CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Mekanik och maritima vetenskaper
412 96 Göteborg

TME055 Strömningsmekanik 2022-01-14

Tentamen fredagen den 14 januari 2022 kl 14:00-18:00

Ansvarig lärare: Henrik Ström

Ansvarig lärare företräds av Valentin Vikhorev som kan nås på telefon 0729-617070 eller mail valvik@chalmers.se. Examinatorn kan under extraordinära omständigheter sökas på mail henrik.strom@chalmers.se eller telefon 031-7721360.

Maximal poängsumma är 50. För godkänt krävs 20 poäng, för betyg 4 krävs 30 poäng och för betyg 5 krävs 40 poäng. **OBS! För godkänt betyg krävs utöver minst 20 poäng totalt även att minst 1 poäng erhållits per delområde (A-E).**

OBS! Notera att uppgifterna inte är ordnade efter svårighetsgrad.

Tillåtna hjälpmedel är: penna, radergummi, linjal och ordbok (ej elektroniska ordböcker), samt miniräknare med tömt minne och matematisk handböcker (t ex BETA och/eller Physics Handbook). Räknare som används som hjälpmedel vid tentamen får inte ha trådlös anslutningsmöjlighet till internet. I formelsamlingar får endast indexeringar göras. Om det förekommer tryckfel i de tillåtna i hjälpmedlen får handskrivna rättelser finnas. Mobiltelefoner och elektronisk utrustning, som inte är godkända hjälpmedel, skall vara avstängda och får inte medföras till skrivplatsen.

Tid och plats för tentagranskning anslås i kursens Canvas-rum.

Delområde A – Molekyler och kontinuum (10 p)

1) En vätska eller gas består av ett stort antal molekyler som rör sig i olika hastigheter och riktningar och kolliderar/interagerar med varandra. Samtidigt är det möjligt att prata om att en fluid har en viss hastighet, ofta väsentligt olik de ingående molekylernas, i en punkt. Förklara hur detta är möjligt och vilka krav som måste vara uppfyllda för att detta ska vara möjligt! (3 p)

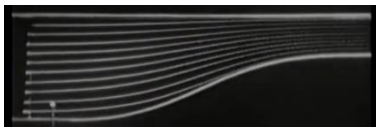
2) Nedan återfinns ett antal påståenden. Ange för vart och ett av påståendena huruvida det är sant eller falskt, och ge en kort motivering till ditt svar!
   a. I en stillastående sjö är trycket högst vid vattenytan.
   b. En vätskas viskositet är alltid oberoende av eventuella hastighetsgradienter.
   c. Molekylers till synes slumpmässiga rörelse i regioner med makroskopiska hastighetsgradienter ger upphov till rörelsemängdstransport genom så kallade skjuvspänningar.
   d. Om samma fluid strömmar turbulent med samma medelhastighet i två olika rör av olika diameter, kommer turbulensen att vara mer intensiv i det större röret.
   e. När vatten strömmar genom en förträngning ger det upphov till en tryck-ökning. (5 p)

3) Vilka av antagandena nedan är *nödvändiga* för att Navier-Stokes ekvationer ska vara giltiga i de sammanhang där vi normalt använder dem? Kort motivering räcker.
   a. Kontinuumhypotesen gäller
   b. Inkompressibel strömning
   c. Stationär strömning
   d. Newtonsk fluid
   e. Ingen viskös dissipation
   f. Rotationsfri strömning
   g. Försumbara hastighetsgradienter i huvudströmriktningen

(2 p)

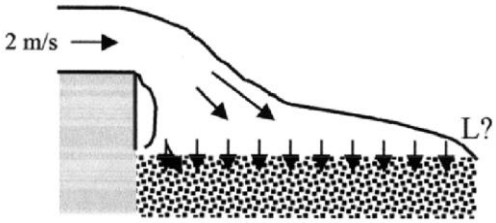
Delområde B – Vardagliga fenomen, hastighet och tryck (10 p)

4) Vid inkompressibel strömning genom en kontraktion (se bild nedan) kan strömningen vara stationär samtidigt som fluiden accelererar. Den totala fluidacceleration en punkt kan ur ett Eulerskt betraktelsesätt betecknas *DV/Dt* med hjälp av den så kallade materiederivatan. Skriv ut alla ingående termer i *DV/Dt* och markera särskilt vilka som är nollskilda i detta strömningsfall. (2 p)

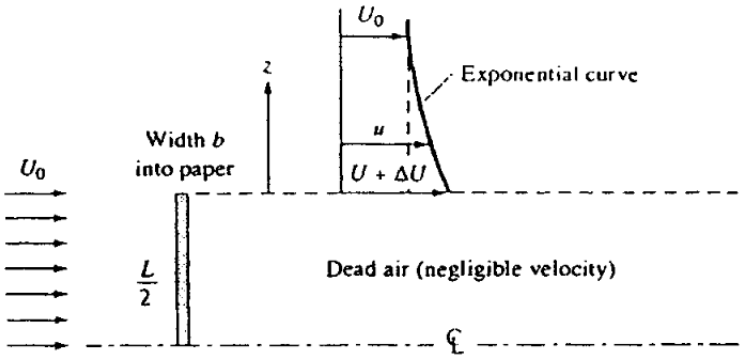


5) Korsdrag är ett fenomen som t ex kan uppstå då man vädrar och har dörrar och/eller fönster öppna på olika sidor av ett hus samtidigt. Detta fenomen kan exempelvis resultera i att en öppen dörr slås igen med väldig kraft, till synes utan förvarning. Förklara detta fenomen och hur det kan få en dörr att stängas på detta sätt! (2 p)

6) När det regnar osedvanligt mycket kan det bli problem för marken att hinna ta åt sig allt vatten som kommer in över den, vilket kan leda till översvämning. En konstruktion för upptag av vatten består av en porös bädd som kan ta upp vatten med en uniform vertikal hastighet av 8 mm/s (se figur till höger). Systemets djup in i papprets plan är 5 m och höjden på den vätskefilm som sköljer in från vänster är 20 cm. Vad måste längden *L* minst vara för att konstruktionen ska kunna svälja allt vatten? (2 p)



7) När en fluid strömmar runt en plan platta som är orienterad normalt mot huvudströmriktningen uppstår en bred region precis bakom den omströmmade plattan där hastigheten är mycket låg, i princip noll (se figur nedan, där endast övre halvan är avbildad på grund av symmetri). Hastighetsprofilen bakom plattan kan då approximativt beskrivas av $u = 0$, medan hastighetsprofilen utanför plattan beskrivs som $u = U_0 + \Delta U e^{-z/L}$, där L är plattans höjd och $z = 0$ återfinns vid plattans övre kant (se figur). Med andra ord erhålles hastighetsprofilen utanför plattan som summan av den ankommande friströmshastigheten U_0 och ett tillägg som avtar exponentiellt från ΔU vid $z = 0$ till 0 då $z \to \infty$. Ta fram ett uttryck för relationen mellan ΔU och U_0! (4 p)



Delområde C – Dimensionsanalys och rörströmning (10 p)

8) Vid laminära betingelser är volymflödet Q genom en liten por av triangulärt tvärsnitt med sidan b och längden L en funktion av viskositet μ, tryckfall per enhetslängd $\Delta p/L$ och sidlängden b. Använd dimensionsanalys för att uttrycka denna relation på dimensionslös form. Hur ändras volymflödet om b dubbleras? (3 p)

9) En ingenjör är intresserad av strömningen runt ett stort föremål som sjunker i heptan (C_7H_{16}) men vill för enkelhetens skull utvärdera en modell i vatten. Den kinematiska viskositeten för heptan är $5.5 \cdot 10^{-7}$ m^2/s medan den för vatten är $8.9 \cdot 10^{-7}$ m^2/s. Ingenjören anser att det ska räcka att justera modellens storlek med en faktor 1.62, men en kollega säger att även föremålets densitet måste justeras. Vem har rätt? Motivera ditt svar! (2 p)

10) Betrakta figuren nedan som illustrerar hastighets- och tryckprofiler hos en fluid som börjar strömma in i ett rör. Förklara vad som händer i de olika regionerna A, B och C i figuren. Vad representerar variablerna δ och L_e? Varför är tryckprofilen linjär för $x > L_e$ men ickelinjär för $x < L_e$? (5 p)

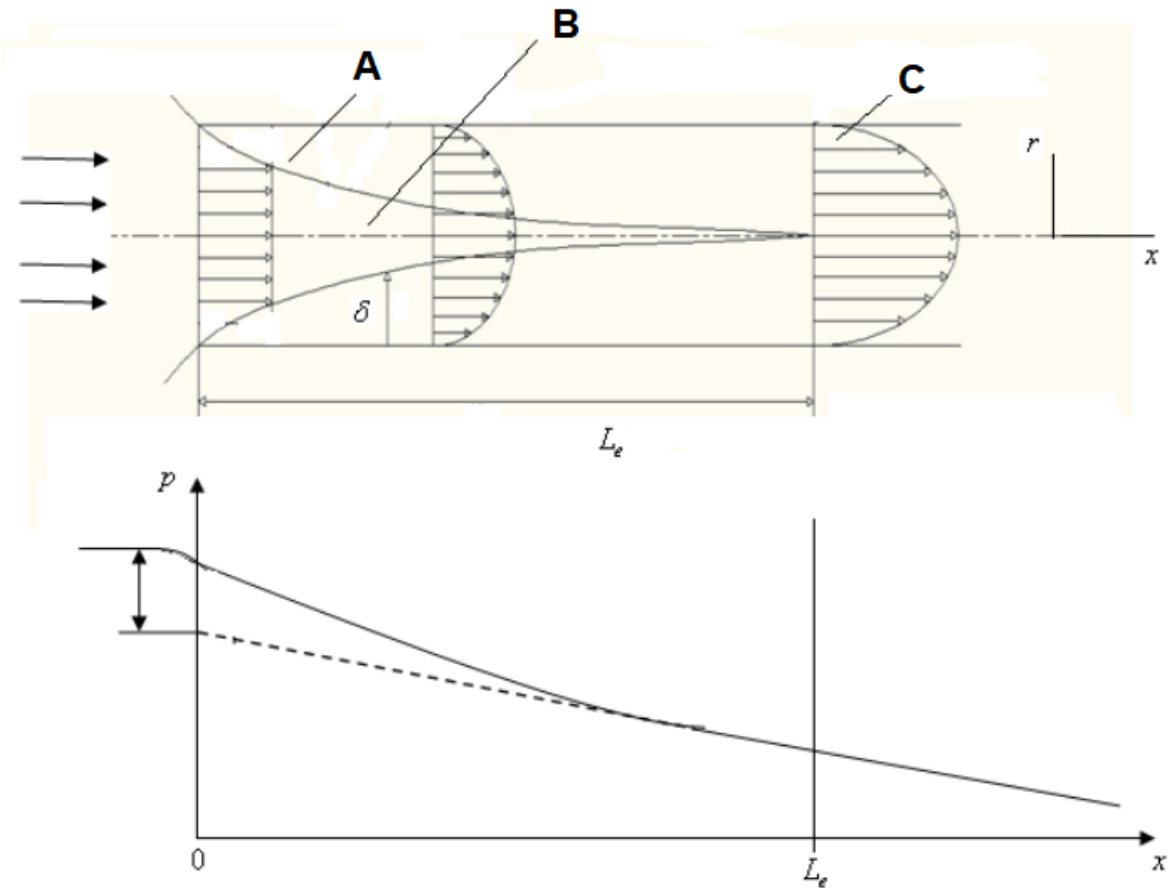
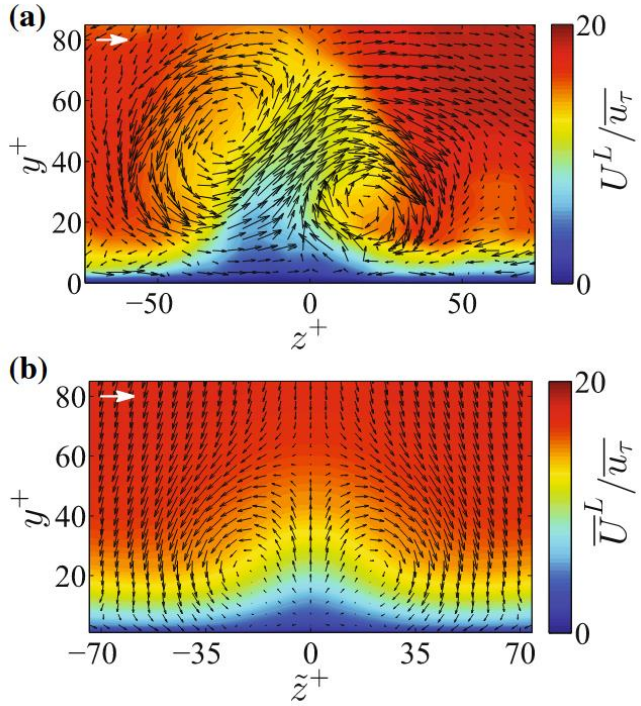


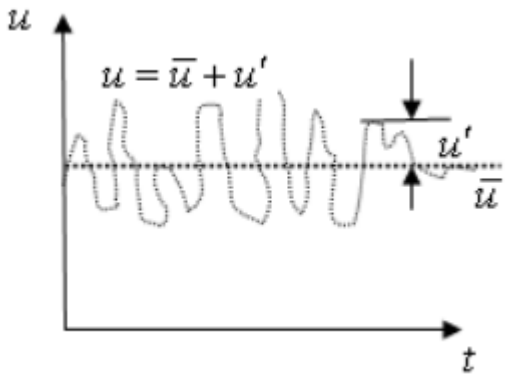
Fig. 5.1.2: Velocity profile and pressure changes in a duct flow.

Delområde D – Turbulens och industriella system (10 p)

11) Bilden nedan visar experimentella data för ett (a) instantant och ett (b) medelvärderat hastighetsfält för turbulent flöde mellan plana plattor. Färgen betecknar hastighet i huvudströmriktningen (in i papprets plan) och de svarta inritade hastighetsvektorerna illustrerar hastighetsfältet i planet normalt mot huvudströmriktningen. I de flesta ingenjörsmässiga tillämpningar är den tidsmedelvärderade lösningen av större intresse än enstaka ögonblicksbilder. Ge exempel på två olika strategier genom vilka man kan erhålla den tidsmedelvärderade lösningen i numeriska beräkningar! (2 p)

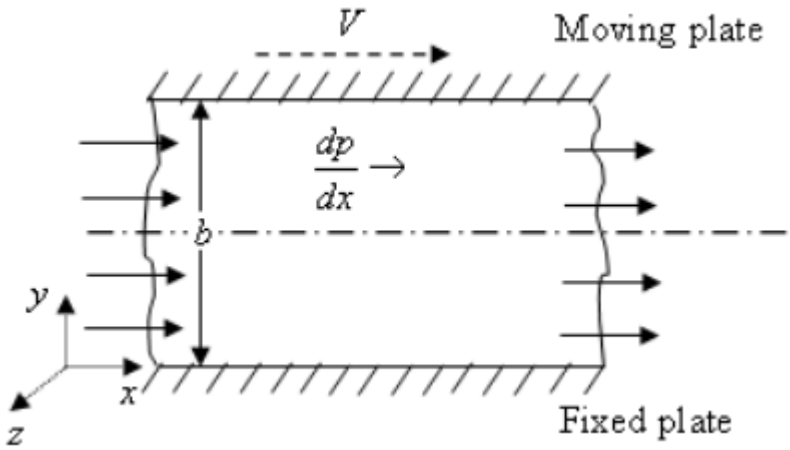


12) Figuren nedan visar hur en tidsberoende hastighetskomponent i ett turbulent flöde kan delas upp som $u = \bar{u} + u'$. Vad representerar dessa tre variabler? Vilken variabel är det man söker om man löser Navier-Stokes ekvationer? Vilken variabel är det man söker om man löser Reynolds-medelvärderade Navier-Stokes ekvationer? (2 p)



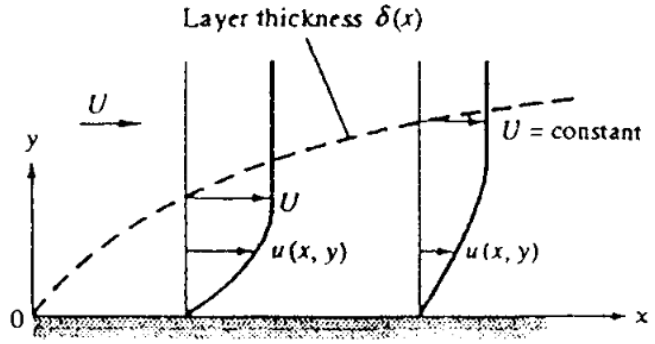
13) Varför är turbulent strömning alltid tredimensionell? (1 p)

14) Betrakta figuren nedan som illustrerar strömning mellan två plana oändliga plattor. Ett så kallat *Couette-Poiseuille*-flöde erhålles då en konstant tryckgradient *dp/dx* i flödesriktningen kombineras med att den övre plattan rör sig med konstant hastighet *V* medan den nedre plattan står still. Visa att den dimensionslösa hastighetsprofilen *u/V* mellan plattorna för detta fall kan uttryckas som en funktion av *y*, *b* och en dimensionslös parameter $P = \left(-\frac{b^2}{2\mu V}\right)\left(\frac{dp}{dx}\right)$. (5 p)



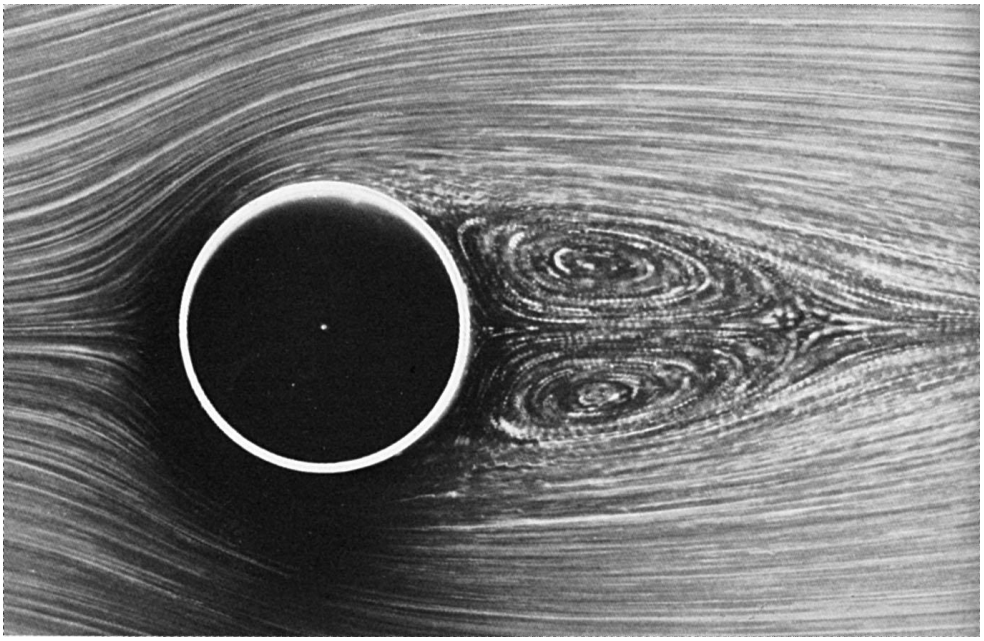
Delområde E – Separation, gränsskikt och potentialströmning (10 p)

15) En mycket god approximation av hastighetsprofilen i ett tvådimensionellt inkompressibelt laminärt gränsskikt är $u \approx U\left(2\frac{y}{\delta} - 2\frac{y^3}{\delta^3} + \frac{y^4}{\delta^4}\right)$ för $y \leq \delta$, där $\delta = Cx^{1/2}$ och C är en konstant. Använd denna approximation för att ta fram ett tillhörande uttryck för hastighetskomponenten $v(x, y)$ för $y \leq \delta$. (3 p)



16) Smält metall karaktäriseras normalt av mycket hög värmeledningsförmåga, så att Prandtls tal $Pr = \nu/\alpha = \mu c_p/k \ll 1$. Om metall i vätskeform strömmar över en vägg, kommer då gränsskiktet för hastighetsfältet eller temperaturfältet att vara tjockast? Motivera ditt svar! Vad är randvillkoret för temperaturen vid väggen? (2 p)

17) Bilden nedan visar hur strömningen runt en cylinder ger upphov till en så kallad vak (recirkulationsregion) bakom cylindern. Varför bildas vaken på baksidan och inte på framsidan? Blir det alltid en vak bakom ett omströmmat föremål? Varför/varför inte? (3 p)



18) I ett potentialströmningsfält existerar tre hastighetskomponenter (u, v och w). Visa (i kartesiska koordinater) att samtliga hastighetskomponenter var för sig uppfyller Laplace's ekvation om $\nabla^2\phi = 0$, där ϕ är hastighetspotentialen. (1 p)

19) Är friktionsförlusterna störst vid turbulent rörströmning om rörets insida är slät eller ruggig? Motivera ditt svar! (1 p)

Formelsamling

<u>Mekaniklagar</u>

$$\frac{dm_{syst}}{dt} = 0$$

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{V})$$

$$\boldsymbol{M} = \frac{d\boldsymbol{H}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum(\boldsymbol{r} \times \mathbf{V})\delta m\right)$$

$$\frac{dQ}{dt} - \frac{dW}{dt} = \frac{dE}{dt}$$

<u>Reynolds transportteorem</u>

$$\frac{dB_{syst}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\int_{CV} \beta\rho d\mathcal{V}\right) + \int_{CS} \beta\rho(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n})\, dA$$

<u>Differentiella samband på vektorform</u>

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\, \nabla \cdot \mathbf{V} = 0$$

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho\mathbf{g}$$

$$\rho \frac{D\hat{u}}{Dt} + p(\nabla \cdot \mathbf{V}) = \nabla \cdot [k\nabla T] + \Phi$$

<u>Kontinuitetsekvationen och Navier-Stokes ekvationer i cylindriska koordinater</u>

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(v_z) = 0$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r}(v_r) + \frac{1}{r} v_\theta \frac{\partial}{\partial \theta}(v_r) + v_z \frac{\partial}{\partial z}(v_r) - \frac{1}{r} {v_\theta}^2 =$$
$$= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + g_r + \frac{\mu}{\rho}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_r}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}\right]$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r}(v_\theta) + \frac{1}{r} v_\theta \frac{\partial}{\partial \theta}(v_\theta) + v_z \frac{\partial}{\partial z}(v_\theta) + \frac{1}{r} v_r v_\theta = -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + g_\theta +$$
$$\frac{\mu}{\rho}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right]$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r}(v_z) + \frac{1}{r} v_\theta \frac{\partial}{\partial \theta}(v_z) + v_z \frac{\partial}{\partial z}(v_z)$$
$$= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + g_z + \frac{\mu}{\rho}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right]$$

Buckinghams π-teorem

$$i = n - r$$

Friction head enligt Weisbach

$$h_f = f\frac{L}{D}\frac{\mathrm{V}^2}{2g}$$

Engångsförluster

$$h_m = K\frac{\mathrm{V}^2}{2g}$$

Darcys friktionsfaktor

Laminär strömning

$$f = \frac{64}{Re_D}$$

Turbulent strömning

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2.0\log_{10}\left(Re_D\sqrt{f}\right) - 0.8 \text{ för } \varepsilon/D = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2.0\log_{10}\left(\frac{\varepsilon/D}{3.7}\right) \text{ för } \varepsilon/D \neq 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2.0\log_{10}\left(\frac{\varepsilon/D}{3.7} + \frac{2.51}{Re_D\sqrt{f}}\right) \text{ för } \frac{D/\varepsilon}{Re_D\sqrt{f}} > 0.005$$

Formmotstånd, lyftkraft och väggfriktionskoefficient

$$F_D = C_D A_p \frac{\rho \mathrm{V}^2}{2}$$

$$F_L = C_L A_p \frac{\rho \mathrm{V}^2}{2}$$

$$\tau_w = C_f \frac{\rho \mathrm{V}^2}{2}$$

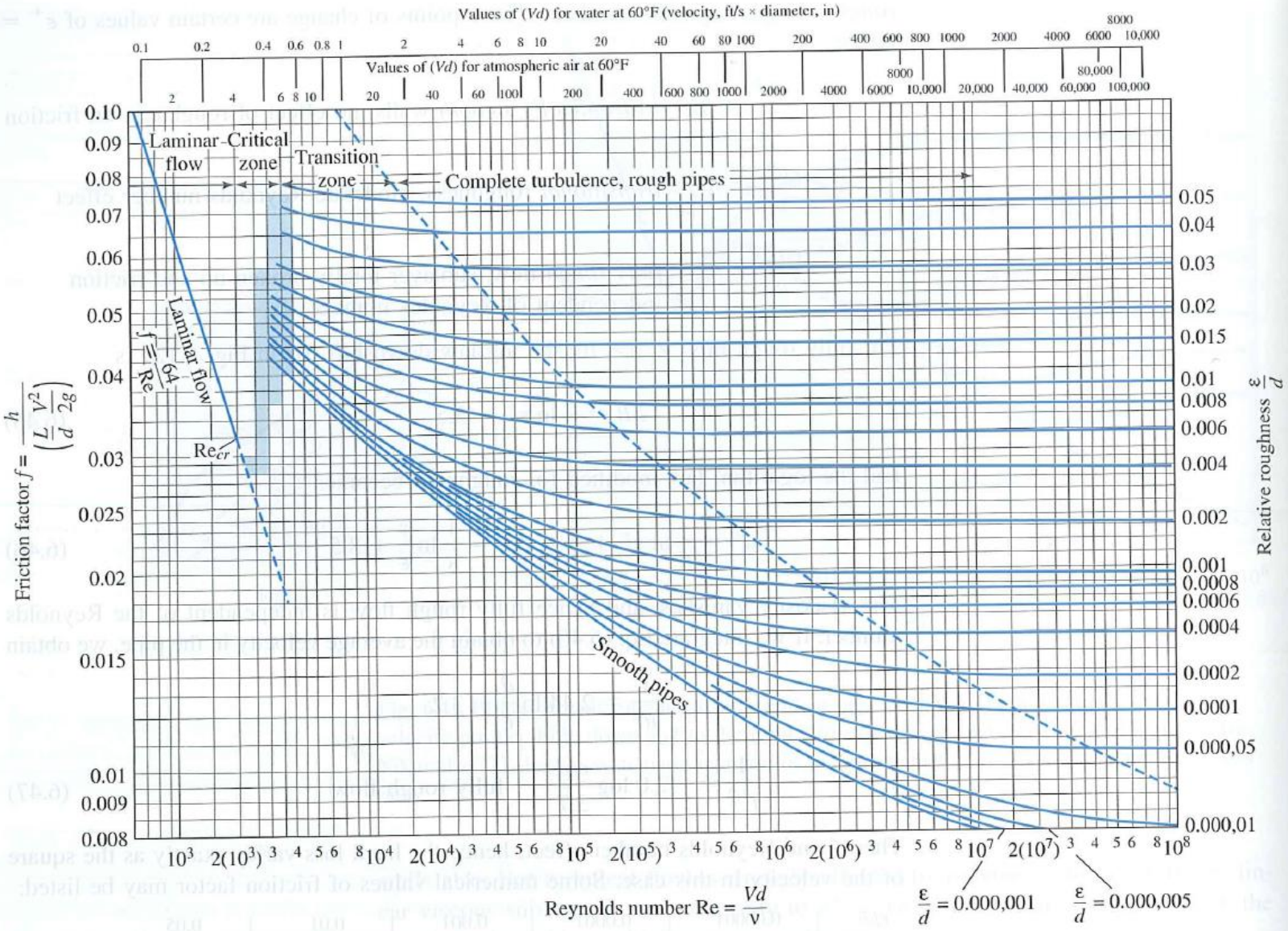
Elementära planströmningar

Uniform strömning: $\psi = Uy = Ur\sin\theta$, samt $\phi = Ux = Ur\cos\theta$

Linjekälla/-sänka: $\psi = m\theta$, samt $\phi = m\ln r$

Linjevirvel: $\psi = -K\ln r$, samt $\phi = K\theta$

Dubblett: $\psi = -\lambda\sin\theta/r$, samt $\phi = \lambda\cos\theta/r$


Values of (Vd) for water at 60°F (velocity, ft/s × diameter, in)
Values of (Vd) for atmospheric air at 60°F
Laminar flow
Critical zone
Transition zone
Complete turbulence, rough pipes
Laminar flow
f = 64/Re
Re_cr
Smooth pipes
Friction factor f = h / (L/d · V²/2g)
Relative roughness ε/d
Reynolds number Re = Vd/ν
ε/d = 0.000,001
ε/d = 0.000,005

TME055 2022-01-14 Lösningsskiss

A1. Se Föreläsning 1.

A2. Motiveringar krävs. a) Falskt; b) Falskt; c) Sant; d) Sant; e) Falskt.

A3. Se Föreläsning 5.

B4. Se Föreläsning 5. Om 2D och stationärt återstår endast två nollskilda termer i materiederivatan.

B5. Tryckskillnad på olika sidor av byggnad → fluid sätts i rörelse; Bernoulli: rörelse sänker statiska trycket → nettotryckkraft på dörr/fönster från stillastående sida mot sida med rörelse

B6. Masskonservering → L ≈ 50 m

B7. Masskonservering → $\Delta U \approx (1/2)U_0$

C8. T ex Buckingham's Pi-teorem → 1 Pi-grupp → $\pi_1 = \frac{Q\mu}{(\Delta p/L)b^4}$ → om b x2 så Q: $2^4 = 16$

C9. Dynamisk likhet kräver samma Re → skillnaden mellan ν är en faktor 1.62 *men* hastigheten blir olika då föremålet sjunker i fluider med olika ν; därför behövs en ytterligare justering (t ex av föremålets densitet, eller av storleken med annan faktor)

C10. Se Föreläsning 9.

D11. Lösa direkt för medelvärdet (t ex RANS) eller lösa för instantana fälten och därefter medelvärdera.

D12. Se Föreläsning 10.

D13. Se Föreläsning 10.

D14. Utgå från N-S och förenkla; dP/dx balanseras av $\mu\, d^2u/dy^2$ i detta fall. Integrera upp u(y) och bestäm integrationskonstanter m h a randvillkoren (hastigheterna kända på bägge plattor).

E15. Hastighetskomponent *u* är given och kan direkt relateras till *y* via den reducerade kontinuitetsekvationen som gäller i gränsskiktet.

E16. Om Pr = 1 är gränsskikt för hastighet och temperatur samma; för Pr << 1 är gränsskiktet för temperatur tjockare (eftersom temperatureffekter sprids mer effektivt i flödet). No-temperature jump.

E17. Se Föreläsning 12.

E18. Se Föreläsning 11.

E19. Se Moody-diagrammet t ex; *f* ökar då ε/d ökar.