

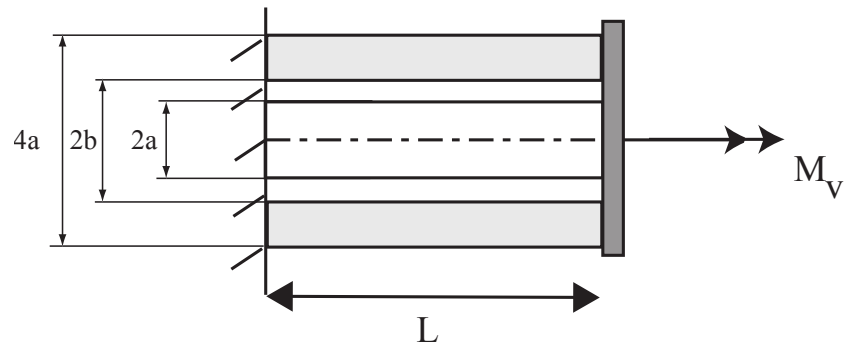
Tentamen: Hållfasthetslära och maskinelement, TME061

- **Tid:** 14.00-18.00, 2016-04-06
- **Ansvarig lärare under tentamen:** Jim Brouzoulis, tel 772 22 53
- **Hjälpmedel:**
 - ”Formelsamling i hållfasthetslära”, Tillämpad mekanik, Ekh, Hansbo och Brouzoulis
 - Valfri typgodkänd kalkylator.
 - ”Handbok och formelsamling i hållfasthetslära”, Inst. för hållfasthetslära, KTH, valfri upplaga.
 - ”Lärobok i Maskinelement” eller ”Kompendium i Maskinelement”, Mägi, M., Melkersson, K.
 - Egna marginalanteckningar får finnas i ”Lärobok i Maskinelement” eller ”Kompendium i Maskinelement”, dock inga lösta exempel eller härledningar. I övrigt tillåts inga egna anteckningar.
- **Lösningar:** Anslås senast 2016-04-18 på kurshemsidan.
- **Resultat:** Anslås senast 2016-04-18 på kurshemsidan.
- **Granskning:** Avdelningen för Material och Beräkningsmekanik 2016-04-18, kl. 12.30-13.00
- **Poängbedömning:** Vardera uppgift kan ge fem poäng, dvs max 25 poäng och halva poäng delas ut. För att få poäng på en uppgift måste lösningen vara läslig och uppställda ekvationer klart motiverade. Vidare skall entydiga beteckningar användas och tydliga figurer ritas. Tänk på att kontrollera dimensioner och rimlighet i svaren.
- **Betygsgränser:** 0-9.5p=underkänt, 10-14.5p= betyg 3, 15-19.5p= betyg 4, 20p- =betyg 5. Minst 6p måste uppnås på delen hållfasthetslära och 4p på delen maskinelement för att få ett godkänt betyg.

Uppgift 1

En axelkonstruktion består av två axlar: en massiv axel inuti ett tjockväggit rör. De båda axlarna är båda fast inspända i sina vänstra ändar och fastsatta i en stel skiva i sina högra ändar. Den stela skivan utsätts för ett vridande moment $M_v = 6.5 \cdot 10^3$ [Nm]. Båda axlarna är av samma material med skjuvmodulen $G = 81000$ [MPa]. Övriga data: $L = 120$ [mm], $a = 8$ [mm], $b = 10$ [mm].

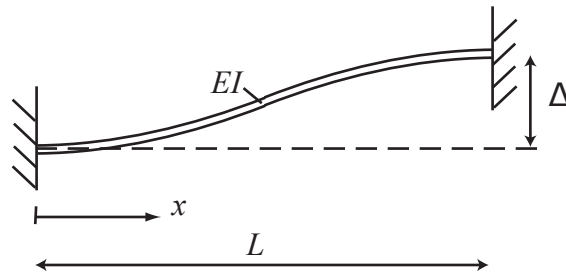
- (a) Bestäm hur mycket den stela skivan roterar. (3p)
- (b) Bestäm max vridspänning i de båda axlarna. (2p)



Uppgift 2

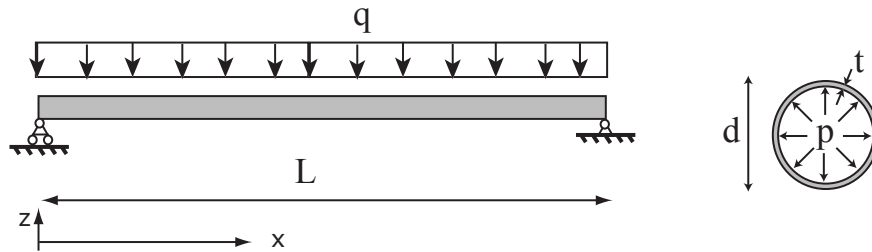
En balk med böjstyvhet EI är fast inspänd i båda sina ändar, se figuren. Det högra stödet förflyttas Δ uppåt i figuren.

- (a) Bestäm utböjningsformen $w(x)$. (3p)
- (b) Bestäm samtliga reaktionskrafter som uppkommer i balken, p.g.a. stödets förflyttning. Svara med riktningar och magnitud. (2p)



Uppgift 3

Ett förslag om att använda balkar med inre övertryck (dvs slutna tryckkärl) skall analyseras. Balken är fritt upplagd och belastas med den jämnt utbredda lasten q .



Bestäm för $x = L/2$, effektivspänningen enligt von Mises på ovansidan ($z = d/2$), mitt på ($z = 0$) samt undersidan ($z = -d/2$) av tryckkärls mantelyta. (5p)

Antag att böjskjuvspänningen kan försummas.

Givna data: $t = d/10$, $L = 200d$, $d = 30$ [mm], $p = 1000q/d$, $q = 0.4$ [MPa]

Uppgift 4

En ingenjör har precis konstruerat en maskin innehållande en axel som måste lagras. Denne hade redan ett lager hemma av typen SKF 61808 som användes till sin konstruktion. Efter noggranna beräkningar har ingenjören kommit fram till att lagret belastas med två krafter, radialkraften $F_r = 2500$ N och axialkraften $F_a = 1725$ N.

Ingenjören har vidare sett till att lagret arbetar under rena förhållande med ett smörjmedel som har viskositeten $70 \text{ mm}^2/\text{s}$. Axeln kommer att rotera med en hastighet av 200 rpm. Eftersom maskinen skall gå kontinuerligt behöver ingenjören veta hur många timmar lagret med 95%-ig sannolikhet håller; bestäm detta timantal. (5p)

Uppgift 5

En skruvfjäder till en välkänd kulspetspenna skall dimensioneras. Fjäder är placerad runt kulspetspennans stift som är 2.6 mm i diameter. Fjädern skall ha en lindningsdiameter så att dess innerdiameter inte understiger 2.8 mm (skall gå fri på stiftet) och en ytterdiameter som inte överstiger 4.8 mm (skall inte ta i höljets innersida).

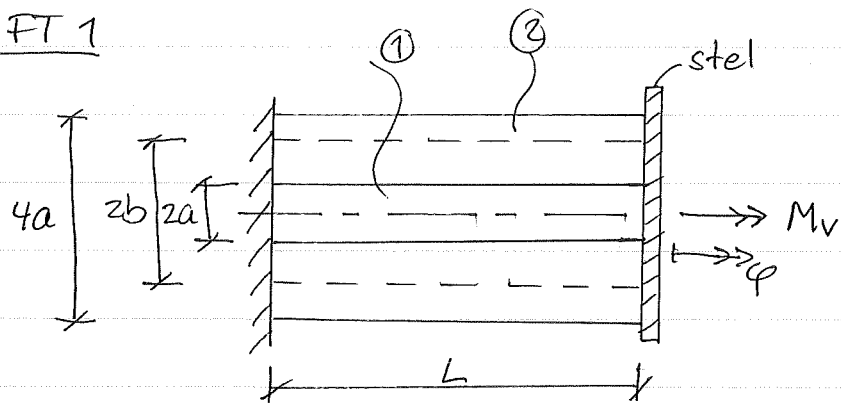
För att användaren skall uppleva den rätta känslan (som associeras med varumärket) då stiftet trycks ut till det låsta läget skall kraften variera mellan 0.54 N och 2.40 N (har fastställts genom kundundersökningar). Sträckan som stiftet trycks ut är 7 mm. Av kostnadsskäl skall tr addediametern vara 0.350 mm.

Dimensionera fjädern avseende lindningsdiameter och antal verksamma varv.



- (a) Bestäm fjäderstyvheten för konstruktionen. **(0.5p)**
- (b) Dimensionera fjädern. Medeldiameter, antal verksamma varv och minsta fria längd (för de verksamma varven) skall anges. **(2.5p)**
- (c) Beräkna högsta och lägsta *effektivskjuvspänning* som uppkommer i fjädern. **(2.0p)**

UPPGIFT 1



$$M_v = 6,5 \cdot 10^3 \text{ Nm}$$

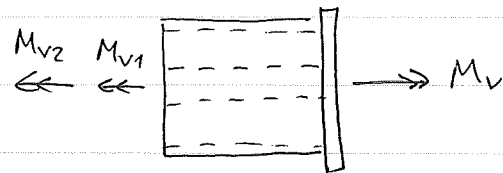
$$G = 81 \text{ GPa}$$

$$L = 120 \text{ mm}, a = 8 \text{ mm}, b = 10 \text{ mm}$$

a)

Jämvikt för ett snitt genom axlarna:

$$\Leftarrow: M_{v1} + M_{v2} = M_v$$



Deformationssamband

Båda axlarna roterar lika mycket $\Rightarrow$

$$\varphi_1 = \varphi_2$$

Materialsamband

$$M_{v1} = G K_{v1} \frac{\varphi_1}{L}$$

$$M_{v2} = G K_{v2} \frac{\varphi_2}{L}$$

$\Rightarrow$

$$\varphi_1 = \varphi_2 \Leftrightarrow \frac{M_{v1} \cdot L}{G K_{v1}} = \frac{M_{v2} \cdot L}{G K_{v2}} \Leftrightarrow \frac{M_{v1}}{K_{v1}} = \frac{M_{v2}}{K_{v2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{M_{v1}}{K_{v1}} = \frac{M_v - M_{v1}}{K_{v2}} \Leftrightarrow M_{v1} (K_{v1} + K_{v2}) = M_v K_{v1} \Leftrightarrow$$

$$M_{v1} = \frac{M_v K_{v1}}{K_{v1} + K_{v2}} \Rightarrow M_{v2} = \frac{(K_{v1} + K_{v2}) M_v - M_v K_{v1}}{K_{v1} + K_{v2}} = \frac{M_v K_{v2}}{K_{v1} + K_{v2}}$$

Rotationen blir då $\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{M_{v1} L}{G k_{v1}} = \frac{M_v \cancel{k_{v1}}}{G \cancel{k_{v1}}} \cdot \frac{M_v \cancel{k_{v1}}}{k_{v1} + k_{v2}}$

$$= \frac{M_v \cdot L}{G(k_{v1} + k_{v2})}$$

Numeriska värden: $k_{v1} = \frac{\pi}{2} a^4 \approx 6,4 \cdot 10^9 \text{ m}^4$

$$k_{v2} = \frac{\pi}{2} ((2a)^4 - b^4) \approx 8,72 \cdot 10^8 \text{ m}^4$$

$$\Rightarrow \varphi = \dots = 0,1028 \text{ rad} \approx 5,9^\circ$$

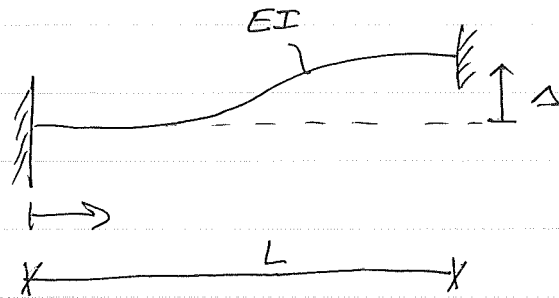
b) Max skjivspänning fås längst ut på varje axeldel.

$$\tau_{\max} = \frac{M_v \cdot r_{\max}}{k_v} \Rightarrow$$

$$\tau_{\max,1} = \frac{M_{v1} \cdot a}{k_{v1}} = \dots = 555 \text{ MPa} //$$

$$\tau_{\max,2} = \frac{M_{v2} \cdot 2a}{k_{v2}} = \dots = 1110 \text{ MPa} //$$

UPPGIFT 2



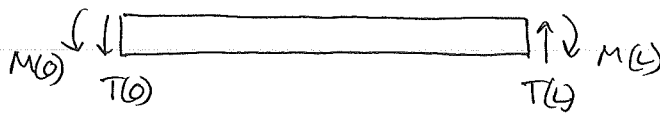
$$\begin{aligned} a) \quad w^{(4)}(x) &= 0 \Rightarrow w'''(x) = C_1 \\ \Rightarrow w''(x) &= C_1 x + C_2 \Rightarrow w'(x) = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3 \\ \Rightarrow w(x) &= C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4 \end{aligned}$$

Randvillkor

- $w(0) = 0 \Rightarrow C_4 = 0 //$
- $w'(0) = 0 \Rightarrow C_3 = 0 //$
- $w'(L) = 0 \Rightarrow C_1 \frac{L^2}{2} + C_2 L = 0 \Rightarrow C_2 = -C_1 \frac{L}{2}$
- $w(L) = \Delta \Rightarrow C_1 \frac{L^3}{6} + C_2 \frac{L^2}{2} = C_1 \frac{L^3}{6} - \left(C_1 \frac{L}{2}\right) \frac{L^2}{2} = C_1 L^3 \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4}\right) = \Delta$
 $\Rightarrow C_1 = -\frac{12\Delta}{L^3} // \Rightarrow C_2 = \frac{6\Delta}{L^2} //$

$$\Rightarrow w(x) = -\frac{12\Delta}{L^3} \cdot \frac{x^3}{6} + \frac{6\Delta}{L^2} \cdot \frac{x^2}{2} = \Delta \left(3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \right) //$$

b) Reaktionskrafte



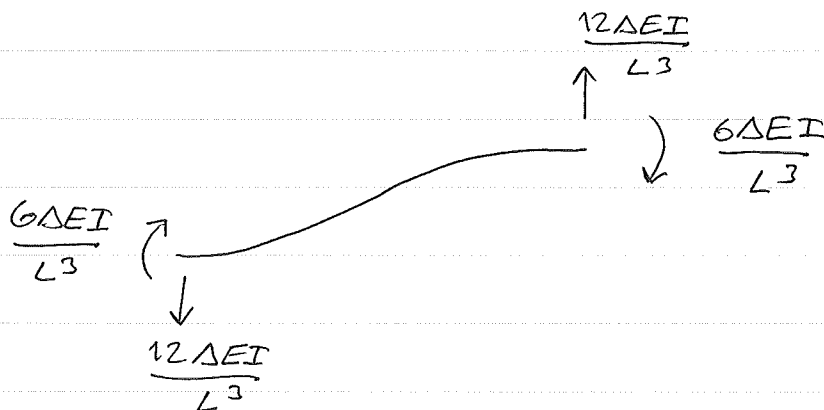
$$T(x) = -EI w'''(x) \Rightarrow T(x) = C_1 = +\frac{12\Delta}{L^3} EI$$

$$M(x) = -EI w''(x) \Rightarrow M(x) = -EI \left(-\frac{12\Delta}{L^3} x + \frac{6\Delta}{L^2} \right)$$

$$\cdot T(0) = T(L) = \frac{12\Delta EI}{L^3}$$

$$\cdot M(0) = -\frac{6\Delta EI}{L^3}$$

$$\cdot M(L) = \frac{6\Delta EI}{L^3}$$



UPPGIFT 3

Givna data

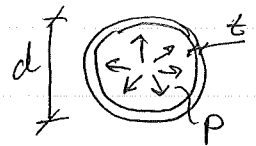
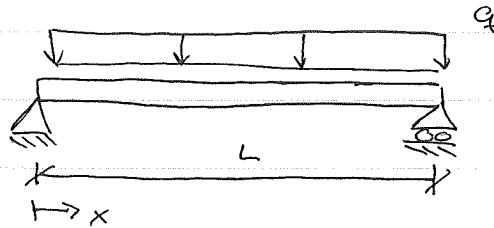
$$t = \frac{d}{10}$$

$$L = 200d$$

$$d = 30 \text{ mm}$$

$$p = \frac{1000q}{d}$$

$$q = 0,4 \text{ MPa}$$



Vi får en kombination av böjspänningar och spänningar pga trycket

Balkböjning:

$$M(x = \frac{L}{2}) = -\frac{q \cdot L^2}{8}$$

Naviers formel $\sigma_x = \frac{Mz}{I_y}$ $I_y = \frac{\pi d^3 t}{8} \Rightarrow$

$$\sigma_x = \frac{-\frac{qL^2}{8} \cdot z}{\frac{\pi d^3 t}{8}} = -\frac{qL^2 \cdot z}{\pi d^3 t} //$$

Ängspanneformlerna

$$\sigma_x = \frac{p \cdot \frac{d}{2}}{2t} = \frac{pd}{4t}$$

$$\sigma_\varphi = \frac{p \cdot \frac{d}{2}}{t} = \frac{pd}{2t} \quad \sigma_r \approx 0$$

$$\Rightarrow \sigma_x = \frac{pd}{4t} - \frac{qL^2 \cdot z}{\pi d^3 t} = ~~33,3 \cdot 10^9~~ 33,3 \cdot 10^9 - 5,66 \cdot 10^{13} \cdot z \text{ Pa}$$

$$\sigma_\varphi = 6,67 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$$

Effektivsp. enligt von Mises

$$\sigma_e^{vm} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_\varphi^2 + \sigma_x \cdot \sigma_\varphi}$$

$$z = \frac{d}{2} \Rightarrow ~~\sigma_e~~ \sigma_e = \dots \approx 8,5 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$$

$$z = 0 \Rightarrow \sigma_e = 3,3 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$$

$$z = -\frac{d}{2} \Rightarrow \sigma_e = 8,8 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$$

Notera: Det blev en faktor 1000 fel i lasten p som gör resultaten orimliga.

Rullningslager

Lösning:

OBS! Nedanstående lösning är baserad på SKF Katalog 4000S.

Talet bör räknas om för Katalog 10000

Lager 61808 ger:

$C = 4940 \text{ N}$, $C_0 = 3450 \text{ N}$, $P_u = 186 \text{ N}$, $d = 40 \text{ mm}$, $D = 52 \text{ mm}$.

Normalt lagerglapp antas.

Varvtalet 200 rpm.

Belastning på lagret: $F_a = 1725 \text{ N}$, $F_r = 2500 \text{ N}$

Livslängdsberäkning, SKF sid 40:

$$L_{naa} = a_1 a_{SKF} \left(\frac{C}{P} \right)^p$$

Dynamiska lagerlasten P:

SKF sid 185:

$$\frac{F_a}{C_0} = \frac{1725}{3450} = 0,5 \Rightarrow e = 0,44 \quad X = 0,56 \quad Y = 1$$

Dynamisk lagerbelastning, SKF sid 184:

$$\frac{F_a}{F_r} = \frac{1725}{2500} = 0,69 \Rightarrow P = XF_r + YF_a$$

$$P = 0,56 \cdot 2500 + 1 \cdot 1725 = 3125 \text{ N}$$

Faktorn a_1 , SKF sid 35:

95%-ig tillförlitlighet ger $a_1 = 0,62$

Faktorn a_{SKF} , Diagram 4 sid 41 i SKF.

Sid 45 i SKF, rena förhållanden ger $\eta_c = 0,8$.

$$\eta_c \frac{P_u}{P} = 0,8 \cdot \frac{186}{3125} = 0,048$$

$$\text{SKF sid 36: } d_m = \frac{d + D}{2} = \frac{40 + 52}{2} = 46 \text{ mm}$$

Diagram 1 kan nu med $d_m = 46 \text{ mm}$ och varvtalet 200 rpm avläsas till $v_1 = 75 \text{ mm}^2/\text{s}$

SKF sid 38:

$$\kappa = \frac{v}{v_1} = \frac{70}{75} = 0,93$$

Diagram 4 på sid 41 kan nu avläsas till $a_{SKF} = 1$.

SKF sid 28 ger $p = 3$ för kullager.

$$L_{naa} = a_1 a_{SKF} \left(\frac{C}{P} \right)^p = 0,62 \cdot 1 \cdot \left(\frac{4940}{3125} \right)^3 = 2,45 \text{ miljoner varv}$$

Med ett varvtal på 200 rpm håller lagret 12250 minuter = 204 timmar

SVAR: Lagret kan förväntas hålla 204 timmar

Skruvfjäder

Lösning

a)

Kravet på kraftvariationen då stiftet trycks ut ger den erforderliga axiella fjäderstyvhetsen:

$$c_a = \frac{\Delta F}{\Delta \delta} = \frac{2.40 - 0.54}{0.007} = 265.71 \text{ N/m} \quad (1)$$

En skruvfjäders axiella styvhet ges ur MEA (1.92):

$$c_a = \frac{Gd^4}{8n_v D^3} \quad (2)$$

Vi måste välja tråddiameter $d = 0.350 \text{ mm}$. Vi provar med ytterdiameter 4.0 mm vilket ger medeldiametern $D = 3.65 \text{ mm}$. Vi beräknar antal verksamma varv n_v genom att utnyttja (2):

$$n_v = \frac{Gd^4}{c_a 8D^3} = \frac{80 \cdot 10^9 \cdot (0.35 \cdot 10^{-3})^4}{265.71 \cdot 8 \cdot (3.65 \cdot 10^{-3})^3} = 11.61 \text{ varv}$$

Den fria längden för fjäderns verksamma del erhålls ur MEA (1.88):

$$l_0 > 1.25(n+1)d + |\delta| \quad (3)$$

I vårt fall är $|\delta|$ den totala kompressionen (ihoptryckningen av fjädern). Denna erhålls genom att summera kompressionen som ger erforderlig förspänning samt sträckan som stiftet trycks in när man vill skriva:

$$|\delta| = \delta_{mont} + \delta_{max} = \frac{F_{mont}}{c_a} + \delta_{max} = \frac{0.54}{265.71} + 0.007 = 0.00903 \text{ mm}$$

Fria längden blir då enligt (3):

$$l_0 > 1.25(11.61+1)0.350 + |0.00903| = 14.523 \text{ mm}$$

Notera att vi inte bestämt fjäderns totala fria längd eftersom vi inte tagit någon hänsyn till fjäderändarnas utformning.

b)

Beräkna högsta och lägsta effektivskjuvspänningarna som uppkommer i fjädern. Eftersom det uttryckligen frågas efter effektivskjuvspänningar måste vi ta hänsyn till de spänningsbidrag som uppkommer på grund av trådens krökning och tvärkraft.

MEA (1.98) ger:

$$\tau_e = k \frac{8FD}{\pi d^3} \quad (4)$$

där k förenklat kan approximeras med:

$$k \approx 1 + \frac{5d}{3D} \quad (5)$$

I vårt fall erhåller vi:

$$k \approx 1 + \frac{5 \cdot 0.35 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 3.65 \cdot 10^{-3}} \approx 1.16$$

Inverkan av krökningen är alltså så stor att vi inte kan bortse från denna.

Minsta effektivskjuvspänning blir:

$$\tau_e^{\min} = 1.16 \cdot \frac{8 \cdot 0.54 \cdot 3.65 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot (0.35 \cdot 10^{-3})^3} = 1.16 \cdot 116.374 = 135 \text{ MPa}$$

Största effektivskjuvspänning blir:

$$\tau_e^{\max} = 1.16 \cdot \frac{8 \cdot 2.40 \cdot 3.65 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot (0.35 \cdot 10^{-3})^3} = 1.16 \cdot 523.561 = 607 \text{ MPa}$$

SVAR: a) 11.6 verksamma varv, medeldiameter 3.65mm, fri längd minst 14.5mm.
b) $\tau_e^{\min} = 135 \text{ MPa}$, $\tau_e^{\max} = 607 \text{ MPa}$.