

# TENTAMEN

## HÅLLFASTEHTSLÄRA OCH MASKINELEMENT – TME061

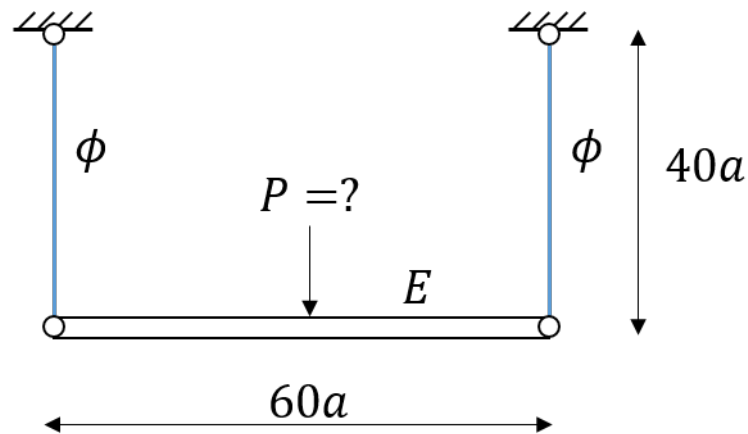
<b>Tid</b>	14.00–18.00
<b>Ansvarig lärare</b>	Jim Brouzoulis. Tel 772 2253
<b>Hjälpmedel</b>	<ul style="list-style-type: none"><li>– ”Formelsamling i hållfasthetslära”, Tillämpad mekanik, Ekh, Hansbo och Brouzoulis</li><li>– ”Handbok och formelsamling i hållfasthetslära”, Inst. för hållfasthetslära, KTH, valfri upplaga.</li><li>– ”Lärobok i Maskinelement” eller ”Kompendium i Maskinelement”, Mägi, M., Melkersson, K.</li><li>– ”SKF Katalog för rullningslager”</li><li>– ”Formelsamling i maskinelement (Kapitel 13)”</li><li>– Valfri typgodkänd kalkylator</li></ul> <p>Egna marginalanteckningar får finnas i formelsamlingarna och ”Lärobok i Maskinelement” eller ”Kompendium i Maskinelement”, dock inga lösta exempel eller härledningar. I övrigt tillåts inga egna anteckningar.</p>
<b>Resultat</b>	Anslås senast 2016-10-19 på kurshemsidan
<b>Granskning</b>	Avdelningen för Material och Beräkningsmekanik: 2016-10-19, kl. 12.30–13.00 och 2016-10-20, kl. 12.30–13.00.
<b>Poängbedömning</b>	Varje uppgift kan ge fem poäng, d.v.s. max 25 poäng på tentamen och halva poäng delas ut. För att få poäng på en uppgift måste lösningen vara läslig och uppställda ekvationer klart motiverade. Vidare skall entydiga beteckningar användas och tydliga figurer ritas. Tänk på att kontrollera dimensioner och rimlighet i svaren.
<b>Betygsgränser</b>	0 - 9.5p = underkänt 10 - 14.5p = betyg 3 15 - 19.5p = betyg 4 20p – 25p = betyg 5 Minst 6p måste uppnås på delen hållfasthetslära och 4p på delen maskinelement för att få ett godkänt betyg.


## UPPGIFT 1

En träbalk med rektangulärt tvärsnitt  $b \times h$  hänger i två vajrar med cirkulärt tvärsnitt med diameter  $\phi$ . Balken belastas av en punktlast  $P$  precis på mitten av balken.

Tillåten normalspänning i vajrarna är  $\sigma_v$  medan tillåten normalspänning i balken är  $\sigma_b$ .

Bestäm största tillåtna last  $P$  som konstruktionen kan bära. (5p)



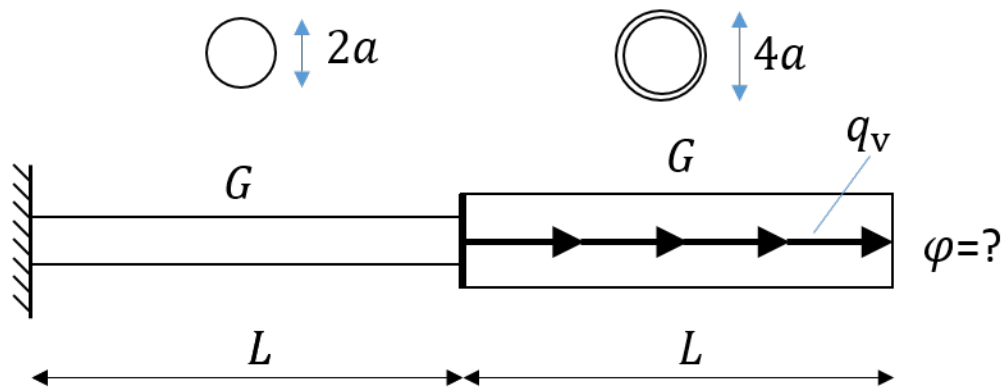
Brädans tvärsnitt  a  
5a

Givna data:  $a = 0.03$  m,  $\phi = 7$  mm,  $\sigma_v = 110$  MPa,  $\sigma_b = 200$  MPa,  $E = 5$  GPa.

## UPPGIFT 2

Två axlar är sammankopplade enligt figuren nedan. Den höra delen belastas av ett konstant utbrett vridande moment  $q_v$  [Nm/m]. Den vänstra axeldelen är massiv och den högra kan anses som tunnväggig med godstjocklek  $t = a/4$ .

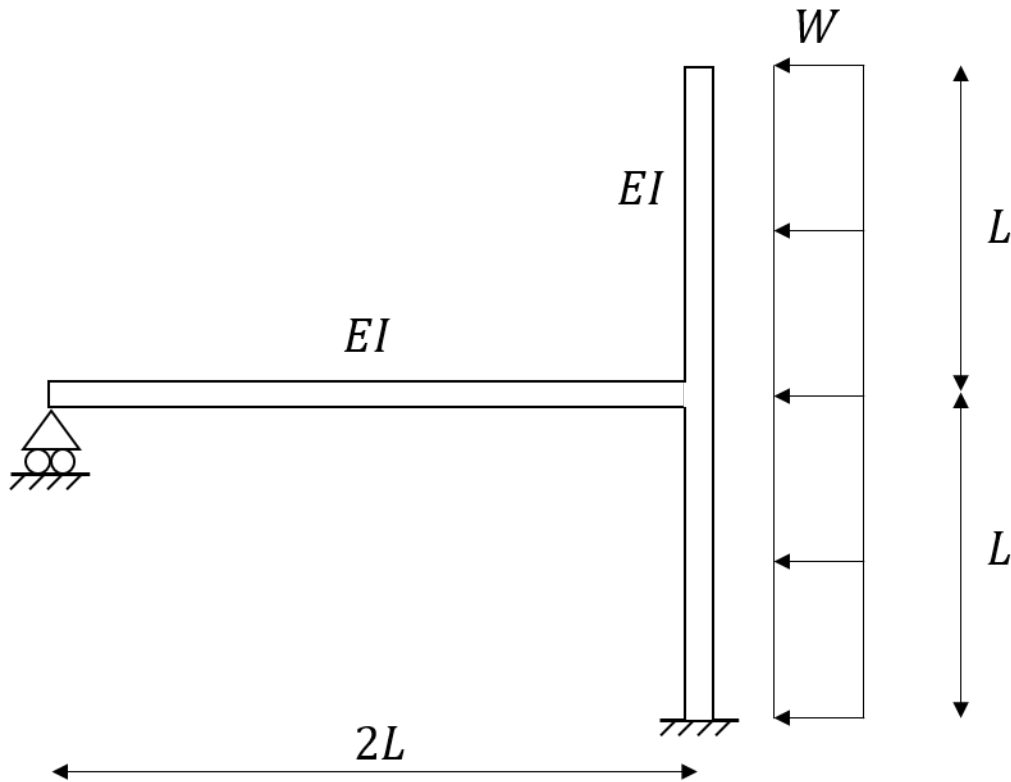
Bestäm den fria delens rotation  $\varphi$ . (5.0p)



## UPPGIFT 3

En ram enligt figuren nedan belastas av en konstant vindlast  $W$  [N/m] och har dimensioner enligt figuren. Alla delarna har böjstyvheten  $EI$ .

Beräkna och rita momentdiagram över hela ramen. (5.0 p)



## UPPGIFT 4

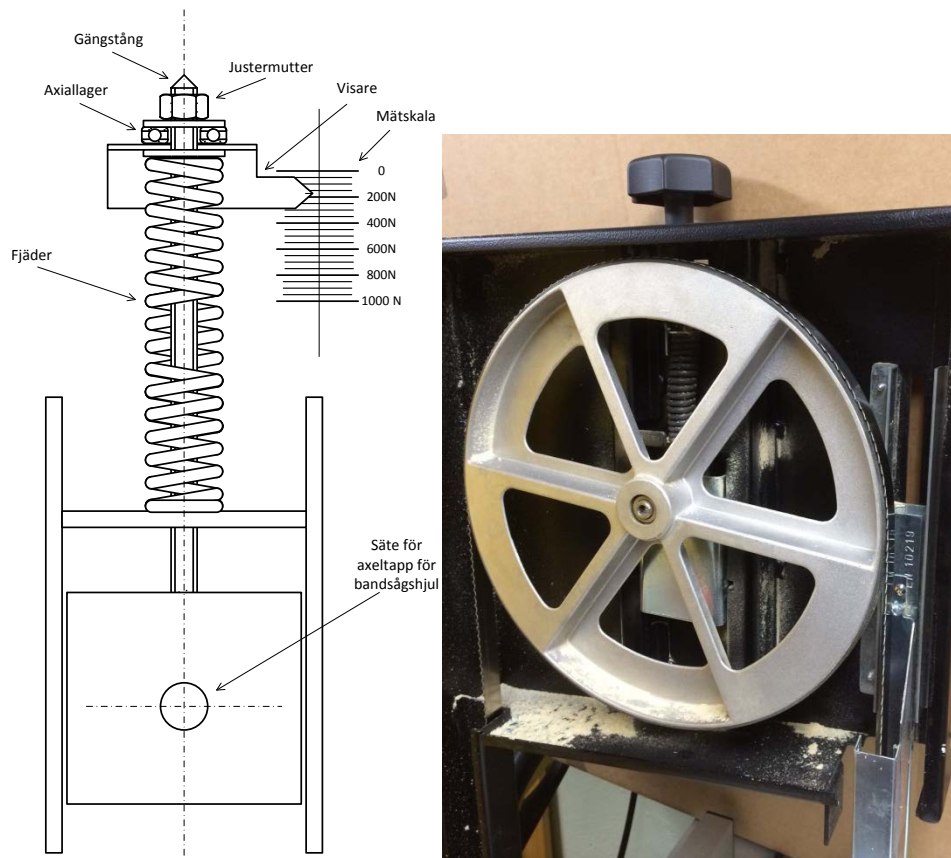
Ett spårkullager SKF 6210 i Explorer-utförande har dimensionerats för att hålla ett visst antal timmar vid varvtalet 800 rpm (varv/min), en radialkraft på 10000 N, en axialkraft på 3000 N, smörjmedelsviskositet  $\nu = 18 \text{ mm}^2/\text{s}$  och normal föroreningsgrad.

- a) Bestäm livslängden (enligt SKF:s nya teori). **(3.0 p)**
- b) I efterhand har det visat sig att axialkraften är dubbelt så stor d.v.s. 6000 N.

Bestäm den nya livslängden (enligt SKF:s nya teori). **(2.0 p)**

## UPPGIFT 5

Bandsågsbladet på bandsågen är också en slags remtransmission. För att motoreffekten skall kunna föras över till bandsågsbladet krävs förspänning. Det krävs dessutom förspänning för att bladet skall vara så styvt som möjligt för att sågsnittet skall bli bra (så rakt som möjligt vid klyvning av arbetsstycken). Förspänningen åstadkoms med hjälp av en fjäder och konstruktionen framgår av figuren.



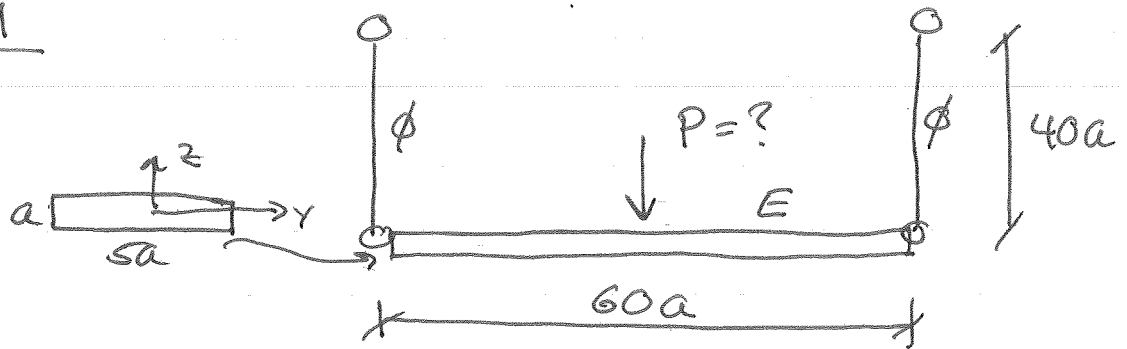
Dimensionera fjädern. De uppgifter som efterfrågas är tråddiameter, antal verksamma varv samt fri längd (minsta för att bottning ej skall uppstå). (5 p)

- Fjädern skall ha en karaktäristik som ger 1000N förspänning vid 43mm kompression.
- Fjädern tillverkas av fjäderstål med skjuvmodulen 71GPa. Max tillåten spänning i fjädern är 845 MPa.

Obs! Endast vridskjuvspänning behöver beaktas.

- Välj tråddiameter 3.50mm.
- Maximal ytterdiameter får vara 21mm.
- Av monteringskäl får maximal fri längd vara högst 140mm.

# Uppgift 1



Bestäm största  $P$  som konstruktionen kan bära  
 $a = 0,03 \text{ m}$  ,  $\phi = 0,007 \text{ m}$  ,  $\sigma_v = 110 \text{ MPa}$  ,  $\sigma_b = 200 \text{ MPa}$

## Lösningssång

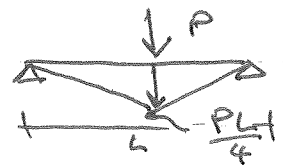
- Bestäm snittkrafterna som uppkommer i termer av  $P$
- Relatera dessa till max tillåten spänning
- Bestäm  $P_v$  och  $P_b \rightarrow \text{max } P$

## Lösning

• Strukturen och lasten är symmetrisk  $\Rightarrow$

$$- N_v = P/2 = N_{\text{max}}$$

$$- M_b = \frac{P \cdot L}{4} = \frac{P \cdot 60a}{4} = 15Pa = M_{\text{max}}$$



• Normalspänningar vajer:

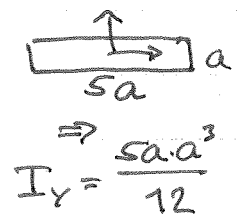
$$\sigma_{\text{vajer}} = \frac{N_v}{A} = \frac{P/2}{\pi \phi^2 / 4} = \frac{2P}{\pi \phi^2}$$

$$\sigma_{\text{vajer}} < \sigma_v \Rightarrow \frac{2P}{\pi \phi^2} < 110 \cdot 10^6 \Rightarrow P_v < 110 \cdot 10^6 \frac{\pi (0,007)^2}{2} \approx 8,5 \text{ kN}$$

• Normalspänningar balk:

$$\sigma_{\text{balk}} = \frac{M_b}{I_y} z \Rightarrow \frac{15Pa}{\frac{sa^4}{12}} \left(\frac{a}{2}\right) = 18 \frac{P}{a^2}$$

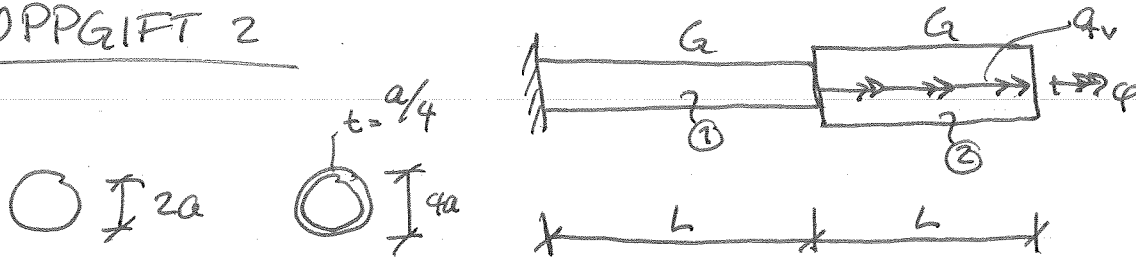
$\uparrow z_{\text{max}}$



$$\sigma_{\text{balk}} < \sigma_b \Leftrightarrow 18 \frac{P}{a^2} < \sigma_b \Rightarrow P_b < \frac{\sigma_b a^2}{18} = \frac{200 \cdot 10^6 \cdot 0,03^2}{18} = 10 \text{ kN}$$

$$P_v < P_b \Rightarrow P_{\text{max}} = P_v = 8,5 \text{ kN}$$

# UPPGIFT 2



Bestäm den fria delens rotation  $\varphi$  (högra)

## Lösningsgång:

Rotationen hos den högra delen kan fås på olika sätt. Enklast är att se den som en egen del med en initial rotation vid övergången mellan del 1 & 2.  
 - Vi kan se detta från axelns diff. eqv.

$$-(Gk_v \varphi')' = -Gk_v \varphi'' = q_v \Rightarrow \varphi'' = -\frac{q_v}{Gk_v} \Rightarrow$$

$$\varphi' = -\frac{q_v}{Gk_v} z + C_1 \Rightarrow \varphi = -\frac{q_v}{Gk_v} \frac{z^2}{2} + C_1 z + C_2$$

Randvillkor:

$$\varphi(0) = \varphi_1, \quad M_v(L) = Gk_v \varphi'(L) = 0 \Rightarrow \varphi'(L) = 0$$



$$\varphi(0) = \varphi_1 \Rightarrow C_2 = \varphi_1 //$$

$$\varphi'(L) = 0 \Rightarrow \cancel{\frac{q_v}{Gk_v} L + C_1} - \frac{q_v}{Gk_v} \cdot L + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{q_v L}{Gk_v}$$

$$\Rightarrow \varphi(z) = -\frac{q_v z^2}{2Gk_{v2}} + \frac{q_v L}{Gk_{v2}} z + \varphi_1$$

Bestäm  $\varphi_1$  (den vänstra delens ändrotation)

$$\frac{\varphi_1}{L} Gk_{v1} = M_v = q_v L \Rightarrow \varphi_1 = q_v \frac{L^2}{Gk_{v1}}$$



$$\Rightarrow \varphi(z) = -\frac{q_v z^2}{2Gk_{v2}} + \frac{q_v L}{Gk_{v2}} z + q_v \frac{L^2}{Gk_{v1}}$$

$$\Rightarrow \varphi(z) = -\frac{q_v z^2}{2Gk_{v2}} + \frac{q_v L}{Gk_{v2}} z + q_v \frac{L^2}{Gk_{v1}}$$



$$\cdot K_{v1} = \frac{\pi}{2} (b^4 - a^4) = \frac{\pi}{2} a^4$$

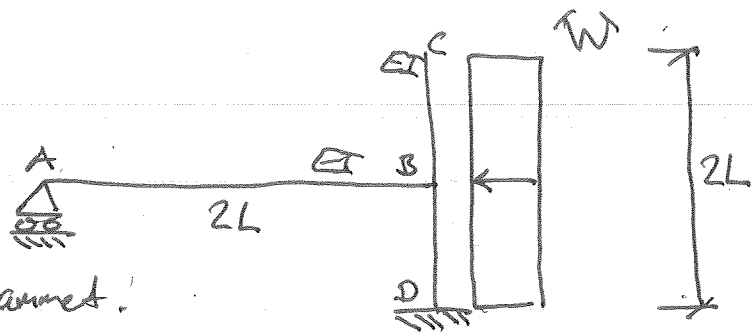
$$\cdot K_{v2} = \frac{\pi d^3 t}{8} = \frac{\pi (4a)^3 \frac{a}{4}}{8} = 4\pi a^4 = 8K_{v1}$$

$$\Rightarrow \varphi(z) = \frac{q_v L^2 z^2}{8G\pi a^4}$$

$$\varphi(z) = - \frac{q_v z^2}{2G \cdot 4\pi a^4} + \frac{q_v L z}{G \cdot 4\pi a^4} \cdot \frac{z}{2} + \frac{q_v L^2}{G \frac{\pi}{2} a^4} \cdot \frac{16}{16}$$

$$= \frac{q_v L^2}{8G\pi a^4} \left( -\left(\frac{z}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{z}{L}\right) + 16 \right) //$$

# UPPGIFT 3

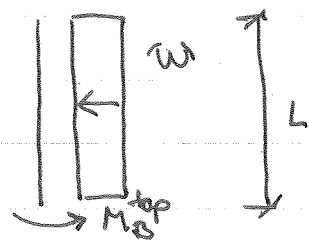


Bestäm momentdiagrammet!

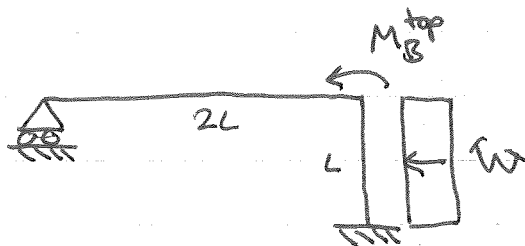
- Strukturen är statiskt obestämd, vi använder vinkeländringsmetoden

- Studera först delen BC

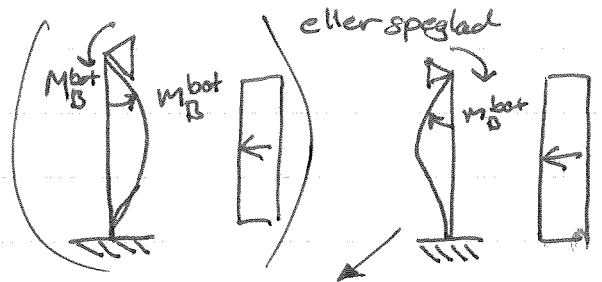
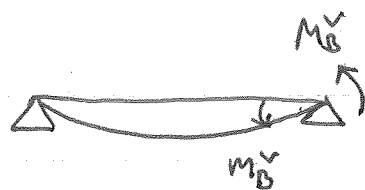
$$M_B^{\text{top}} = w \frac{L^2}{2}$$



- Ersätt delen BC med detta moment  $\Rightarrow$



Dela upp strukturen i två delar och teckna vinkeln vid B.



$$M_B^{\text{V}} = "m_2" = M_B^{\text{V}} \frac{2L}{3EI}$$

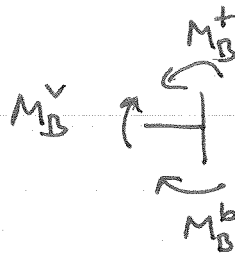
$$m_B^{\text{bot}} = "m_1" = M_B^{\text{bot}} \frac{L}{4EI} + \frac{wL^3}{48EI}$$

Deformations samband

$$M_B^{\text{V}} = -m_B^{\text{bot}} \Rightarrow M_B^{\text{V}} \frac{2L}{3EI} + M_B^{\text{bot}} \frac{L}{4EI} + \frac{wL^3}{48EI} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{2}{3} M_B^{\text{V}} + \frac{1}{4} M_B^{\text{bot}} + \frac{wL^2}{48} = 0 \quad (*)$$

# Jämvikt vid B



$$M_B^v + M_B^b = M_B^+$$

$$\begin{aligned} (*) \Rightarrow & \frac{2}{3} (M_B^+ - M_B^b) + \frac{1}{4} M_B^b + \frac{WL^2}{48} \\ & = \frac{2}{3} \left( \frac{WL^2}{2} - M_B^b \right) + \frac{1}{4} M_B^b + \frac{WL^2}{48} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$M_B^b \left( -\frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 3} \right) = -\frac{WL^2}{48} - \frac{2}{3} \frac{WL^2}{2} \cdot \frac{8}{8} = -\frac{17}{48} WL^2$$

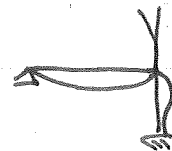
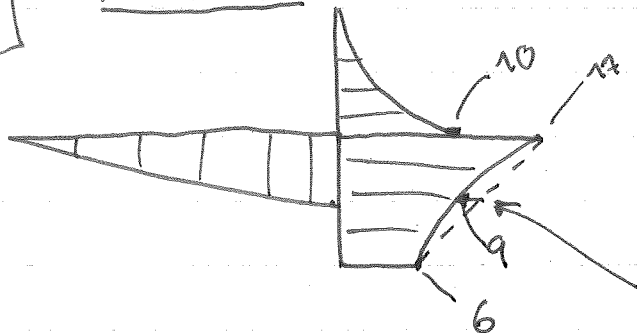
$$\Rightarrow M_B^b = \dots = \frac{17}{20} WL^2$$

$$\Rightarrow M_B^v = \frac{WL^2}{2} - M_B^b = \dots = -\frac{7}{20} WL^2$$

$$\begin{aligned} M_D &= -\frac{M_B^b}{2} + \frac{WL^2}{8} = -\frac{17WL^2}{2 \cdot 20} + \frac{WL^2}{8} \cdot \frac{5}{5} = \dots \\ &= -\frac{12}{40} WL^2 = -\frac{6}{20} WL^2 = -\frac{3}{10} WL^2 \end{aligned}$$

$$\times \left[ \frac{WL^2}{20} \right]$$

Momentdiagram



$$" \frac{17}{20} + \frac{6}{20} - \frac{5}{40} " = \frac{9}{20}$$

## 1. Rullningslager

Ett spårkullager SKF 6210 i Explorer-utförande har dimensionerats för att hålla ett visst antal timmar vid varvtalet 800 rpm (varv/min), en radialkraft på 10000 N, en axialkraft på 3000 N, smörjmedelsviskositet  $\nu = 18 \text{ mm}^2/\text{s}$  och normal föroreningsgrad.

- a) Bestäm livslängden (enligt SKF:s nya teori). (3p)
- b) I efterhand har det visat sig att axialkraften är dubbelt så stor dvs 6000 N. Bestäm den nya livslängden (enligt SKF:s nya teori). (2p)

### Lösning:

Lagerfakta för aktuellt lager, SKF 6210, från SKF-katalogen sid 328:

$$d = 50 \text{ mm}$$

$$D = 90 \text{ mm}$$

$$C = 37,1 \text{ kN}$$

$$C_0 = 23,2 \text{ kN}$$

$$P_u = 0,98 \text{ kN}$$

$$f_0 = 14$$

#### a) Bestäm livslängden (enligt SKF:s nya teori)

För att kunna bestämma lagrets livslängd behöver faktorn  $a_{SKF}$  först bestämmas.

$a_{SKF}$  avläses ur diagram 1, SKF sid 66, som kräver att man dels känner till  $\kappa$ , vilken fås ur diagram 5, SKF sid 72, dels känner till den ekvivalenta dynamiska lagerbelastningen  $P$ .

Bestämning av viskositetsförhållandet  $\kappa$ :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Lagrets medeldiameter} \\ d_m = 0,5(d + D) = 0,5(50 + 90) = 70 \text{ mm} \\ \text{Varvtal vid aktuell drift} \\ n = 800 \text{ rpm} \end{array} \right\} \Rightarrow \nu_1 = 18 \text{ mm}^2/\text{s}$$

Viskositetsförhållandet  $\kappa$  kan nu bestämmas som

$$\kappa = \frac{\nu}{\nu_1} = \frac{18}{18} = 1$$

*Bestämning av ekvivalenta dynamisk lagerbelastning P :*

Enligt SKF sid 316 ges lagrets ekvivalenta dynamiska lagerbelastning av

$$P = F_r \quad \text{när } F_a/F_r \leq e$$

$$P = X \cdot F_r + Y \cdot F_a \quad \text{när } F_a/F_r > e$$

Beräkningsfaktorn  $e$  måste alltså först bestämmas.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Tabell 8, SKF sid 315} \\ f_0 \frac{F_a}{C_0} = 14 \cdot \frac{3000}{23200} \approx 1,8 \end{array} \right\} \Rightarrow e = \{\text{Interpolation}\} \approx 0,32$$

$$\text{Detta ger att } \frac{F_a}{F_r} = \frac{3000}{10000} = 0,3 \leq e \Rightarrow P = F_r = 10000 \text{ N}$$

*Bestämning av kvoten  $\eta_c \frac{P_u}{P}$  :*

$$\left. \begin{array}{l} \text{Tabell 4, SKF sid 74:} \\ \text{Normalt rena förhållanden} \\ d_m = 70 \text{ mm} \end{array} \right\} \Rightarrow \eta_c = 0.50$$

$$\Rightarrow \eta_c \frac{P_u}{P} = 0,50 \cdot \frac{980}{10000} = 0,049$$

$a_{SKF}$  avläses till 1,1.

*Bestämning av lagerlivslängd:*

SKF:s nominella livslängd (SKF sid 65) ges av

$$L_{10m} = a_1 \cdot a_{SKF} \left( \frac{C}{P} \right)^p \quad \text{där } p = 3, \text{ ty kullager}$$

$$L_{10m} = 1 \cdot 1,1 \cdot \left( \frac{37100}{10000} \right)^3 \approx 56,17 \text{ milj varv}$$

**b) Bestäm den nya livslängden då axiallasten är dubbelt så stor, dvs 6000 N.**

Börjar med att bestämma den nya livslängden för lagret. För detta behövs emellertid den nya ekvivalenta dynamiska lagerbelastningen. Beräkningsfaktorn  $e$  måste därför först bestämmas för det nya driftförhållandet

$$\left. \begin{array}{l} \text{Tabell 5, SKF sid 299} \\ f_0 \frac{F_a}{C_0} = 14 \cdot \frac{6000}{23200} \approx 3,62 \end{array} \right\} \Rightarrow e = \{\text{Interpolation}\} \approx 0,384$$

$$\text{Detta ger att } \frac{F_a}{F_r} = \frac{6000}{10000} = 0,6 > e \Rightarrow P = X \cdot F_r + Y \cdot F_a$$

Beräkningsfaktorerna  $X$  och  $Y$  måste således även bestämmas.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Tabell 5, SKF sid 299} \\ f_0 \frac{F_a}{C_0} = 14 \cdot \frac{6000}{23200} \approx 3,62 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} X = \{\text{Antar normalt lagerglapp}\} = 0,56 \\ Y = \{\text{Interpolation}\} \approx 1,139 \end{array}$$

Den ekvivalenta dynamiska lagerbelastningen bestäms till

$$P = 0,56 \cdot 10000 + 1,139 \cdot 6000 = 12434 \text{ N}$$

Den nya ekvivalenta dynamiska lasten ger upphov till ett nytt  $a_{SKF}$  :

$$\left. \begin{array}{l} \eta_c \frac{P_u}{P} = 0,50 \cdot \frac{980}{12434} \approx 0,039 \\ \kappa = \frac{v}{v_1} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow a_{SKF} \approx 0,9$$

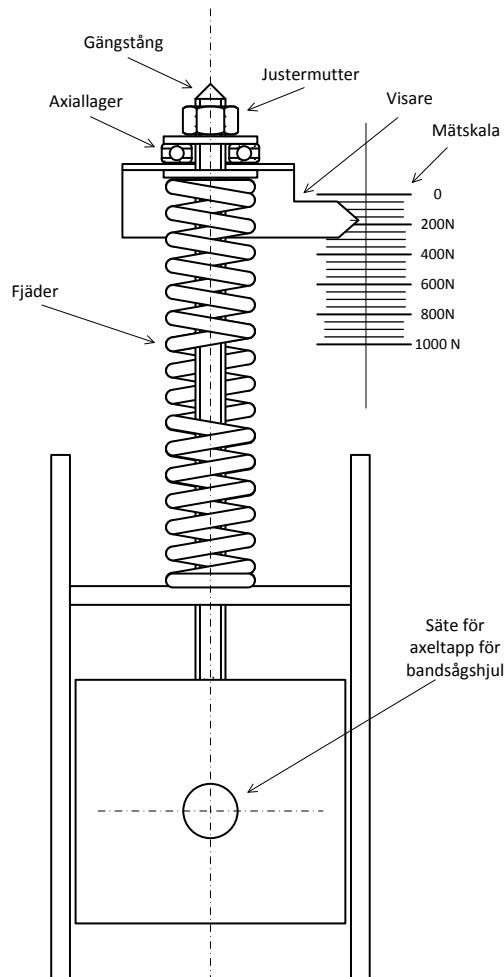
Den nya livslängden blir följaktligen

$$L_{10m} = 1 \cdot 0,9 \cdot \left( \frac{37100}{12434} \right)^3 \approx 23,90 \text{ milj varv}$$

## Skruvfjäder

Bandsågsbladet på bandsågen är också en slags remtransmission. För att motoreffekten skall kunna föras över till bandsågsbladet krävs förspänning. Det krävs dessutom förspänning för att bladet skall vara så styvt som möjligt för att sågnittet skall bli bra (så rakt som möjligt vid klyvning av arbetsstycken).

Förspänningen åstadkoms med hjälp av en fjäder och konstruktionen framgår av figuren.



Dimensionera fjädern. De uppgifter som efterfrågas är tråddiameter, antal verksamma varv samt fri längd (minsta för att botten ej skall uppstå). (10p)

- Fjädern skall ha en karaktäristik som ger 1000N förspänning vid 43mm kompression.
- Fjädern tillverkas av fjäderstål med skjuvmodulen 71GPa. Max tillåten spänning i fjädern är 845 MPa.  
Obs! Endast vridskjuvspänning behöver beaktas.
- Välj tråddiameter 3.50mm.
- Maximal ytterdiameter får vara 21mm.
- Av monteringskål får maximal fri längd vara högst 140mm.

## Lösning: (ME)

### Givet:

$$\Delta F = 1000 \text{ N}, \delta = 0.043 \text{ m}$$

Skjuvmodul för stål:  $G = 71 \text{ GPa}$

Fjäderkonstant [10]:

$$c = \frac{\Delta F}{\delta} = \frac{1000}{0.043} = 23256 \text{ N/mm}$$

*Dimensioneringsgång:*

- Tråddiametrar från 3 till 4 mm bör användas. Det är att rekommendera att utgå från en tråddiameter och sedan räkna ut medeldiameter  $D$  får maximal skjuvspänning.
- Utgående från fjäderdiameter  $D$  beräknas sedan antal varv  $n$  för den givna fjäderstyvheten.
- Slutligen bestäms  $l_0$  från kravet på bottning.

Fjäderens maximala medeldiameter [41]:

$$\tau_{\max} = \frac{8FD}{\pi d^3} \Rightarrow D = \frac{\pi d^3 \tau_{\max}}{8F}$$

Fjäderens ytterdiameter:

$$D_y = D + d = \frac{\pi d^3 \tau_{\max}}{8F} + d$$

Är  $D_y > D_{y,\max}$  sätts  $D_y = D_{y,\max}$ . I detta fall minskas även medeldiametern  $D$  motsvarande distans.

Antal varv, [39]:

$$c = \frac{Gd^4}{8n_v D^3} \Rightarrow n_v = \frac{Gd^4}{8cD^3}$$

Fri fjäderlängd [44]:

$$l_0 > 1,25(n+1)d + \delta$$

Ingen kontroll av knäckning behöver utföras eftersom fjädern är styrd av gängstången.



Gör en tabell. Prova med en tråddiameter mitt i intervallet (3.5mm).

		$D = \frac{\pi d^3 \tau_{\max}}{8F}$		$n_v = \frac{Gd^4}{8cD^3}$		$l_0 > 1,25(n+1)d + \delta$	
d	Dmax	D	nv	l0,min	Kommentar		
0,0030	0,0180	0,0090	42,98145	0,2079	för lång	orimligt antal fjädervarv	
0,0031	0,0179	0,0099	36,48202	0,1882	för lång	orimligt antal fjädervarv	
0,0032	0,0178	0,0109	31,12701	0,1715	för lång	orimligt antal fjädervarv	
0,0033	0,0177	0,0119	26,6881	0,1572	för lång	orimligt antal fjädervarv	
0,0034	0,0176	0,0130	22,98755	0,1449	för lång		
0,0035	0,0175	0,0142	19,88598	0,1344	rimlig		
0,0036	0,0174	0,0155	17,27328	0,1252	rimlig		
0,0037	0,0173	0,0168	15,06186	0,1173	rimlig		
0,0038	0,0172	0,0182	13,18164	0,1104	otillåtet ty D>Dmax		
0,0039	0,0171	0,0197	11,57615	0,1043	otillåtet ty D>Dmax		
0,0040	0,0170	0,0212	10,1997	0,0990	otillåtet ty D>Dmax		

**SVAR:** Konstruera fjädern av en tråd med 3.7 mm tråddiameter, välj 15.1 varv. Det ger en fri längd på 117 mm.