

Tentamen: Hållfasthetslära och maskinelement, TME061

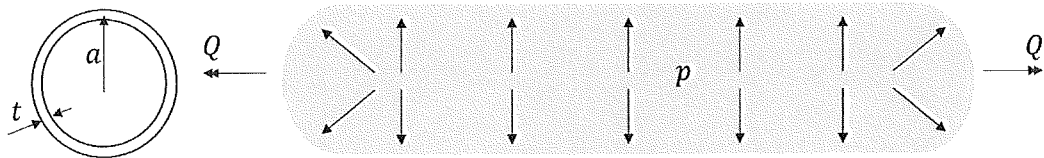
- **Tid:** 08.30-12.30
- **Ansvarig lärare under tentamen:** Jim Brouzoulis, tel 772 22 53
- **Hjälpmedel:**
 - ”Formelsamling i hållfasthetslära”, Tillämpad mekanik, Ekh, Hansbo och Brouzoulis
 - ”Handbok och formelsamling i hållfasthetslära”, Inst. för hållfasthetslära, KTH, valfri upplaga.
 - ”Lärobok i Maskinelement” eller ”Kompendium i Maskinelement”, Mägi, M., Melkersson, K.
 - ”SKF Katalog för rullningslager”
 - ”Formelsamling i maskinelement (Kaptiel 13)”
 - Valfri typgodkänd kalkylator
 - Egna marginalanteckningar får finnas i formelsamlingarna och ”Lärobok i Maskinelement” eller ”Kompendium i Maskinelement”, dock inga lösta exempel eller härledningar. I övrigt tillåts inga egna anteckningar.
- **Lösningar:** Anslås senast 2016-06-01 på kurshemsidan.
- **Resultat:** Anslås senast 2016-06-17 på kurshemsidan.
- **Granskning:** Avdelningen för Material och Beräkningsmekanik 2016-06-17, kl. 12.00-13.00 och 2016-09-05, kl. 12.00-13.00.
- **Poängbedömning:** Vardera uppgift kan ge fem poäng, dvs max 25 poäng och halva poäng delas ut. För att få poäng på en uppgift måste lösningen vara läslig och uppställda ekvationer klart motiverade. Vidare skall entydiga beteckningar användas och tydliga figurer ritas. Tänk på att kontrollera dimensioner och rimlighet i svaren.
- **Betygsgränser:** 0-9.5p=underkänt, 10-14.5p= betyg 3, 15-19.5p= betyg 4, 20p- =betyg 5. Minst 6p måste uppnås på delen hållfasthetslära och 4p på delen maskinelement för att få ett godkänt betyg.

Uppgift 1

En sluten tunnväggig cylindrisk trycktank belastas av ett inre övertryck $p = 9$ MPa och ett vridande moment $Q = \sqrt{2}\pi a^3 p$ i vardera ände.

Materialet kan beskrivas som linjärelatiskt med sträckgränsen $\sigma_y = 240$ MPa. För en punkt på mantelytan, bestäm om tanken kommer plasticera enligt Trescas flytkriterie. (5.0p)

Övrig data: medelradien $a = 200$ mm och godstjockleken $t = 10$ mm.

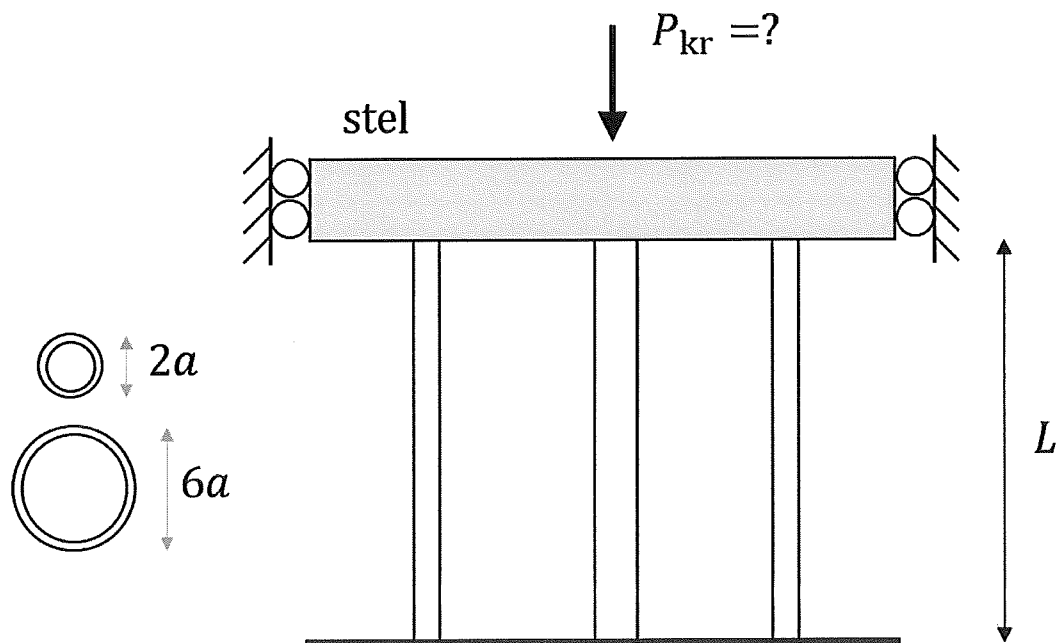


Uppgift 2

En stel balk bärs upp av tre cylindriska rör som kan antas vara fast inspända i bägge ändar. Bestäm den kritiska lasten P_{kr} då strukturen blir instabil. (5.0p)

Alla rör kan antas vara tunnväggiga och de två yttre har en medeldiameter på $2a$ och röret i mitten har en medeldiameter på $6a$. Alla rören har längden $L=80a$ och rörtjockleken $t = a/10$.

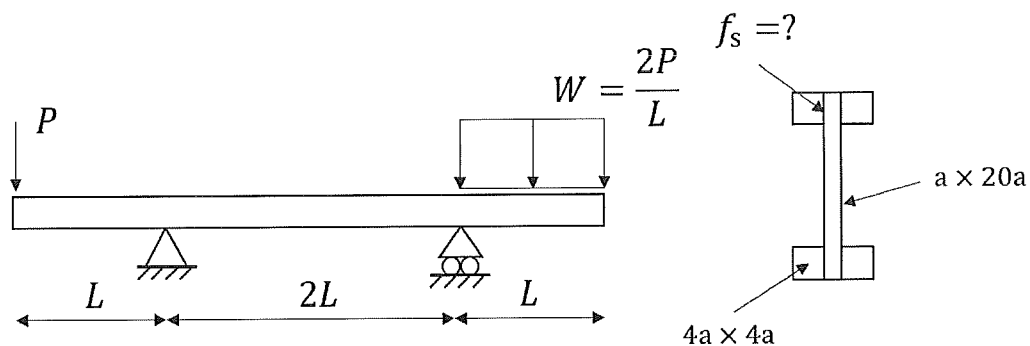
Övrig data: avståndet $a = 20$ mm och elasticitetsmodulen $E = 210$ GPa.



Uppgift 3

En fritt upplagd balk i trä belastas enligt figuren nedan. Balken är konstruerad genom att limma träreglar på en träskiva enligt figuren.

Bestäm nödvändig skjuvhållfasthet f_s [Pa] som limmet mellan reglarna och skivan måste ha för att klara belastningen på balken. (5.0p)



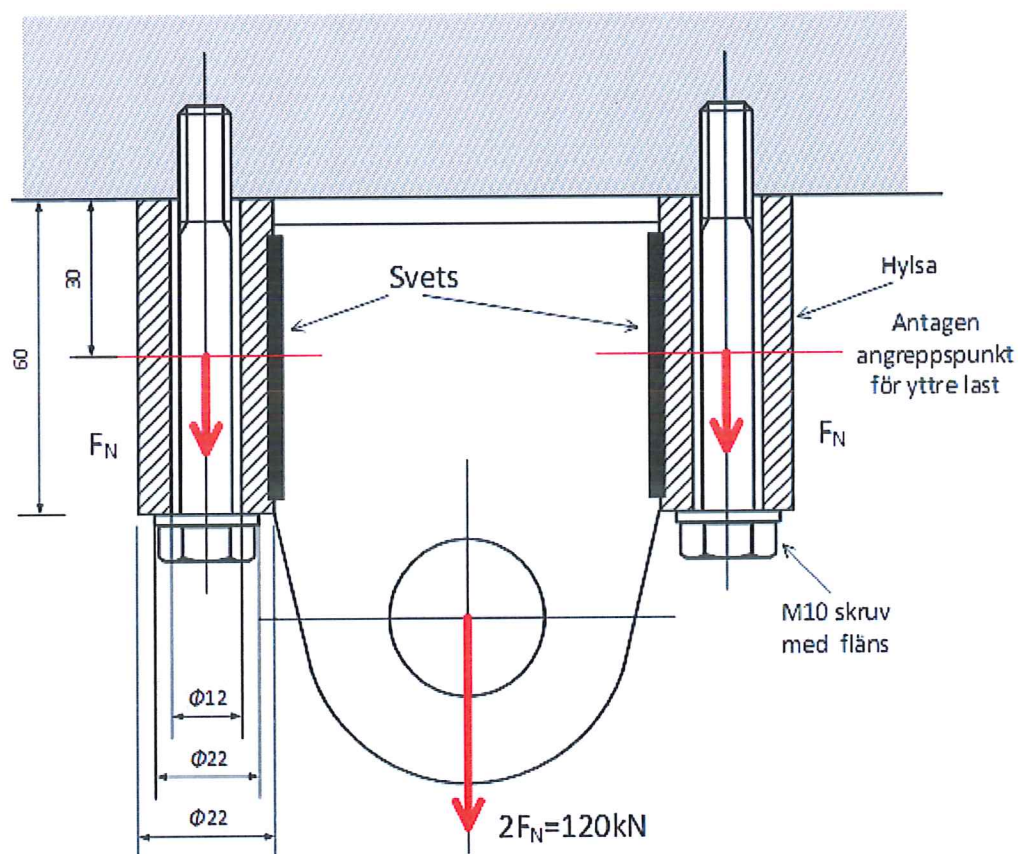
Övrig data: $a = 10 \text{ mm}$, $L = 1000 \text{ mm}$, $P = 3 \text{ kN}$

Uppgift 4

En lyftögla är utformad som ett skruvförband är utformat enligt figur och skall kunna belastas med 120 kN utan att det glappar.

- Bestäm erforderlig förspänning F_0 i skruvarna.
- Bestäm erforderligt åtdragningsmoment $M_{\text{åt}}$ för varje skruv.

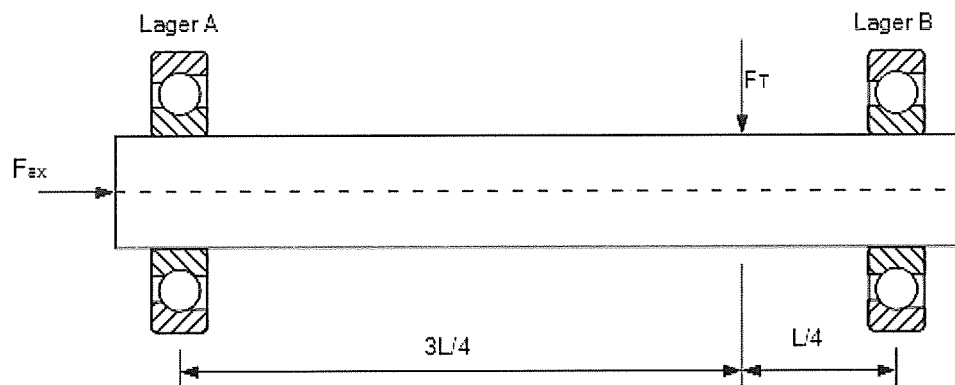
Den yttre lasten antas angripa mitt på de två hylsorna enligt figur (lasten kan alltså dels upp i två laster som flyttas till hylsorna). Friktionstalet i alla kontakter antas vara 0.15. Alla komponenter är tillverkade av stål med $E = 210 \text{ GPa}$. (5.0p)



Uppgift 5

En axel är lagrad med två likadana kullager av typen SKF61910. Axeln belastas med en varierande last $F_T = 5200$ N och en konstant axialkraft $F_{ax} = 1520$ N. Hela axialkraften tas upp av lager B. Axeln varvtal är 300 RPM

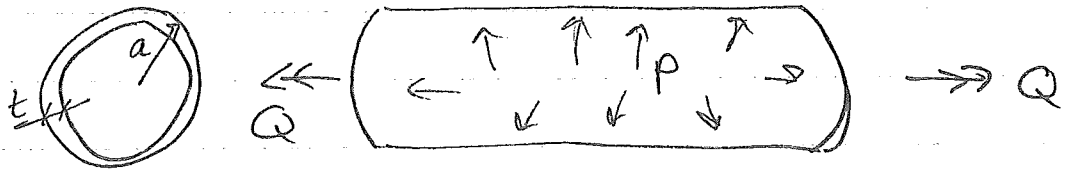
Lagren smörjs av olja med smörjmedelsviskositet $\nu = 18$ mm²/s och normal föroreningsgrad.



- Bestäm nominell livslängd för varje enskilt lager. (3.0p)
- Bestäm livslängden för lagerkomplexet. (2.0p)

UPPGIFT 1

$$\sigma_y = 240 \text{ MPa}$$



Beräkna σ_e^T .

Behöver beräkna huvudspänningar först.

Ängpanneformlerna:

$$\sigma_\varphi = \frac{pa}{t} \quad \sigma_z = \frac{pa}{2t} \quad \sigma_r \approx 0$$

Spänning pga vridning

Jmv: $Q \leftarrow \quad \rightarrow M_v$
 $\Rightarrow: M_v = Q$

$$\tau_{\varphi z} = \left\{ \begin{array}{l} \text{formel-} \\ \text{samling} \end{array} \right\} = \frac{M_v}{2\pi a^2 t} = \frac{\sqrt{2}\pi a^3 p}{2\pi a^2 t} = \frac{\sqrt{2}ap}{2t}$$

$$\text{Spänningstillståndet: } S = \begin{pmatrix} \sigma_\varphi & \tau_{\varphi z} \\ \tau_{\varphi z} & \sigma_z \end{pmatrix} = \frac{ap}{2t} \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Huvudspänningar:

$$\begin{aligned} \sigma_{1,2} &= \frac{1}{2} \frac{ap}{2t} (2+1) \pm \frac{ap}{2t} \sqrt{\left(\frac{2-1}{2}\right)^2 + (\sqrt{2})^2} \\ &= \frac{3ap}{4t} \pm \frac{ap}{2t} \sqrt{\frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{4}{4}} = \frac{3ap}{4t} \pm \frac{ap}{2t} \cdot \frac{3}{2} = \begin{cases} \frac{3ap}{2t} = \sigma_1 \\ 0 = \sigma_2 \end{cases} \end{aligned}$$

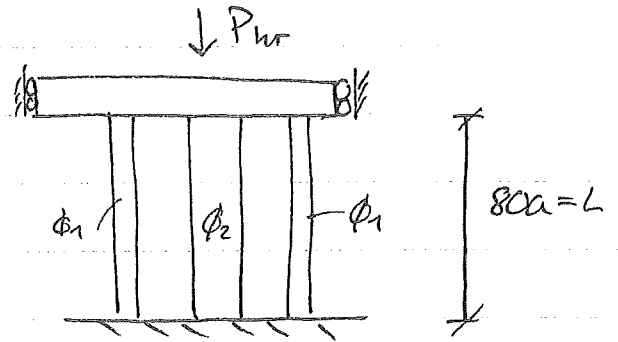
$$\text{Effektivspänning: } \sigma_e^T = \dots = |\sigma_1| = \frac{3ap}{2t} = \left\{ \begin{array}{l} \text{num.} \\ \text{värden} \end{array} \right\} = 270 \text{ MPa}$$

$\sigma_e^T > \sigma_y$ d.v.s. tanken kommer plasticera.

UPPGIFT 2

$$\phi_1 = 2a, \phi_2 = 6a$$

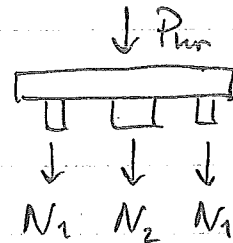
$$t = \frac{a}{10}$$



Lösning: Varje cylinder/pelare har en kritisk last som motsvaras av P_{kr}^{E4} men vi behöver bestämma normalkraftsfördelningen först för att kunna relatera till yttre last.

Jämvikt:

$$\downarrow: 2N_1 + N_2 = -P_{kr}$$



Deformation: samma deformation i alla stänger $\Rightarrow$

$$n_1 = n_2$$

$$\text{Material: } n = \frac{NL}{EA} \Rightarrow n_1 = \frac{N_1 L}{EA_1} \quad n_2 = \frac{N_2 L}{EA_2}$$

$$\text{Mat + Def} \Rightarrow \frac{N_1 L}{EA_1} = \frac{N_2 L}{EA_2} \Leftrightarrow N_1 = \frac{A_1}{A_2} N_2$$

$$\Rightarrow +\sum F_v \Rightarrow 2 \cdot \frac{A_1}{A_2} N_2 + N_2 = N_2 \left(\frac{2A_1}{A_2} + \frac{A_2}{A_2} \cdot 1 \right) = -P_{kr} \Leftrightarrow$$

$$N_2 = -P_{kr} \frac{A_2}{2A_1 + A_2} \Rightarrow N_1 = -P_{kr} \frac{A_1}{2A_1 + A_2}$$

$$\text{Kontroll: } 2N_1 + N_2 = -P_{kr} \frac{2 \cdot A_1 + A_2}{2A_1 + A_2} = -P_{kr} \quad \text{ok!}$$

$$A_1 = 2a \cdot \pi t \quad A_2 = 6a \cdot \pi t = 3A_1 \Rightarrow N_1 = -P_{kr} \cdot \frac{1}{5} \quad N_2 = -P_{kr} \cdot \frac{3}{5}$$

Knäckningslast

Pelarna knäcker som Euler 4:



$$P_{kr}^{E4} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2}$$

Varje pelare har olika normalkrafter och olika kritiska knäcklaster $\Rightarrow$ studera alternativen.

$$I_1 = \frac{\pi d^3 t}{8} = \frac{\pi (2a)^3 \frac{a}{10}}{8} = \frac{\pi a^4}{10}$$

$$I_2 = \frac{\pi (6a)^3 \frac{a}{10}}{8} = 27 \frac{\pi a^4}{10} = 27 \cdot I_1$$

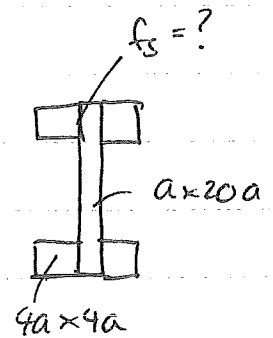
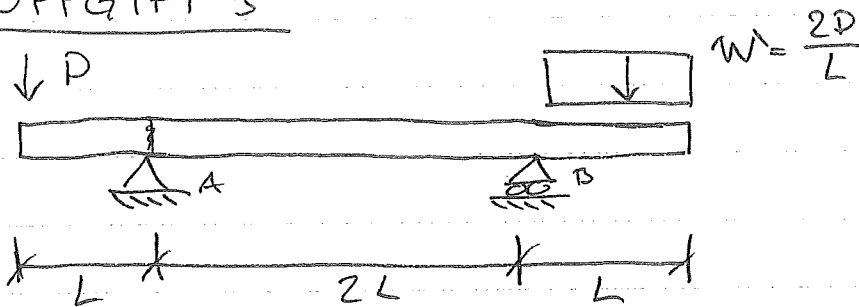
$$1) \quad N_1 = P_{kr1}^{E4} \Leftrightarrow P_{kr} \cdot \frac{1}{5} = \frac{4\pi^2 EI_1}{L^2} \Leftrightarrow P_{kr}^1 = \frac{20\pi^2 E \cdot \frac{\pi a^4}{10}}{(80a)^2} \\ = \dots \approx 814 \text{ kN} //$$

$$2) \quad N_2 = P_{kr2}^{E4} \Rightarrow P_{kr} \cdot \frac{3}{5} = \frac{4\pi^2 EI_2}{L^2} \Leftrightarrow P_{kr}^2 = \frac{520\pi^2 E \frac{\pi a^4}{10} \cdot 27}{(80a)^2} = \\ = \dots \approx 7,33 \text{ MN} //$$

Eftersom $P_{kr}^1 < P_{kr}^2$ är detta den kritiska lasten:

$$\text{Svar: } P_{kr} = P_{kr}^1 = 814 \text{ kN} //$$

UPPGIFT 3

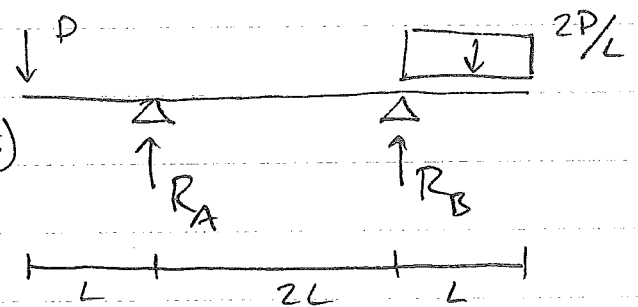


Bestäm slynhållfastheten i limmet f_s .

Lösning: Vi behöver bestämma ^{största} slynspänningen som uppkommer i fogen och därför behöver vi ta fram störst tvärkraft.

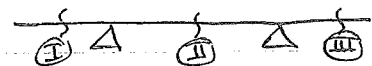
Jämvikt:

$$\begin{aligned} \sum \bar{A} \cdot R_B \cdot 2L + P \cdot L &= \frac{2P}{L} \cdot L \cdot \left(2L + \frac{L}{2}\right) \\ \Leftrightarrow R_B \cdot 2L &= 2PL \left(\frac{2}{2} + \frac{1}{2} - \frac{2}{2} \cdot 1\right) \Leftrightarrow \\ R_B &= \frac{1}{2} 4PL = 2PL \end{aligned}$$



$$\uparrow: R_A + R_B = P + \frac{2P}{L} \cdot L \Leftrightarrow R_A = P + 2P - 2P = P //$$

Tvärkraftsfördelning:

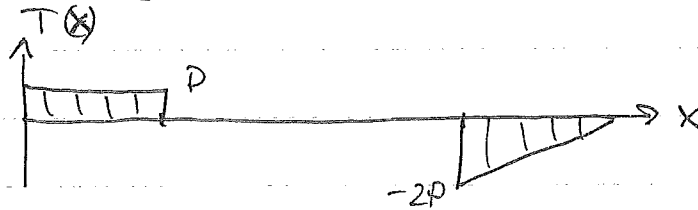


① $\downarrow P$ $\uparrow T_I(x)$
 $1 \cdot T_I(x) = P$

② $\downarrow P$ $\uparrow T_{II}(x)$ $\uparrow: T_{II}(x) = P - P = 0$

③ $\downarrow P$ $\uparrow T_{III}(x)$
 $\uparrow: T_{III}(x) = P - P - 2P + \frac{2P}{L}(x - 2L)$
 $= -2P + \frac{2P}{L}(x - 2L)$

T-Diagram (ej nödvändigt)



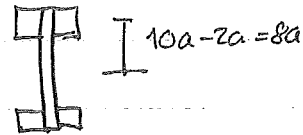
$$\text{Max } T = |R_B| = 2P //$$

Skjuvspänning

$$\tau = \frac{S_y T}{I_y b} \quad \text{med } b = 4a, T = 2P //$$

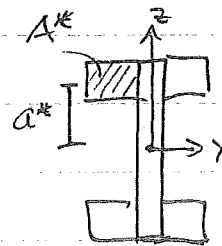
I_y :

$$I_y = \frac{a \cdot (20a)^3}{12} + 4 \left(\frac{4a(4a)^3}{12} + (4a)^2 \cdot 8a \right) = \dots = 4848a^4 //$$



S_y :

$$S_y = A^* \cdot a^* = (4a)^2 \cdot 8a = 128a^3 //$$



$$\Rightarrow \tau_{\text{lin}} = \frac{128a^3 \cdot 2P}{4848a^4 \cdot 4a} = \frac{4}{303} \cdot \frac{P}{a^2} = \dots \approx 0,4 \text{ MPa} //$$

Svar: Skjuvhållfastheten f_s måste minst vara 0,4 MPa //

Uppgift 4:

Styvheterna för de olika ingående delarna:

Materialet i förbandet antas vara stål: $E_{\text{stål}} = 210 \text{ GPa}$

Räknas som 2 stycken 30 mm hylsor:

ME A sidan 77 ger:

$$\begin{aligned} C_{\text{hylsa},30} &= \frac{E_{\text{hylsa}} \cdot 2 \cdot A_{\text{hylsa}}}{L_{\text{hylsa},35}} = \frac{E_{\text{hylsa}} \cdot 2 \cdot \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4}}{L_{\text{hylsa},35}} = \\ &= \frac{210 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot \pi(0,022^2 - 0,012^2)}{4 \cdot 0,03} = 3,73 \cdot 10^9 \text{ N/m} \end{aligned}$$

Styvheten för 2 stycken skruvar:

$$\begin{aligned} C_{\text{skruv}} &= \frac{E_{\text{skruv}} \cdot 2 \cdot A_{\text{skruv}}}{L_{\text{skruv}}} = \frac{E_{\text{skruv}} \cdot 2 \cdot \frac{\pi D_{\text{skruv}}^2}{4}}{L_{\text{skruv}}} = \\ &= \frac{210 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 0,010^2}{4 \cdot 0,06} = 5,49 \cdot 10^8 \text{ N/m} \end{aligned}$$

$$C_{s+} = \left(\frac{1}{C_{\text{hylsa},30}} + \frac{1}{C_{\text{skruv}}} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{3,73 \cdot 10^9} + \frac{1}{5,49 \cdot 10^8} \right)^{-1} = 2 \cdot 10^8 \text{ N/m}$$

$$C_{k+} = C_{\text{hylsa},30} = 3,73 \cdot 10^9 \text{ N/m}$$

Förspänning:

ME A ekv 1.22:

$$F_k = F_0 - \frac{C_k}{C_s + C_k} F_N \quad (1)$$

Kontaktkraften är noll när förbandet precis börjar glappa: $F_k = 0$

(1) ger då:

$$F_{0+} = \frac{C_{k+}}{C_{s+} + C_{k+}} F_{N+} = \frac{3,73 \cdot 10^9}{2 \cdot 10^8 + 3,73 \cdot 10^9} 120 \cdot 10^3 = 113893 \text{ N}$$

Skruvarna skall alltså ha förspänningen 113893 N (56946 N per skruv).

Åtdragningsmoment för varje skruv:

$$M_{tot} = F_{ax} (0,16P + 0,58\mu d_2 + \mu_b r_m)$$

Skruvdata enligt formelsamling:

$$P = 1,5mm, d_2 = 9,026mm, d_w = 14,47mm, d_h = 11mm$$

$$r_m = \frac{d_h + d_w}{4} = \frac{11 + 14,47}{4} = 6,36mm$$

$$M_{tot} = 56946 \cdot (0,16 \cdot 1,5 + 0,58 \cdot 0,15 \cdot 9,026 + 0,15 \cdot 6,36) \cdot 10^{-3} = 112,183Nm$$

- a) Skruvarna skall ha förspänning 56946N
- b) Åtdragningsmoment skall vara 112,183Nm

Uppgift 5:

Lagerdata för SKF61910

$$C = 14.6 \text{ kN}, C_0 = 11.8 \text{ kN}, f_0 = 16$$

a) Bestäm nominell livslängd för varje enskilt lager

Jämvikt ger

$$\uparrow: F_{rA} + F_{rB} - F_T = 0$$

$$M_A: \frac{3L}{4} F_T - L F_{rB} = 0$$

Detta ger:

$$F_{rB} = \frac{3}{4} F_T = 3900 \text{ N}$$

$$F_{rA} = \frac{1}{4} F_T = 1300 \text{ N}$$

Varje lagers enskilda livslängd ges av:

$$L_{10mX} = \left(\frac{C}{P} \right)^p \quad p = 3 \text{ för kullager}$$

Bestämning av den ekvivalenta lagerlasten (SKF sida 316)

Lager A tar endast upp radiell last och därmed gäller: $P_A = F_{rA}$

Lager B däremot tar upp både radiell och axiell last och därmed gäller:

$$P_B = \begin{cases} F_{rB} & \text{då } \frac{F_{aB}}{F_{rB}} \leq e \\ X F_{rB} + Y F_{aB} & \text{då } \frac{F_{aB}}{F_{rB}} > e \end{cases}$$

För att räkna ut a_{SKF} så behöver vi ta fram κ och η_c

$$\kappa = \frac{v}{v_1}$$

För att få fram v_1 så läser av diagram 5. För att möjliggöra detta måste även d_m räknas ut.

$$d_m = 0.5(d + D) = 0.5(50 + 72) = 61.$$

$$v_1 \approx 45 \text{ och } \kappa = \frac{18}{45} = 0.4$$

$\eta_c = 0.5$ ty normal föroreningsgrad

Livslängd lager A:

$$\eta_c \left(\frac{P_u}{P_A} \right) = 0.1923 \approx 0.2$$

Genom att läsa ut ur diagram 1, sid 66 får vi ut:

$$a_{SKF_A} = 0.7$$

$$L_{10m,A} = 0.7 \left(\frac{14600}{1300} \right)^3 = 992 \text{ miljoner varv}$$

Livslängd lager B:

Då uträkningen av den ekvivalenta lagerlasten P_B beror på relationen mellan F_{aB} och F_{rB} så måste faktorn e först bestämmas. Faktorn e ges av tabell 5 på sida 315 i SKF katalogen. Beräkningsfaktorerna beror på $f_0 \frac{F_{aB}}{C_0}$. För normalt lagerglapp fås:

$$f_0 \frac{F_{aB}}{C_0} = 16 \cdot \frac{1520}{11800} = 2.06 \Rightarrow e = 0.34; X = 0.56; Y = 1.31$$

Därmed får vi:

$$\frac{F_{aB2}}{F_{rB2}} = \frac{1520}{1300} \Rightarrow 0.389 > e \Rightarrow$$

$$P_{B1} = XF_{rB1} + YF_{aB} = 0.56 \cdot \frac{3 \cdot 5200}{4} + 1.31 \cdot 1520 = 4175.2 \text{ N}$$

$$\eta_c \left(\frac{P_u}{P_B} \right) = 0.0599 \approx 0.06$$

Genom att läsa ut ur diagram 1, sid 66 får vi ut:

$$a_{SKF_B} = 0.35$$

$$L_{10m,B} = 0.35 \left(\frac{14600}{4175} \right)^3 = 14.96 \text{ miljoner varv}$$

b)

$$L_R^K = \sum_{i=1}^n (L_{10}^{-K})_i = \left(992^{-(3/2)} + 14.96^{-(3/2)} \right)^{-1/1.5} = 14.94 \text{ miljoner varv}$$

$$K = 3/2$$

SVAR:

- a) Livslängden för lager A uppgår till 992 miljoner varv medan motsvarande för lager B uppskattas till 14.96 miljoner varv.
- b) Livslängden för lagerkomplexet är 14.94 miljoner varv.