning	Avdelningen för Material och Beräkningsmekanik: • 2017-09-04, kl. 12.00–12.30 • 2017-09-05, kl. 12.30–13.00.
Poängbedömning	Varje uppgift kan ge fem poäng, d.v.s. max 25 poäng på tentamen och halva poäng delas ut. För att få poäng på en uppgift måste lösningen vara läslig och uppställda ekvationer klart motiverade. Vidare skall entydiga beteckningar användas och tydliga figurer ritas. Tänk på att kontrollera dimensioner och rimlighet i svaren.
Betygsgränser	0 - 9.5p = underkänt 10 - 14.5p = betyg 3 15 - 19.5p = betyg 4 20p – 25p = betyg 5

UPPGIFT 1

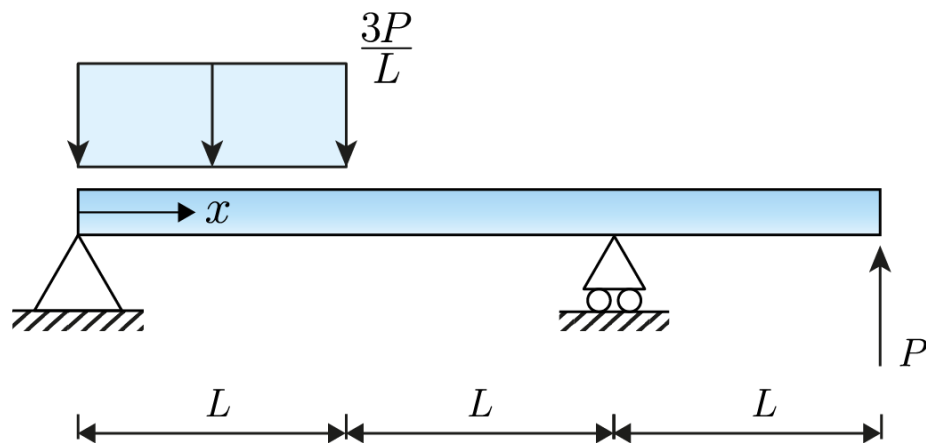
- a) Härled ångpanneformlerna för ett tunnväggigt cylindriskt tryckkärl med övertrycket p . (4.0p)
- b) För tryckkärl i uppgift a, bestäm huvudspänningarna och tillhörande huvudspänningsriktningar (1.0p)

Tryckkärl har medelradien a och väggjockleken h .



UPPGIFT 2

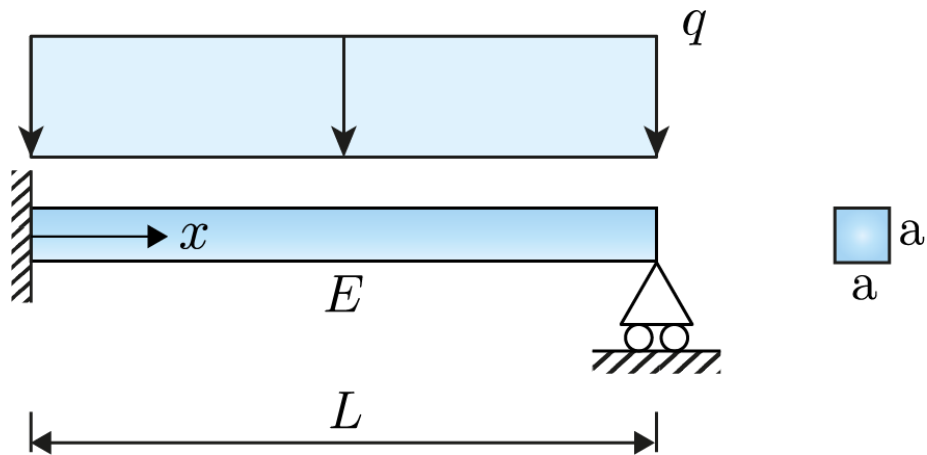
Beräkna och rita tvärkraft- och momentdiagram för balken nedan. Extremvärden ska tydligt framgå. **(5.0p)**



UPPGIFT 3

Balken nedan är belastad med en konstant utbredd last q och har ett kvadratisk tvärsnitt med sidlängd a .

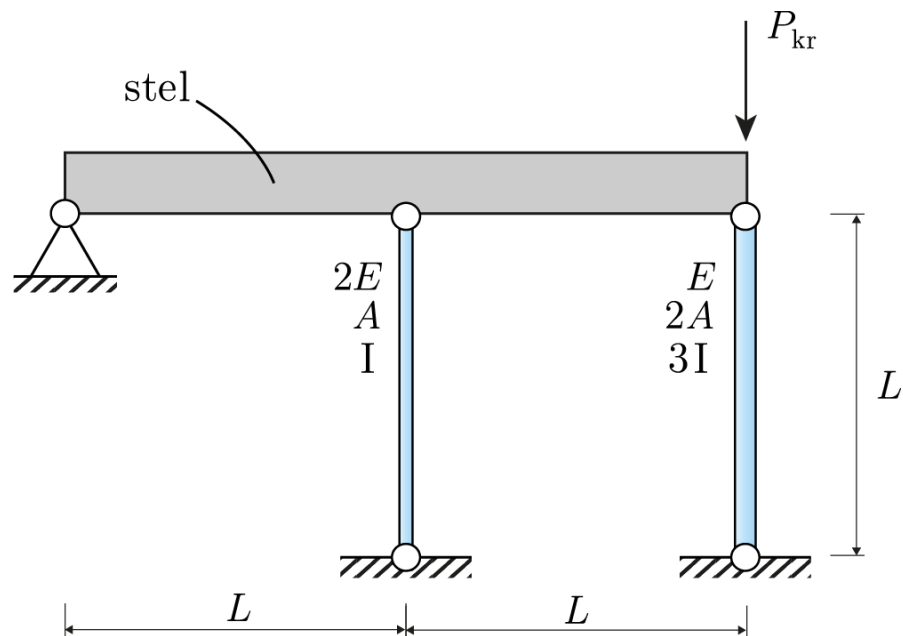
- Utgå från balkens differentialekvation och härled utböjningsfunktionen $w(x)$. (4.0p)
- Ta fram koordinaten $\bar{x}$ där $T(\bar{x}) = 0$ (1.0p)



UPPGIFT 4

Två stänger är ledat infästa i en stel balk som belastas med en punktlast. Beräkna den kritiska last, P_{kr} , som strukturen kan bära med avseende på knäckning. (5.0p)

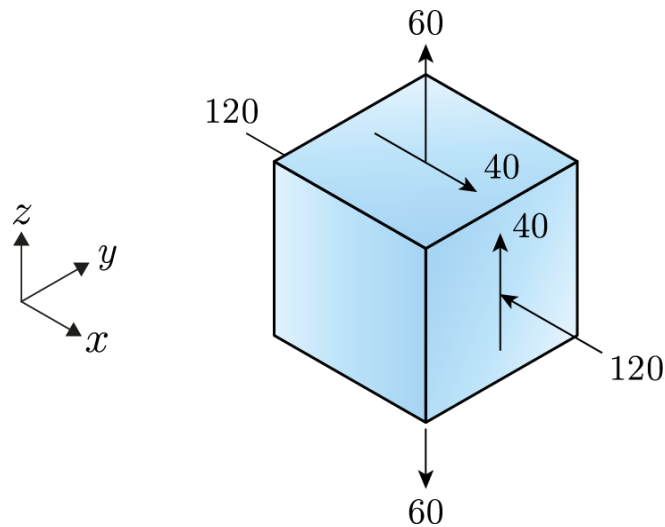
Notera skillnaderna i elasticitetsmodul, tvärsnittsarea och yttröghetsmoment för de två stängerna.



UPPGIFT 5

Spänningstillståndet i en punkt visualiseras nedan, där spänningarna är angivna i MPa.

Beräkna samtliga huvudspänningar och huvudspänningsriktningar samt effektivspänningen enligt Tresca (**5.0p**)



TENTAMEN

HÅLLFASTHETSLÄRA OCH MASKINELEMENT – TME061

Tid	08.30–12.30
Ansvarig lärare	Jim Brouzoulis. Tel 772 2253
Hjälpmedel	– Formelsamling i hållfasthetslära, Tillämpad mekanik, Ekh, Hansbo och Brouzoulis (utan marginalanteckningar) – Valfri typgodkänd kalkylator
Resultat	Anslås senast 2017-09-04 på kurshemsidan
Granskning	Avdelningen för Material och Beräkningsmekanik: • 2017-09-04, kl. 12.00–12.30 • 2017-09-05, kl. 12.30–13.00.
Poängbedömning	Varje uppgift kan ge fem poäng, d.v.s. max 25 poäng på tentamen och halva poäng delas ut. För att få poäng på en uppgift måste lösningen vara läslig och uppställda ekvationer klart motiverade. Vidare skall entydiga beteckningar användas och tydliga figurer ritas. Tänk på att kontrollera dimensioner och rimlighet i svaren.
Betygsgränser	0 - 9.5p = underkänt 10 - 14.5p = betyg 3 15 - 19.5p = betyg 4 20p – 25p = betyg 5

Lösningar

UPPGIFT 1

- a) Härled ångpanneformlerna för ett tunnväggigt cylindriskt tryckkärl med övertrycket p . **(4.0p)**
- b) För tryckkärlet i uppgift a, bestäm huvudspänningarna och tillhörande huvudspänningsriktningar **(1.0p)**

Se kursmaterial för lösning

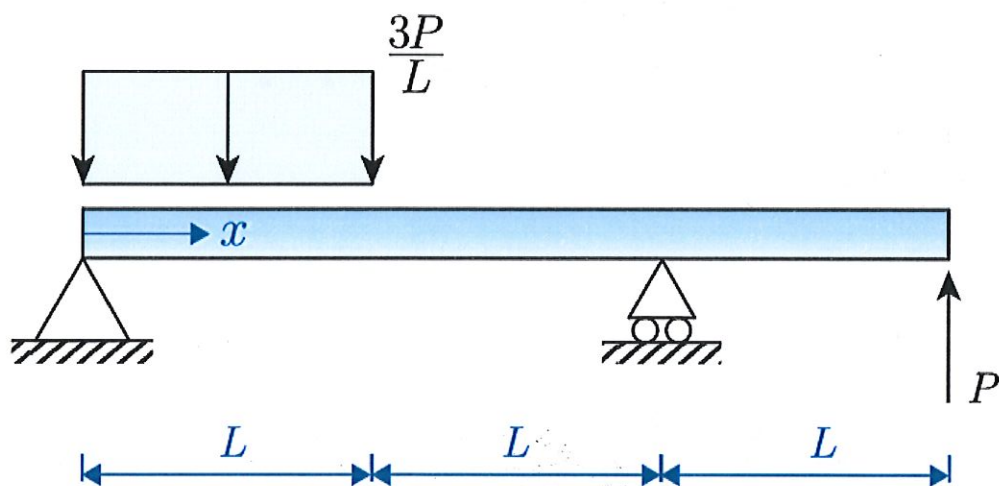


UPPG 2

2.6 Tvärkraft- och momentdiagram för en balk

← 2.5

3 →



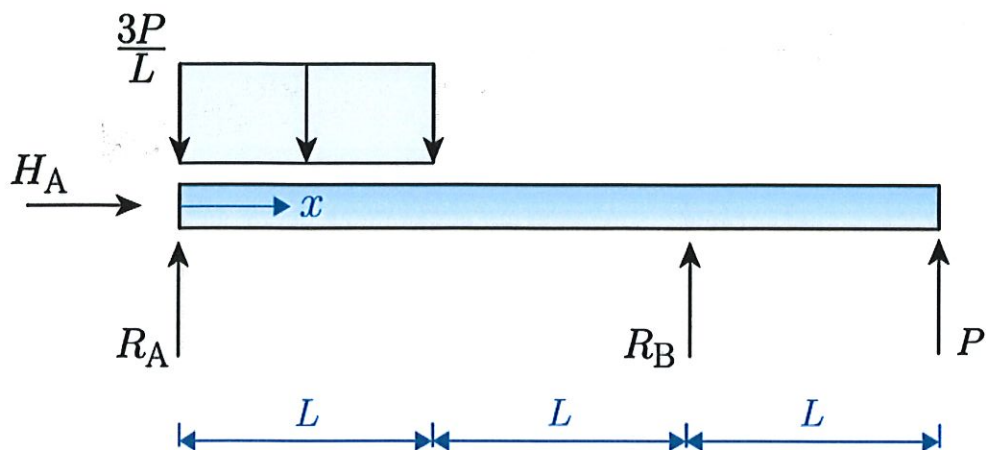
DESCRIPTION

ANSWER

SOLUTION

Reaktionskrafter

Frilägg balken och inför obekanta reaktionskrafter.



Global jämvikt ger följande ekvationer:

$$\rightarrow: H_A = 0$$

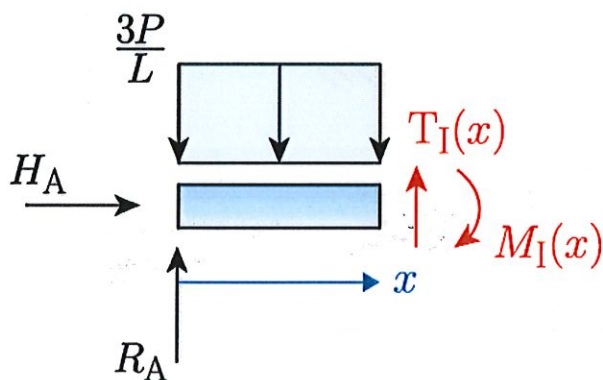
$$\hat{A}: R_B \cdot 2L + P \cdot 3L = \frac{3P}{L} \cdot L \cdot \frac{L}{2} \Rightarrow R_B = -\frac{3P}{4}$$

$$\uparrow: R_A = 3P - R_B - P = 2P - R_B = 2P + \frac{3P}{4} = \frac{11P}{4}$$

Snittkrafter

Vi delar in balken i tre snitt enligt följande figurer:

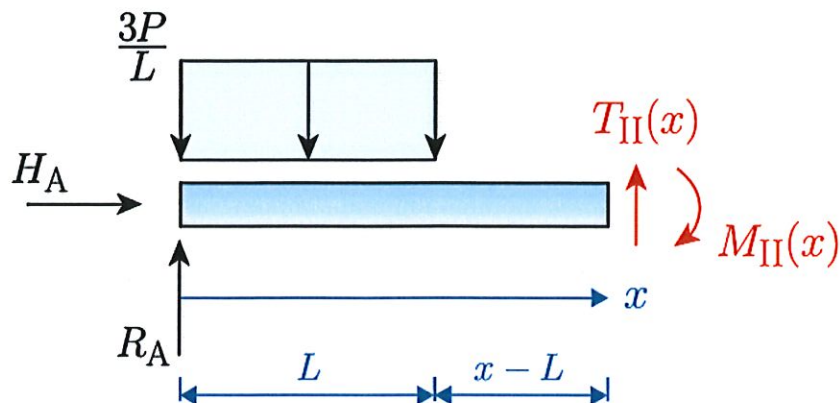
Snitt I



$$\uparrow: T_I(x) = \frac{3P}{L}x - R_A = \frac{3P}{L}x - \frac{11P}{4}$$

$$\hat{x}: M_I(x) = \frac{3P}{L}x \cdot \frac{x}{2} - R_A x = \frac{3P}{L} \frac{x^2}{2} - \frac{11P}{4}x$$

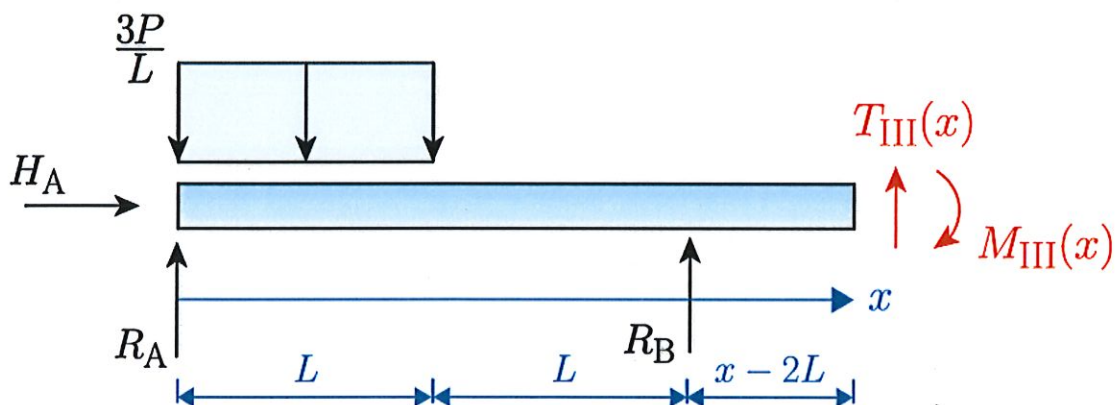
Snitt II



$$\uparrow: T_{II}(x) = \frac{3P}{L}L - R_A = \frac{3P}{L}L - \frac{11P}{4} = \frac{P}{4}$$

$$\curvearrowright: M_{II}(x) = \frac{3P}{L}L \left(x - \frac{L}{2}\right) - R_A x = 3P \left(x - \frac{L}{2}\right) - \frac{11P}{4}x$$

Snitt III



$$\uparrow: T_{III}(x) = \frac{3P}{L}L - R_A - R_B = 3P - \frac{11P}{4} + \frac{3P}{4} = P$$

$$\curvearrowright: M_{III}(x) = \frac{3P}{L}L \left(x - \frac{L}{2}\right) - R_A x - R_B (x - 2L) = 3P \left(x - \frac{L}{2}\right) - \frac{11P}{4}x + \frac{3P}{4}(x - 2L) = Px - 3PL$$

Extremvärden

Vi undersöker extremvärdet för M i snitt I genom att söka efter $T_I(x) = \frac{3P}{L}x - \frac{11P}{4} = 0 \Rightarrow x = \frac{11}{12}L$. Detta ger

$$M_I\left(\frac{11}{12}L\right) = \frac{3P}{2L} \left(\frac{11}{12}L\right)^2 - \frac{11P}{4} \cdot \frac{11}{12}L \approx -1.26PL$$

Jämför detta med värdet vid $x = L$ som är $M_I(L) = PL \left(\frac{3}{2} - \frac{11}{4}\right) = -1.25PL$

Momentet vid $x = 2L$ blir

$$M_{II}(2L) = \frac{3P}{L} \cdot L \left(2L - \frac{L}{2}\right) - \frac{11P}{4} \cdot 2L = 3.5PL$$

Vi kan nu rita upp diagrammen

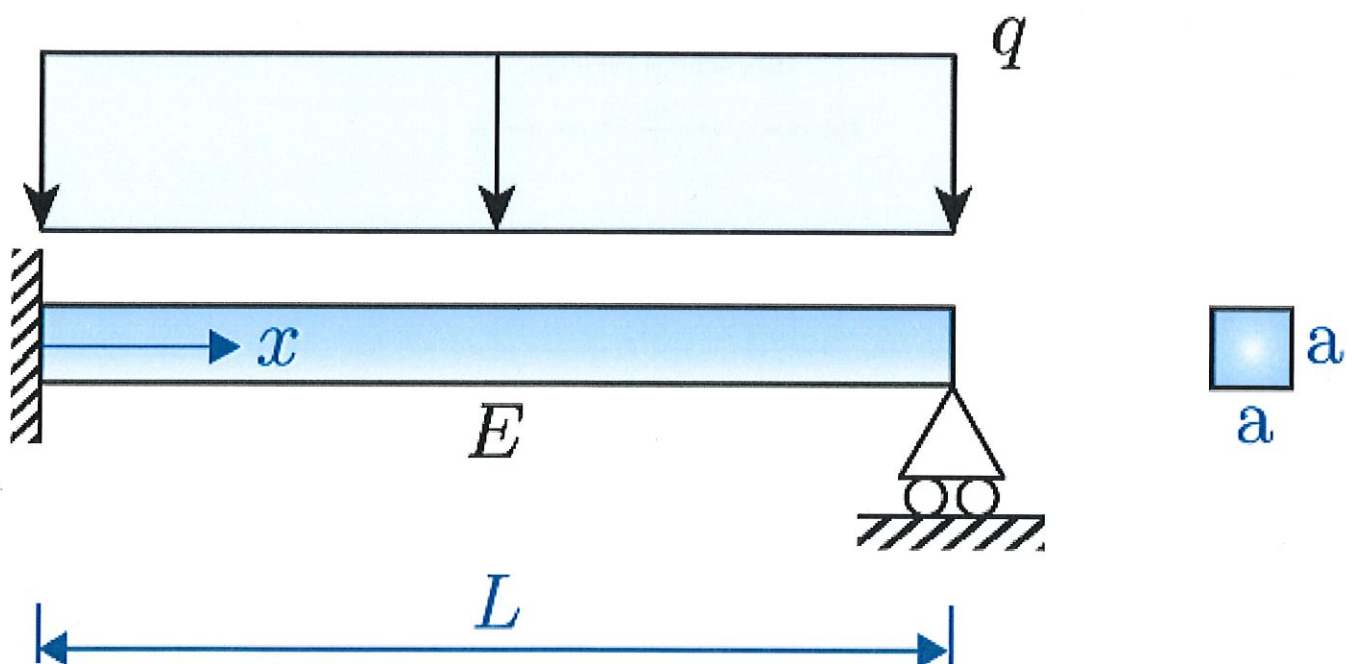


3.5 Nedböjning av konsolbalk med stöd

UPPG 3

← 3.4

4 →



DESCRIPTION

ANSWER

SOLUTION

Balkens differentialekvation:

Integrera balkens differentialekvation fyra gånger

$$\begin{aligned}
 w^{IV}(x) &= -\frac{q}{EI} \Rightarrow \\
 w'''(x) &= -\frac{q}{EI} x + C_1 \Rightarrow \\
 w''(x) &= -\frac{q}{EI} \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2 \Rightarrow \\
 w'(x) &= -\frac{q}{EI} \frac{x^3}{6} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3 \Rightarrow \\
 w(x) &= -\frac{q}{EI} \frac{x^4}{24} + C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4
 \end{aligned}$$

Randvillkor

1. $w(0) = 0 \Rightarrow C_4 = 0$
2. $w'(0) = 0 \Rightarrow C_3 = 0$

$$3. M = -EIw''(L) = 0 \Rightarrow w''(L) = 0 \Rightarrow$$

$$w''(L) = -\frac{q}{EI} \frac{L^2}{2} + C_1 \cdot L + C_2 = 0 \Leftrightarrow C_2 = \frac{q}{EI} \frac{L^2}{2} - C_1 \cdot L$$

$$4. w(L) = 0 \Rightarrow$$

$$w(L) = -\frac{q}{EI} \frac{L^4}{24} + C_1 \frac{L^3}{6} + \left(\frac{q}{EI} \frac{L^2}{2} - C_1 \cdot L \right) \frac{L^2}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$C_1 = \frac{5qL}{8EI} \Rightarrow$$

$$C_2 = \frac{q}{EI} \frac{L^2}{2} - \frac{5qL}{8EI} \cdot L = -\frac{qL^2}{8EI}$$

Den totala nedböjningen fås därmed som

$$w(x) = -\frac{q}{EI} \frac{x^4}{24} + \frac{5qL}{8EI} \frac{x^3}{6} - \frac{qL^2}{8EI} \frac{x^2}{2} =$$

$$\frac{qL^4}{24EI} \left(-\left(\frac{x}{L}\right)^4 + \frac{5}{2}\left(\frac{x}{L}\right)^3 - \frac{3}{2}\left(\frac{x}{L}\right)^2 \right)$$

Tvärkraft

Tvärkraften fås nu som

$$T(x) = -EIw'''(x) = qx - \frac{5qL}{8}$$

$$T(x) = 0 \Rightarrow qx - \frac{5qL}{8} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5L}{8}$$

← 3.4

4 →

DEMECHANICA.COM

En plattform för alla intresserade av Hållfasthetslära och Strukturmekanik

LÄNKAR

Kakor



R^G

© 2017 Jim Brouzoulis

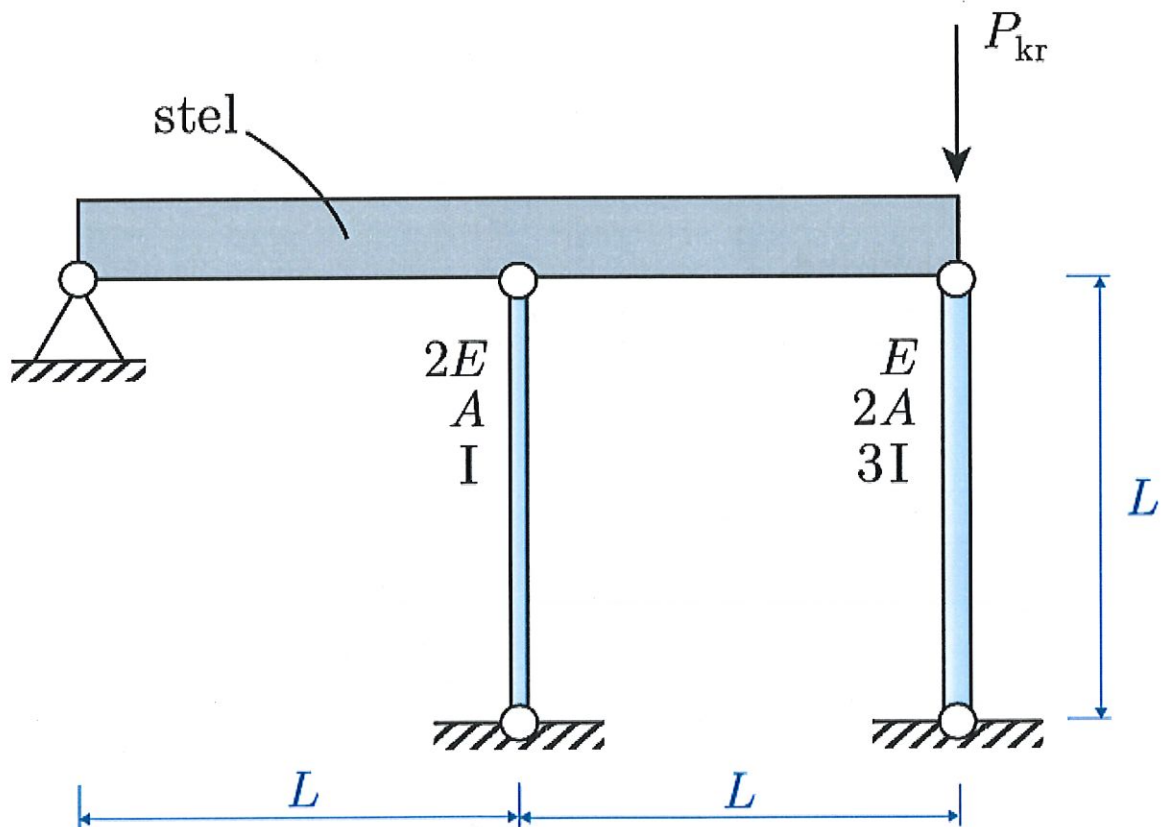


4. Stel balk vilandes på två stänger

UPPG 4

← 4.3

5 →



DESCRIPTION

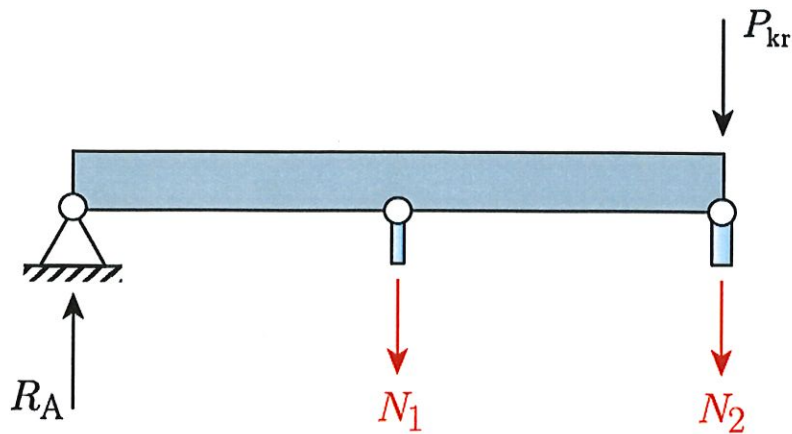
ANSWER

SOLUTION

Lösningsgång

För att bestämma hur stor last strukturen kan bära behöver vi ta fram den lägsta lasten som något element kan bära. Därför behöver normalkrafterna bestämmas i stängerna och jämföras med respektive knäckningslast.

Normalkraftsfördelning



Börja med att ställa upp jämvikt för strukturen

Jämvikt

Global jämvikt ger:

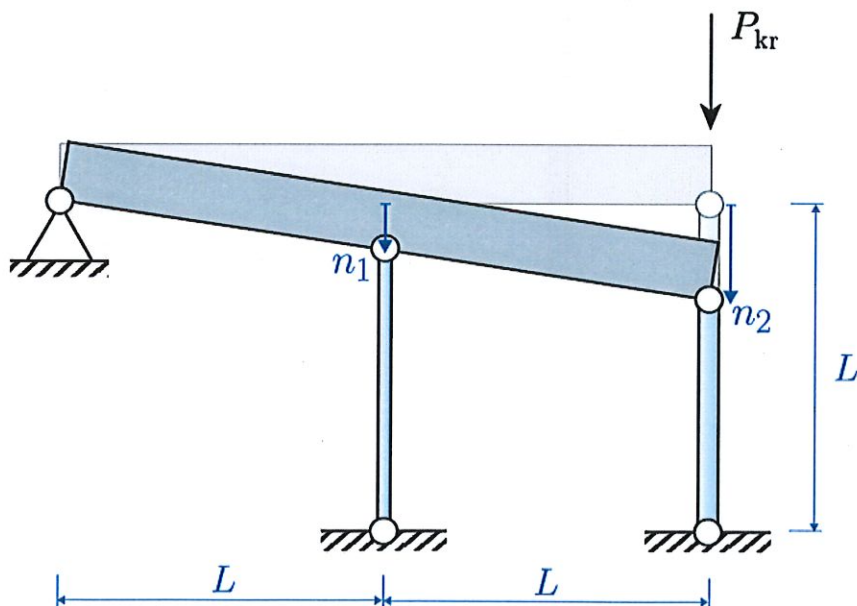
$$\uparrow: R = P_{kr} + N_1 + N_2$$

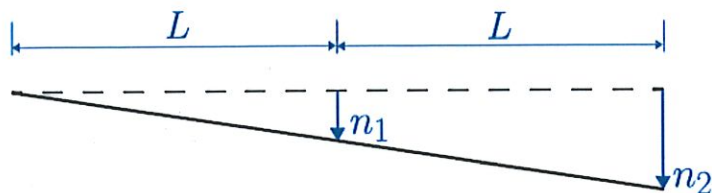
$$\hat{A}: P_{kr} \cdot 2L + N_1 \cdot L + N_2 \cdot 2L = 0$$

Det är två ekvationer men tre obekanta. Systemet är därför statiskt obestämt och vi fortsätter med att ställa upp deformationssamband och materialsamband.

Deformationssamband

Vid deformation roterar balken runt punkten A och därför måste deformationen av stängerna förhålla sig till denna rotation. Om balken roterar en vinkel θ får vi följande relation mellan stångdeformationerna (tangens för vinkeln)





$$\frac{n_1}{L} + \frac{n_2}{2L} \Rightarrow n_2 = 2n_1$$

Materialsamband

Antag att Hookes lag gäller $\Rightarrow$

$$N = \sigma A = EA\epsilon = \frac{EA}{L}n$$

$$N_1 = \frac{2EA}{L}n_1 \quad N_2 = \frac{EA}{L}n_2$$

Kombinera sambanden

$$R = P_{kr} + N_1 + N_2 = P_{kr} + \frac{2EA}{L}n_1 + \frac{EA}{L}(2n_1) = P_{kr} + 6\frac{EA}{L}n_1$$

$$P_{kr} \cdot 2L + N_1 \cdot 2L + N_2 \cdot L = P_{kr} \cdot 2L + \frac{2EA}{L}n_1 \cdot 2L + \frac{EA}{L}(2n_1) \cdot L \Rightarrow$$

$$P_{kr} = 5\frac{EA}{L}n_1 \Rightarrow n_1 = -\frac{P_{kr}L}{5EA}$$

Slutligen fås normalkrafterna som

$$N_1 = \frac{2EA}{L}n_1 = \frac{2EA}{L} \left(-\frac{P_{kr}L}{5EA} \right) = -\frac{2P_{kr}L}{5}$$

$$N_2 = \frac{EA}{L}2n_1 = \frac{EA}{L} \cdot 2 \left(-\frac{P_{kr}L}{5EA} \right) = -\frac{4P_{kr}L}{5}$$

Knäcklast

Båda stängerna är fritt ledade i ändarna vilket motsvarar Eulers andra knäckningsfall $N_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$ vilket ger



$$N_{kr1} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} = N_1 = \frac{2P_{kr}L}{5} \Rightarrow P_{kr1} = \frac{5\pi^2 EI}{L^2}$$

$$N_{kr2} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} = N_2 = \frac{4P_{kr}L}{5} \Rightarrow P_{kr2} = \frac{15\pi^2 EI}{4L^2}$$

Därmed får vi att den kritiska lasten bestäms av stång nummer 2 och ges av $P_{kr} = \frac{15\pi^2 EI}{4L^2}$

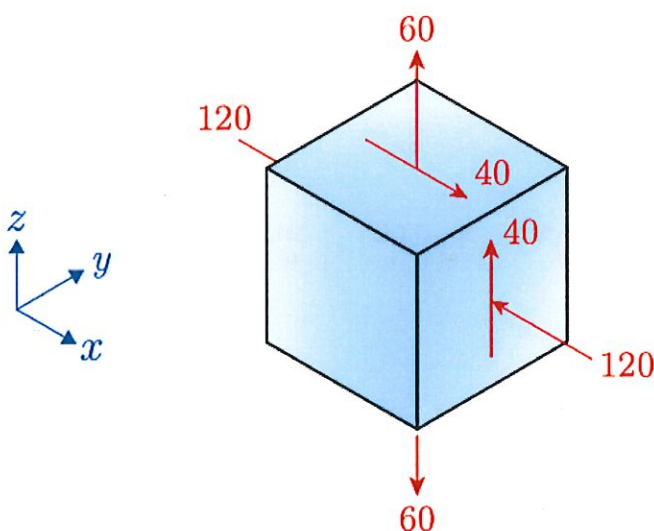


5.4 Huvudspänningar och effektivspänning enligt Tresca

UPPG 5

← 5.3

6 →



DESCRIPTION

ANSWER

SOLUTION

Lösningsgång

1. Ställ upp spänningsmatrisen $\mathbf{S}$ utifrån figuren och lös egenvärdsproblemet $(\mathbf{S} - \sigma \mathbf{I}) = \mathbf{0}$.
2. Med huvudspänningarna beräknade, räkna ut huvudspänningsriktningarna och effektivspänningen.

Huvudspänningar och huvudspänningsriktningar

Spänningsmatrisen

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} -120 & 0 & 40 \\ 0 & 0 & 0 \\ 40 & 0 & 60 \end{bmatrix}$$

Spänningsmatrisen beskriver ett plant spänningstillstånd och kan skrivas om som som en 2x2-matris (ej nödvändigt)

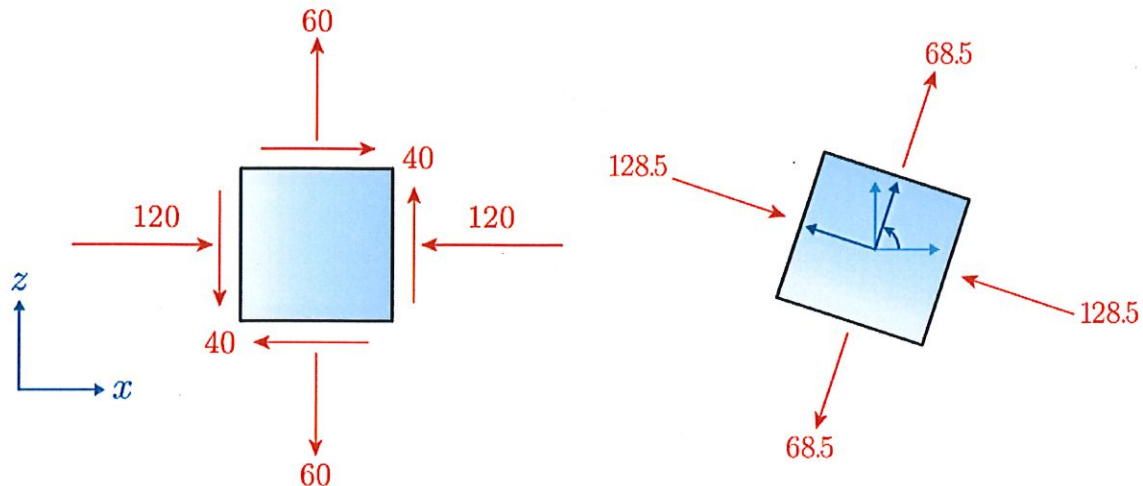
$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} -120 & 40 \\ 40 & 60 \end{bmatrix}$$

Huvudspänningar

$$\det(\mathbf{S} - \sigma \mathbf{I}) = (-120 - \sigma)(60 - \sigma) - 40^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\sigma_{I,II} = -30 \pm \sqrt{90^2 + 40^2} = -30 \pm 98.5 \text{ MPa} \Rightarrow$$

- $\sigma_I = 68.5 \text{ MPa}$
- $\sigma_{II} = 0.0 \text{ MPa}$
- $\sigma_{III} = -128.5 \text{ MPa}$



Huvudspänningsriktningar:

Vi börjar med riktningen tillhörande σ_I :

$$\begin{bmatrix} -120 - 68.5 & 40 \\ 40 & 60 - 68.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{1x} \\ n_{1z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -188.5 & 40 \\ 40 & -8.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{1x} \\ n_{1z} \end{bmatrix}$$

Första ekvationen ger:

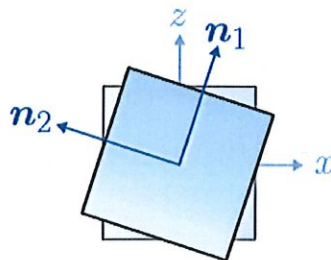
$$\bar{n}_{1z} = \frac{8.5}{40} n_{1x} \Rightarrow \bar{\mathbf{n}}_1 = \begin{bmatrix} \frac{8.5}{40} \\ 1.0 \end{bmatrix} n_{1x} \Rightarrow$$

$$\mathbf{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{8.5}{40}\right)^2 + 1^2}} \begin{bmatrix} \frac{8.5}{40} \\ 1.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.21 \\ 0.98 \end{bmatrix}$$

Vi tar fram den tredje riktningen genom att använda relationen $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_3 = 0 \Rightarrow$

$$\mathbf{n}_3 = \begin{bmatrix} 0.98 \\ -0.21 \end{bmatrix}$$

Den andra huvudspänningen ($\sigma_{II} = 0$) motsvarar riktningen given av koordinataxeln y .



Effektivspänning enligt Tresca

Eftersom vi ordnat huvudspänningarna i storleksordning kan effektivspänningen räknas ut som $\sigma_e = |\sigma_I - \sigma_{III}| \Rightarrow$

$$\sigma_e = |68.5 - (-128.5)| = 197.0 \text{ MPa}$$