TENTAMEN
HÅLLFASTHETSLÄRA OCH MASKINELEMENT – TME061

Tid 08.30–12.30
Ansvarig lärare Jim Brouzoulis. Tel 772 2253
Hjälpmedel

- Formelsamling i hållfasthetslära, Tillämpad mekanik, Ekh, Hansbo och Brouzoulis (utan marginalanteckningar)
- Valfri typgodkänd kalkylator

Resultat Anslås senast 2017-06-~~07~~ 16 på kurshemsidan

Granskning Avdelningen för Material och Beräkningsmekanik:

- 2017-06-16, kl. 12.30–13.00
- 2017-09-04, kl. 12.30–13.00.

Poängbedömning Varje uppgift kan ge fem poäng, d.v.s. max 25 poäng på tentamen och halva poäng delas ut. För att få poäng på en uppgift måste lösningen vara läslig och uppställda ekvationer klart motiverade. Vidare skall entydiga beteckningar användas och tydliga figurer ritas. Tänk på att kontrollera dimensioner och rimlighet i svaren.

Betygsgränser
0 - 9.5p = underkänt
10 - 14.5p = betyg 3
15 - 19.5p = betyg 4
20p – 25p = betyg 5

UPPGIFT 1

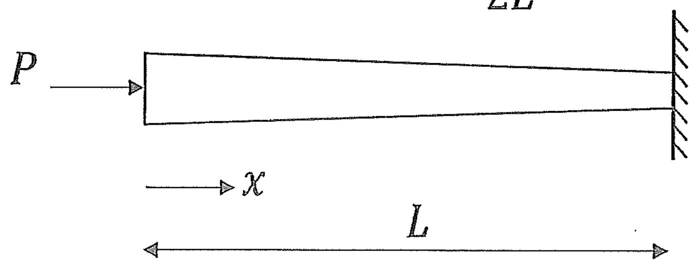
Härled differentialekvationen för en axialbelastad stång med varierande area $A(x)$, elasticitetsmodul $E(x)$ och axiallast $K_x(x)$. Samband för jämvikt och kinematik måste tas fram. **(4.0p)**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(E(x)A(x)\frac{d}{dx}u(x)\right)+K_xA(x)=0$$

För stången nedan, ställ upp de randvillkor som krävs för att lösa stångens differentialekvation. Stången har en konstant elasticitetsmodul men en varierande area.

Notera: Randvillkoren måste vara uttryckta i termer av funktionen $u(x)$. **(1.0p)**

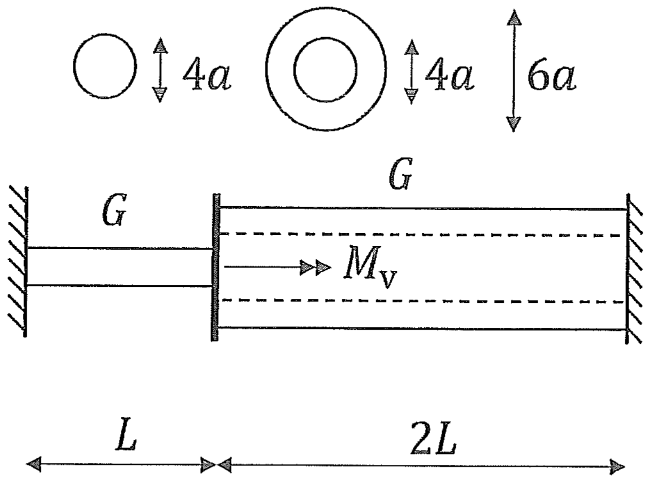
$$A(x) = A_0(1-\frac{x}{2L})$$



UPPGIFT 2

Bestäm (till beloppet) maximal skjuvspänning som uppkommer i systemet p.g.a. vridmomentet M_v. **(5.0p)**

- Den vänstra axeln är massiv och den högra betraktas som tjockväggig. Axlarna sitter ihop m.h.a. en stel skiva (svart vertikalt streck i figuren).
- Båda axlarna är tillverkade av samma material med skjuvmodulen G.

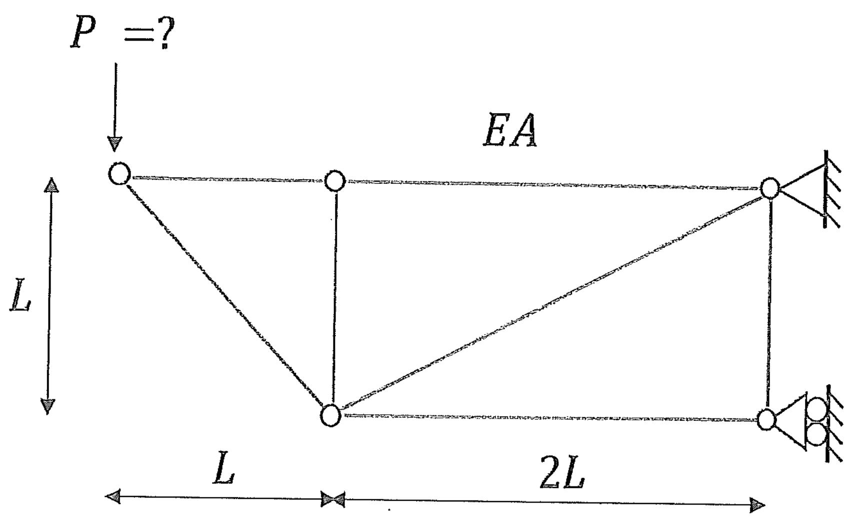


UPPGIFT 3

Ett fackverk enligt figuren nedan belastas av en vertikal punktlast i en av noderna. Bestäm den last P som strukturen kan bära. Ta hänsyn till både risk för plasticering och instabilitet. **(5.0p)**

Givna data:

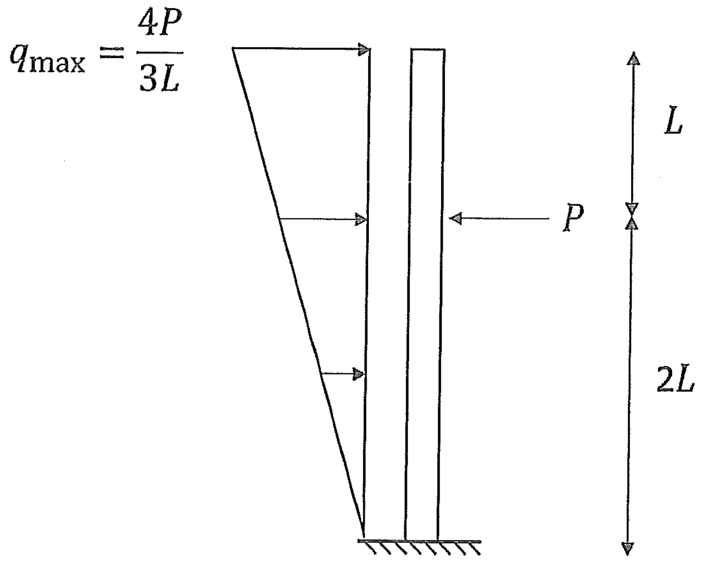
- $E = 210$ GPa,
- $\sigma_s = 400$ MPa
- Stängerna är cirkulära med radie $r = 15$ mm
- Yttröghetsmoment för ett cirkulärt tvärsnitt: $I = \frac{\pi r^4}{4}$
- $\mathrm{L} = 1$ m
- Alla stängerna är tillverkade av samma material



UPPGIFT 4

En pelare, som antas vara fast inspänd i marken, belastas av en vindlast som modelleras av en tringellast. Pelaren är också belastad av en punktlast.

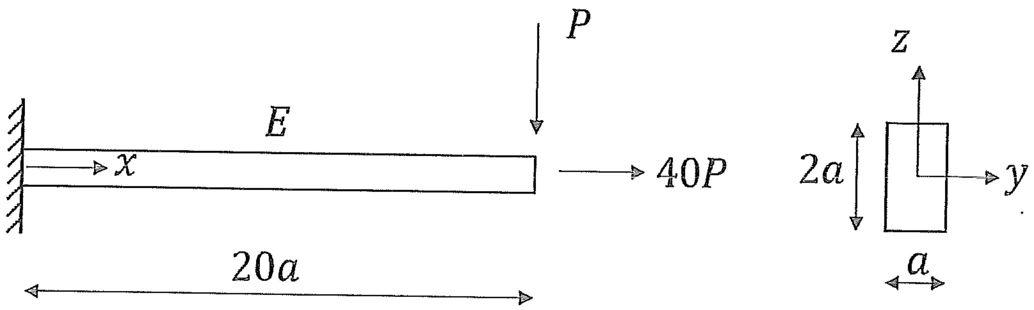
Beräkna och rita tvärkraft- och momentdiagram för pelaren. Lokala extremvärden ska tydligt framgå. (**5.0p**)



UPPGIFT 5

Beräkna maximal effektivspänning, enligt von Mises, som uppkommer i balken p.g.a. de tvåpunktlasterna. Svara med koordinater (x, y, z). **(5.0p)**

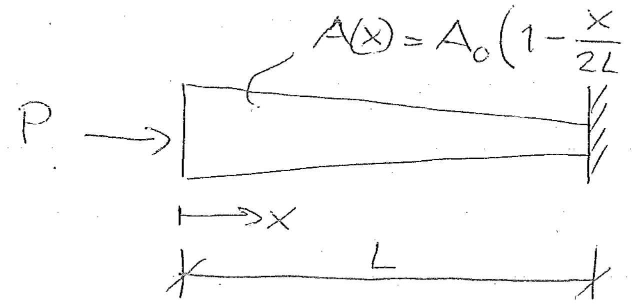
Dimensioner framgår från figuren nedan.



UPPG. 1:

a) Se föreläsningar eller kursmaterial

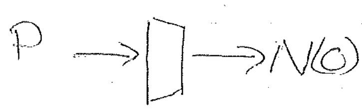
b)



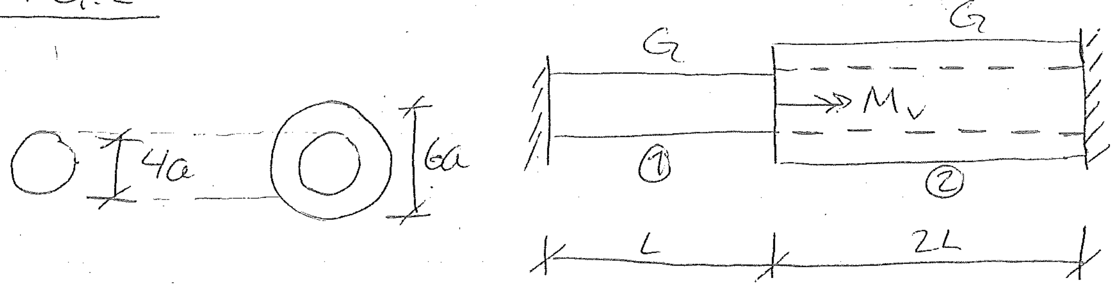
Randvillkor:

- $u(x=L) = 0$
- $N(x=0) = -P \Rightarrow$

$$EA\varepsilon(0) = EAu'(0) = -P$$
$$\Leftrightarrow u'(0) = -\frac{P}{EA}$$



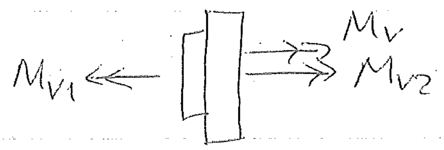
UPPG. 2:



· Beräkna max skjuvspänning.

Jämvikt

· Snitta vid övergången:



$$\Rightarrow: \quad M_v + M_{v2} = M_{v1} \qquad (1)$$

Deformationssamband

· Samma rotation (kontinuerlig) på varje sida:

$$\Delta\varphi_2 = -\Delta\varphi_1 \qquad (2)$$

Materialsamband:

$$M_v = GK_v \frac{\Delta\varphi}{L} \Rightarrow \begin{cases} M_{v1} = GK_{v1} \dfrac{\Delta\varphi_1}{L} \\ M_{v2} = GK_{v2} \dfrac{\Delta\varphi_2}{2L} = -GK_{v2} \dfrac{\Delta\varphi_1}{2L} \end{cases} \qquad (3)$$

Kombinera (1)-(3) =>

$$M_v + \left(-GK_{v2} \frac{\Delta\varphi_1}{2L}\right) = GK_{v1} \frac{\Delta\varphi_1}{L} \Leftrightarrow$$

$$M_v = \frac{\Delta\varphi G}{L}\left(K_{v1} + \frac{K_{v2}}{2}\right) = \frac{\Delta\varphi G}{2L}(2K_{v1} + K_{v2}) \Leftrightarrow \Delta\varphi = \frac{M_v 2L}{G(2K_{v1}+K_{v2})}$$

$$K_{v1} = \frac{\pi}{2}(2a)^4 = 8\pi a^4$$

$$K_{v2} = \frac{\pi}{2}\left((3a)^4 - (2a)^4\right) = \frac{65}{2}\pi a^4$$

$$\Rightarrow \quad \Delta\varphi_1 = \frac{M_v \cdot 2L}{G\left(2 \cdot 8\pi a^4 + \frac{65}{2}\pi a^4\right)} = \ldots = \frac{4LM_v}{97Ga^4\pi}$$

<u>Spänningsberäkningar</u>

$$\tau = \frac{M_v}{K_v} r \quad \Rightarrow |\tau|_{max} = \frac{|M_v|}{K_v} \cdot r_{max} \quad \Rightarrow$$

$$\tau_{1,max} = \frac{G\cancel{K_{v1}}\frac{\Delta\varphi_1}{L}}{\cancel{K_{v1}}}(2a) = \frac{2aG}{L}\Delta\varphi_1 = \frac{2a\cancel{G}}{\cancel{L}} \cdot \frac{4\cancel{L}M_v}{97\cancel{G}a^{\cancel{4}3}\pi} = \frac{8M_v}{97a^3\pi} \;//$$

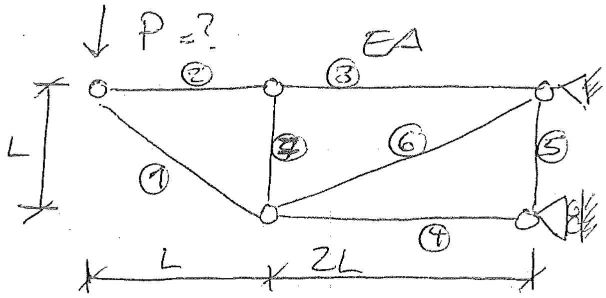
$$\tau_{2,max} = \frac{GK_{v2}\frac{\Delta\varphi_1}{2L}}{K_{v2}}(3a) = \frac{3aG}{2L}\Delta\varphi_1$$

$\tau_{1,max} > \tau_{2,max}$ eftersom faktorn $2 > \frac{3}{2}$ $\Rightarrow$

Största skjuvspänningen blir $\frac{8M_v}{97a^3\pi}$ $\left[\frac{N \cdot m}{m^3} = \frac{N}{m^2} = Pa\right]$ ok!

och uppkommer i den vänstra axeln.

UPPG. 3:



Bestäm P med hänsyn till plasticering och instabilitet.

$E = 210\ GPa$

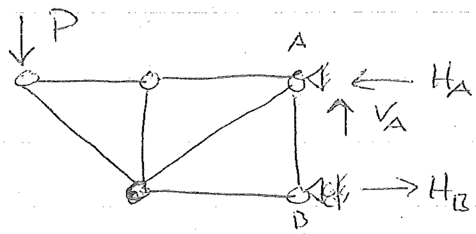
$\sigma_s = 400\ MPa$

$r = 0{,}015\ m$

$L = 1\ m$

· Bestäm först normalkraftsfördelningen i fackverket.

Global jämvikt

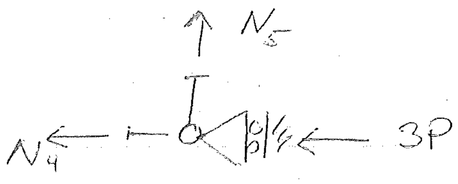


$\uparrow: \quad V_A = P$

$\leftarrow: \quad H_A = H_B$

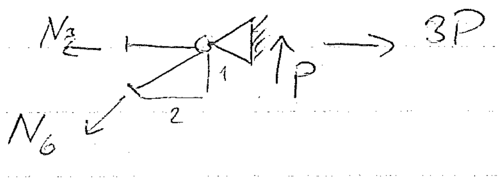
$\curvearrowleft B: \quad H_A \cdot L + P \cdot 3L = 0 \Leftrightarrow H_A = -3P$

Använd knutpunktsmetoden för att beräkna $N_1 - N_7$:



$\uparrow: \quad N_5 = 0$

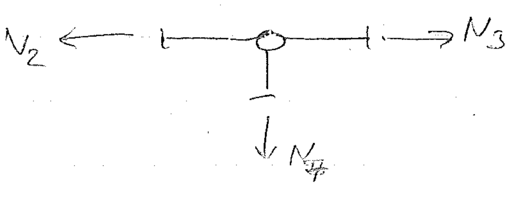
$\leftarrow: \quad N_4 = -3P$



$\downarrow: \quad N_6 \dfrac{L}{\sqrt{5}L} = P \Leftrightarrow N_6 = \sqrt{5}P$

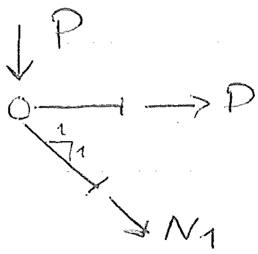
$\leftarrow: \quad N_3 + N_6 \cdot \dfrac{2L}{\sqrt{5}L} = 3P \Leftrightarrow$

$N_3 = 3P - \cancel{\sqrt{5}}P \cdot \dfrac{2\cancel{L}}{\cancel{\sqrt{5}L}} = P$



$\downarrow: \quad N_7 = 0$

$\leftarrow: \quad N_2 = N_3 = P$



$$\downarrow: \; N_1 \frac{L}{\sqrt{2}L} + P = 0 \Leftrightarrow N_1 = -\sqrt{2}P$$

Stång 1 och 4 är utsatta för en tryckande normalkraft ⇒ behöver studera instabilitet för dessa

Instabilitet

Stängerna knäcker enligt Euler 2 ⇒ $P_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} = N_{kr}$

$$\Rightarrow \quad N_1 = N_{kr,1} = \frac{\pi^2 EI}{(\sqrt{2}L)^2} = \sqrt{2}P_{kr,1} \Rightarrow P_{kr,1} = \frac{\pi^2 EI}{\sqrt{2}\,2L^2}$$

$$N_4 = N_{kr,4} = \frac{\pi^2 EI}{(2L)^2} = 3P_{kr,4} \Rightarrow P_{kr,4} = \frac{\pi^2 EI}{12L^2} < P_{kr,1}$$

$$I = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi\, 0{,}015^4}{4} \approx 3{,}98 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{m}^4 \Rightarrow P_{kr,4} = \frac{\pi^2 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 3{,}98 \cdot 10^{-8}}{12 \cdot 1^2}$$

$$\approx 6870\,\mathrm{N}$$

Plasticering

$$\left(N_{s,1} = \sigma_s \cdot A = \sqrt{2}P_{s,1} \Rightarrow P_{s,1} = \frac{\sigma_s \cdot A}{\sqrt{2}} \right)$$

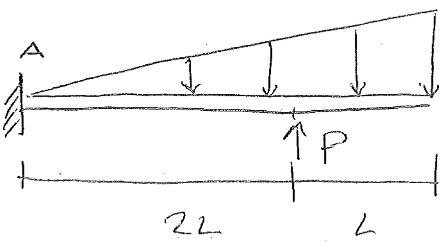
$$N_{s,4} = \sigma_s \cdot A = 3P_{s,4} \Rightarrow P_{s,4} = \frac{\sigma_s \cdot A}{3} < P_{s,1}$$

$$P_{s,4} = \frac{400 \cdot 10^6 \cdot \pi (0{,}015)^2}{3} \approx 94\,250\,\mathrm{N} \approx 94\,\mathrm{kN} > P_{kr,4}$$

Eftersom N_4 är (till beloppet) störst räcker det att kontrollera den stången

Maximal last P som strukturen kan bära är $P_{kr,4} \approx 6{,}9\,\mathrm{kN}$

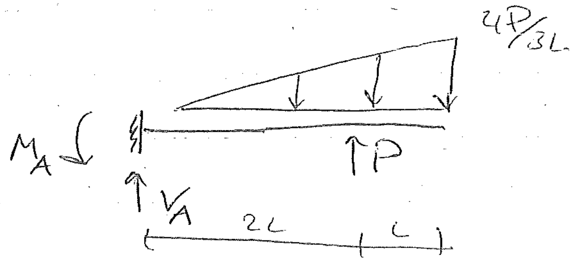
UPPG 4:



$q_{max} = \frac{4P}{3L}$

Bestäm T- och M-diagram

· Global jämvikt:



$\uparrow: \quad V_A = \frac{4P}{\cancel{3L}} \cdot \frac{\cancel{3L}}{2} - P = P$

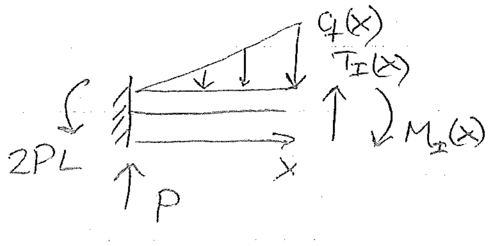
$\overset{\curvearrowleft}{A}: \quad M_A = \frac{\overset{2}{\cancel{4}}P}{3L} \cdot \frac{3L}{\cancel{2}} \cdot 2L - P \cdot 2L = 2PL$

· Använd snittmetoden för ta fram $T(x)$ och $M(x)$

– 2 snitt behövs

$q(x) = \frac{4P}{3L}\left(\frac{x}{3L}\right) = \frac{4Px}{9L^2}$

(I) $\leq x \leq 2L$

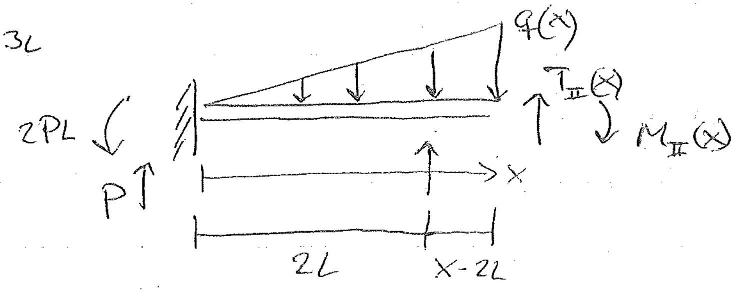


$\uparrow: \quad T_I(x) = \underbrace{\frac{q(x) \cdot x}{2}}_{\text{resultant}} - P = \frac{2Px^2}{9L^2} - P$

$\overset{\curvearrowright}{x}: \quad M_I(x) = 2PL + \frac{q(x) \cdot x}{2} \cdot \underbrace{\frac{x}{3}}_{\text{hävarm}} - Px = 2PL + \frac{2Px^3}{27L^2} - Px$

kontroll: $M_I' = T_I$ ok!

II $2L \leq x \leq 3L$



$\uparrow$: $T_{II}(x) = T_{I}(x) - P$ $\quad$ $\curvearrowleft x$: $M_{II}(x) = M_{I}(x) - P(x-2L)$

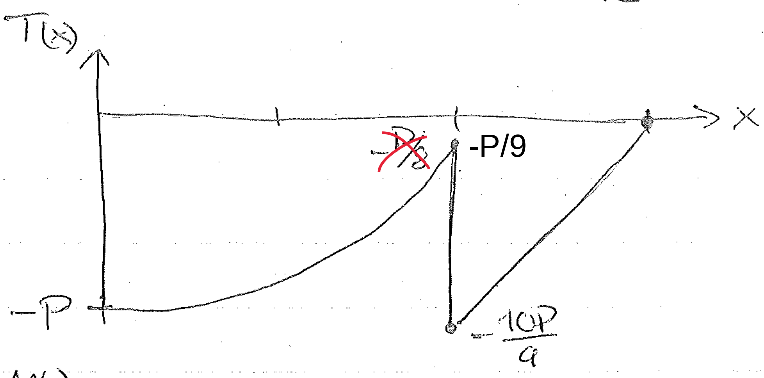
kontroll $M_{II}' = \cancel{\ldots} = T_{II}$ ok!

Uppritning av diagram:

- extremvärden:

$$\begin{cases} T_I'(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{4Px}{9L^2} = 0 \Rightarrow x = 0 \\ M_I'(x) = T_I(x) \Rightarrow \dfrac{2\cancel{P}x^2}{9L^2} = \cancel{P} \Rightarrow x = \pm\dfrac{3L}{\sqrt{2}} = \pm 2{,}12L > 2L \end{cases}$$

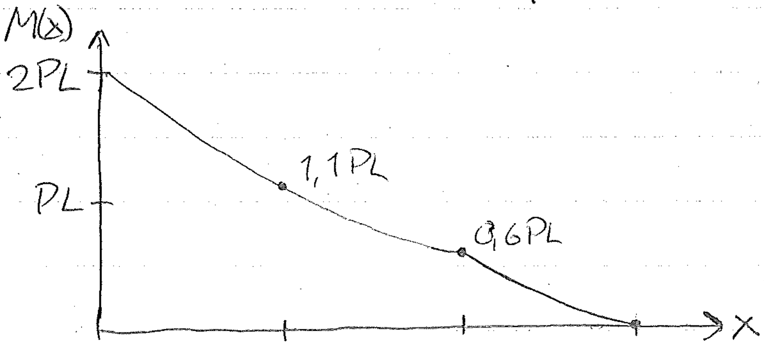
$$\begin{cases} T_{II}'(x) = 0 \Rightarrow T_{II}' = T_I' \Rightarrow x = 0 \\ M_{II}' = M_I' - P \Rightarrow \dfrac{2Px^2}{9L^2} = 2P \Rightarrow x = \pm 3L \end{cases}$$



$T_I(2L) = \dfrac{2P(2L)^2}{9L^2} - P = \cancel{-\dfrac{P}{8}}$ -P/9

$T_{II}(2L) = -\dfrac{P}{8} - \dfrac{9P}{9} = -\dfrac{10P}{9}$

$T_{II}(3L) = \dfrac{2P(3L)^2}{9L^2} - 2P = 0$



$M_I(2L) = \cancel{2PL} + \dfrac{2P(2L)^3}{27L^2} - \cancel{P \cdot 2L}$
$= \dfrac{16PL}{27} \approx 0{,}6PL$

$M_{II}(2L) = M_I(2L) - P(2L-2L)$ ok

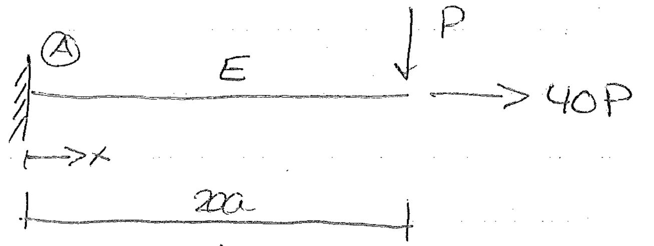
$M_{II}(3L) = M_I(3L) - P(3L - \cancel{2L}) =$

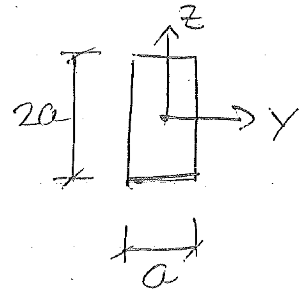
$M_I(L) = \cancel{2}PL + \dfrac{2PL^3}{27L^2} - \cancel{P}L = \dfrac{29}{27}PL$
$\approx 1{,}1PL$

$2PL + \dfrac{2P(3L)^3}{\cancel{27L^2}} - P \cdot 3L - PL = 0$ ok!

UPPG. 5

Beräkna max σ_e^{vM} som uppkommer i balken.
Svara med koordinater (x, y, z)



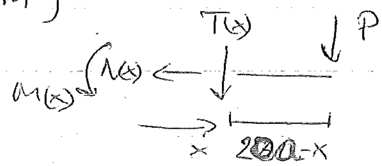


(Snittkrafter (behöver ej tas fram)

$\rightarrow: \quad N(x) = 40P$

$\downarrow: \quad T(x) = -P$

$\curvearrowleft x: \quad M(x) = (20a - x)P$



$\Rightarrow$ Max vid infästningen $x = 0$)

$M_A = 20Pa \quad , \quad N_A = 40P \quad , \quad T_A = -P$

Normalspänning

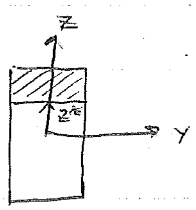
$$\sigma_A = \frac{N_A}{A} + \frac{M_A}{I} z \qquad \left\{ \begin{array}{l} A = 2a \cdot a = 2a^2 \\ I = \frac{a(2a)^3}{12} = \frac{2a^4}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\sigma_A(z) = \frac{40P}{2a^2} + \frac{20Pa}{\frac{2a^4}{3}} z = 20\frac{P}{a^2} + 30\frac{P}{a^3} z$$

Skjuvspänning

$$\tau_A(z) = \frac{S_A(z) T_A}{I \cdot a} = \frac{\frac{a}{2}(a^2 - z^2)(-P)}{\frac{2a^4}{3} \cdot a} =$$

$$= -\frac{3}{4}\frac{P}{a^2}\left(1 - \left(\frac{z}{a}\right)^2\right)$$



$$S_A = S_A(z^*) =$$

$$= \underbrace{(a - z^*)a}_{\text{area}} \cdot \left(z^* + \frac{(a - z^*)}{2}\right)$$

$$= \frac{a}{2}(a - z^*)(a + z^*)$$

$$= \frac{a}{2}(a^2 - z^{*2})$$

Effektivspänningar

$$\sigma_e^{VM} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{\left(20\frac{P}{a^2} + 30\frac{Pz}{a^2}\right)^2 + \frac{27P^2}{16a^4}\left(1-\left(\frac{z}{a}\right)^2\right)^2}$$

Derivera och sätt derivatan till noll $\Rightarrow$ extremvärden. Alternativt testa några olika värden på z

$$\tau = 0$$

$$z = a \Rightarrow \sigma = 20\frac{P}{a^2} + 30\frac{Pa}{a^3} = 50\frac{P}{a^2} \Rightarrow \sigma_e^{VM} = 50\frac{P}{a^2}$$

$$z = 0 \Rightarrow \sigma_e^{VM} = \sqrt{\left(20\frac{P}{a^2}\right)^2 + \frac{27P^2}{16a^4}} = \frac{P}{a^2}\sqrt{\left(400\cdot\frac{16}{16} + \frac{27}{16}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{6427}{16}}\frac{P}{a^2} \approx 20\frac{P}{a^2}$$

$z = \frac{a}{2} \Rightarrow \sigma_e^{VM} = \ldots \approx 35\frac{P}{a^2} = \sigma(a/2)$ dvs skjuvspänningens

effekt är försumbar i alla fall $\Rightarrow$

$\sigma_e^{VM} \approx \sigma(z) \Rightarrow$ max vid $z_{max} = \pm a$

Spänningen är konstant i y-led $\Rightarrow$

$\max(\sigma_e^{VM}) = 50\frac{P}{a^2}$ och uppkommer i punkterna

$P(x=0, y, z=\pm a) = P(0, y, \pm a)$