



CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Mekanik och maritima vetenskaper
412 96 Göteborg

TME055 Strömningsmekanik

2020-01-17

Tentamen fredagen den 17 januari 2020 kl 14:00-18:00

Ansvarig lärare: Henrik Ström

Ansvarig lärare (eller någon som företräder honom) besöker salen under pågående examination för att svara på eventuella frågor. Under hela tentamen kan han nås på telefon 070 40 25 119.

Maximal poängsumma är 50. För godkänt krävs 20 poäng, för betyg 4 krävs 30 poäng och för betyg 5 krävs 40 poäng.

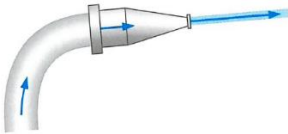
Tillåtna hjälpmedel: Valfri miniräknare med tömt minne samt matematisk handbok (t ex BETA och Physics Handbook).

Lösningar anslås på kurshemsidan i Canvas den 20 januari. Även information om möjligheter till tentamensgranskning annonseras på kurshemsidan.

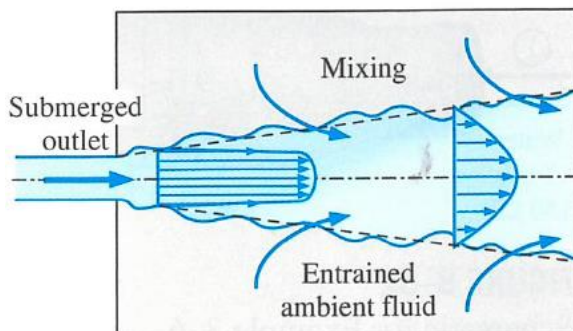
OBS! Notera att uppgifterna inte är ordnade efter svårighetsgrad.

T1.

- a) En liten kontrollvolym inuti en stor gasbehållare innehåller vid varje givet tillfälle ett visst antal gasmolekyler. En uppskattning av gasens densitet kan då erhållas som den sammanlagda massan av dessa gasmolekyler, Δm , dividerad med kontrollvolymens volym, ΔV . Skissa hur $\Delta m/\Delta V$ ser ut som funktion av ΔV . Rita in var gränsen mellan de två domäner som kan utrönas ur grafen går och ange deras namn. Hur ska densitet definieras för att man ska kunna bestämma densiteten i en punkt? (4 p)
- b) En trädgårdsslang med konstant vattenflöde representerar ett system där strömningen är stationär samtidigt som fluiden accelererar. Förklara hur en fluid kan accelerera under stationära betingelser! (1 p)



- c) Ett vattenutlopp är placerat under vattenytan i en stor vattenreservoar. Vatten av hög hastighet bildar en jet vid utloppet som vidgas med avståndet från detsamma (se bild nedan). Varför sjunker hastigheten i jeten när man avlägsnar sig från utloppet? Mycket långt bort från utloppet är vattnet helt stilla. Vart tar den kinetiska energin i flödet vägen? (2 p)

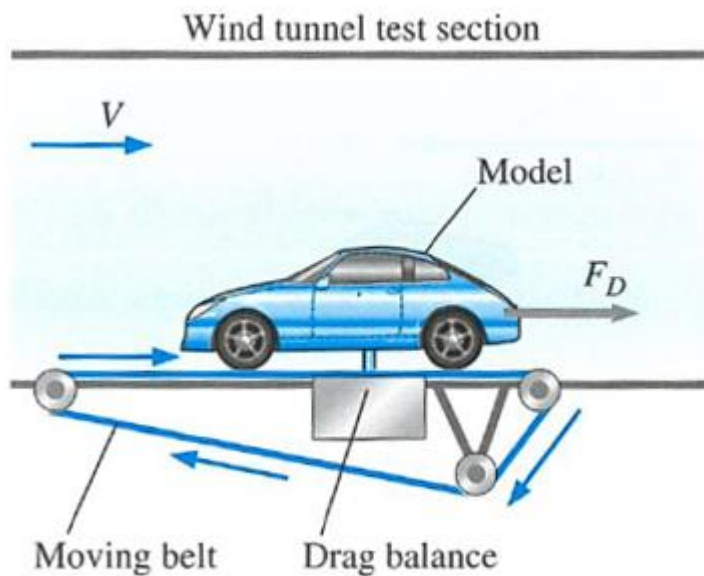


- d) En starkt bidragande anledning till att det är vanligt att fiskodlingar placeras i vattendrag (se bild nedan) istället för på land är att det är mycket mindre energikrävande att pumpa vatten mot gravitationens riktning nere i vattnet jämfört med uppe på land. Förklara detta faktum! (2 p)



T2.

- a) En grupp ingenjörer vill utvärdera luftmotståndet på en ny bilmodell genom prototyptestning i en vindtunnel. Modellen är byggd i skala 1:5 och man önskar ta reda på luftmotståndet för den fullstora bilen vid 80 km/h och 25°C. Temperaturen i den oisolerade vindtunneln är vid mättillfället dock bara 5°C. Vilken hastighet ska ingenjörerna använda när de mäter på modellen för att få resultat som är relevanta för en fullstor bil vid de önskade betingelserna? (3p)



Luftdata vid 25°C: $\rho = 1.184 \text{ kg/m}^3$, $\mu = 1.849 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}$

Luftdata vid 5°C: $\rho = 1.269 \text{ kg/m}^3$, $\mu = 1.754 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}$

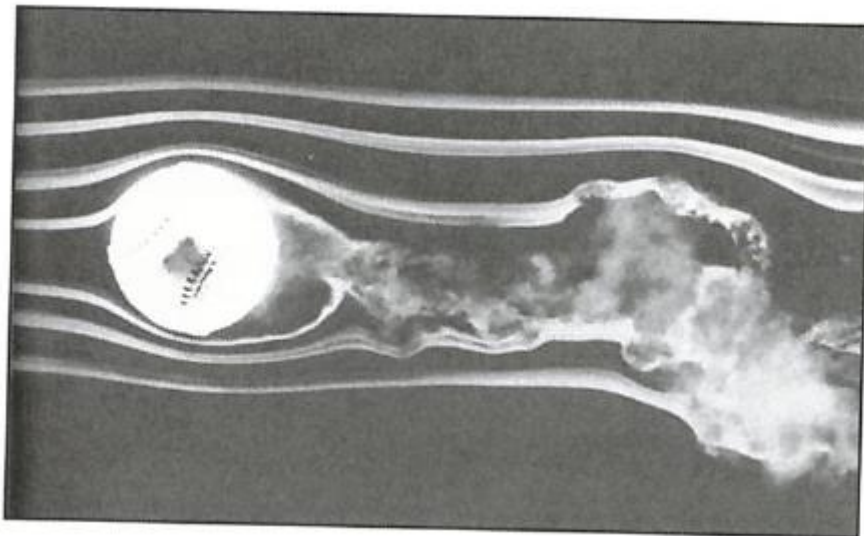
- b) Vad är Reynoldsdekomponering? Ge exempel på hur den instantana hastigheten kan Reynoldsdekomponeras. Visa hur Reynoldsdekomponering kan användas för att härleda en kontinuitetsekvation för medelhastighetsfältet! (3 p)
- c) Vilka egenskaper brukar man säga karaktäriserar turbulens? Förklara eller ge exempel för varje egenskap du nämner! (4 p)

T3.

- a) Skriv om Navier-Stokes ekvationer på dimensionslös form. Vad är den fysikaliska tolkningen av den dimensionslösa grupp som dyker upp och vad kallas den? Visa hur ekvationen kan förenklas om denna dimensionslösa grupp är mycket liten respektive mycket stor. (5 p)
- b) Ett otrevligt fenomen som de flesta känner till är att temperaturen på duschvattnet temporärt kan påverkas (bli varmare) av att någon spolar i en toalett som är kopplad till samma kallvattenstamledning. Förklara hur detta kan hända! (2 p)



- c) Bilden nedan illustrerar ett flöde av luft förbi en skruvad baseboll (flödet går från vänster till höger). Rök har tillsatts uppströms för att visualisera strömlinjer i flödet. I denna situation uppstår en omblandad region på bollens nedre baksida. Förklara hur denna region uppstår! Hur ser hastighetsfältet ut i de regioner där röken blandas ut? Varför uppstår omblandningen bakom bollen och aldrig uppströms? (3 p)



P1.

Figuren nedan illustrerar en rörböj med reducerande tvärsnittsarea. Hastigheten vid tvärsnitt (1) är v_1 , och hastigheten vid tvärsnitt (2) är v_2 . De två tvärsnittsareorna kan benämnas A_1 respektive A_2 . Vinkeln för böjen är θ (se figur) och fluidens densitet kan antas vara konstant och benämnas ρ . Volymkraften som uppstår på grund av vikten av fluiden i rörböjen är inritad som W , och tryckkrafterna vid (1) och (2) är P_1 och P_2 . Ta fram ett uttryck för den kraft med vilken den strömmande fluiden påverkar rörböjen! Försumma inverkan av normalskjuvspänningar vid (1) och (2). (7 p)

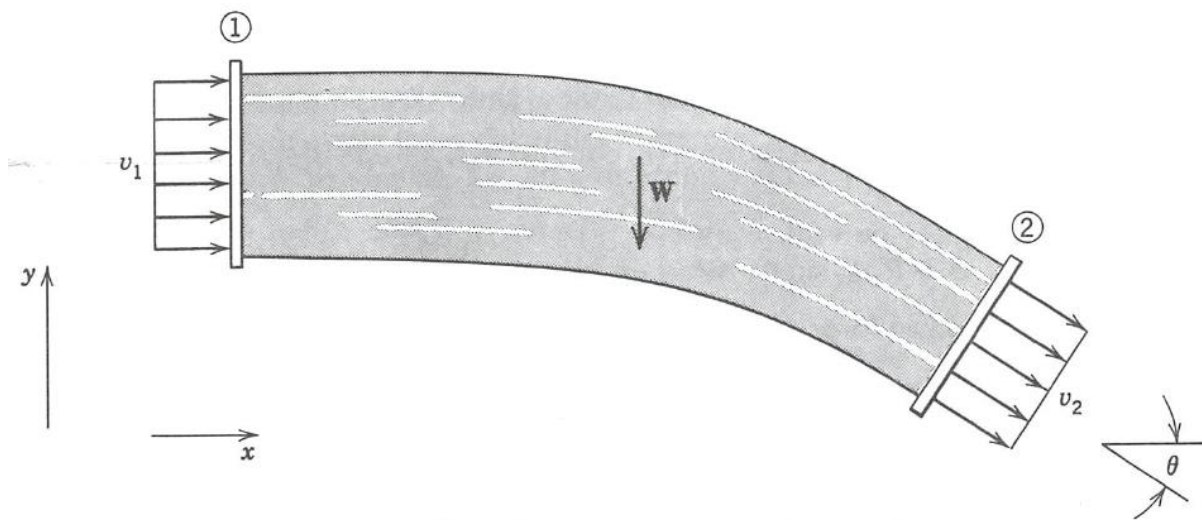


Figure 5.3 Flow in a reducing pipe bend.

P2.

En fläkt ska användas för att kyla en dator. Dimensionerna för datorcaset är 12 cm x 40 cm x 40 cm. Halva denna volym upptas av datorkomponenter och resten består av luft. Denna luft vill man ska bytas ut en gång per sekund med hjälp av fläkten. Fläkten kommer att skicka ut luften genom ett hål vars diameter är 5 cm. Luften kommer att komma in i caset genom ett större antal mindre öppningar runtom. Fläktens verkningsgrad kan antas vara 30% och luftens densitet 1 kg/m³. Friktionseffekter i flödet får försummas.

- a) Uppskatta vilken effekt fläkten behöver vara på!
- b) Uppskatta tryckskillnaden över fläkten!

(7 p)

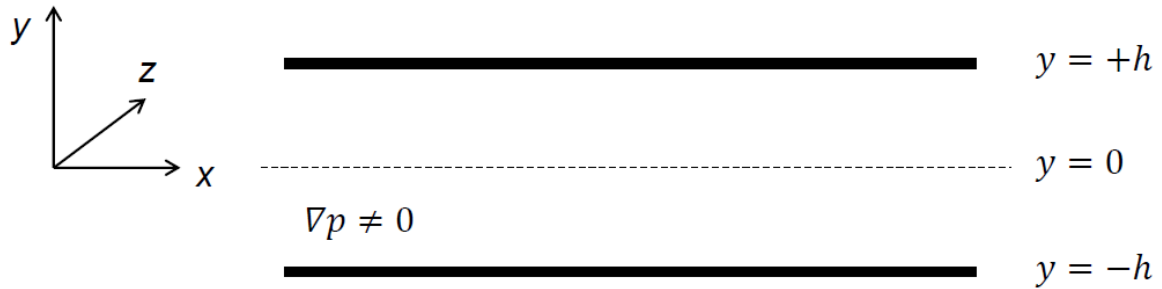
Ledning: Energibalansen för en kontrollvolym kan uttryckas:

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} - \dot{W}_{axel} - \dot{W}_{visköst} \\ = \frac{d}{dt} \left(\int_{CV} \left[\hat{u} + \frac{1}{2} V^2 + gz \right] \rho dV \right) + \int_{CS} \left[\hat{u} + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} V^2 + gz \right] (\rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dA \end{aligned}$$

P3.

Betrakta strömning mellan två oändliga, plana, stillastående plattor. Fluidens densitet är 1000 kg/m^3 , dess viskositet är $0.001 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ och avståndet mellan plattorna är 2 mm . Strömningen är laminär och inkompressibel och fluiden är Newtonsk. Gravitationens inverkan är försumbar. Om väggskjuvspänningen är 1 Pa , vad är då hastigheten mitt mellan plattorna?

(7 p)



Formelsamling

Mekaniklagar

$$\frac{dm_{syst}}{dt} = 0$$

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{V})$$

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{H}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum (\mathbf{r} \times \mathbf{V}) \delta m \right)$$

$$\frac{dQ}{dt} - \frac{dW}{dt} = \frac{dE}{dt}$$

Reynolds transportteorem

$$\frac{dB_{syst}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\int_{CV} \beta \rho dV \right) + \int_{CS} \beta \rho (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dA$$

Differentiella samband på vektorform

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} = 0$$

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{g}$$

$$\rho \frac{D\hat{u}}{Dt} + p(\nabla \cdot \mathbf{V}) = \nabla \cdot [k\nabla T] + \Phi$$

Kontinuitetsekvationen och Navier-Stokes ekvationer i cylindriska koordinater

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (v_z) = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r} (v_r) + \frac{1}{r} v_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} (v_r) + v_z \frac{\partial}{\partial z} (v_r) - \frac{1}{r} v_\theta^2 = \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + g_r + \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r} (v_\theta) + \frac{1}{r} v_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta) + v_z \frac{\partial}{\partial z} (v_\theta) + \frac{1}{r} v_r v_\theta = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + g_\theta + \\ + \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r} (v_z) + \frac{1}{r} v_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} (v_z) + v_z \frac{\partial}{\partial z} (v_z) \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g_z + \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] \end{aligned}$$

Buckingham's π -theorem

$$i = n - r$$

Friction head enligt Weisbach

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g}$$

Engångsförluster

$$h_m = K \frac{V^2}{2g}$$

Darcys friktionsfaktor

Laminär strömning

$$f = \frac{64}{Re_D}$$

Turbulent strömning

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2.0 \log_{10}(Re_D \sqrt{f}) - 0.8 \text{ för } \varepsilon/D = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2.0 \log_{10} \left(\frac{\varepsilon/D}{3.7} \right) \text{ för } \varepsilon/D \neq 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2.0 \log_{10} \left(\frac{\varepsilon/D}{3.7} + \frac{2.51}{Re_D \sqrt{f}} \right) \text{ för } \frac{D/\varepsilon}{Re_D \sqrt{f}} > 0.005$$

Formmotstånd, lyftkraft och väggfriktionskoefficient

$$F_D = C_D A_p \frac{\rho V^2}{2}$$

$$F_L = C_L A_p \frac{\rho V^2}{2}$$

$$\tau_w = C_f \frac{\rho V^2}{2}$$

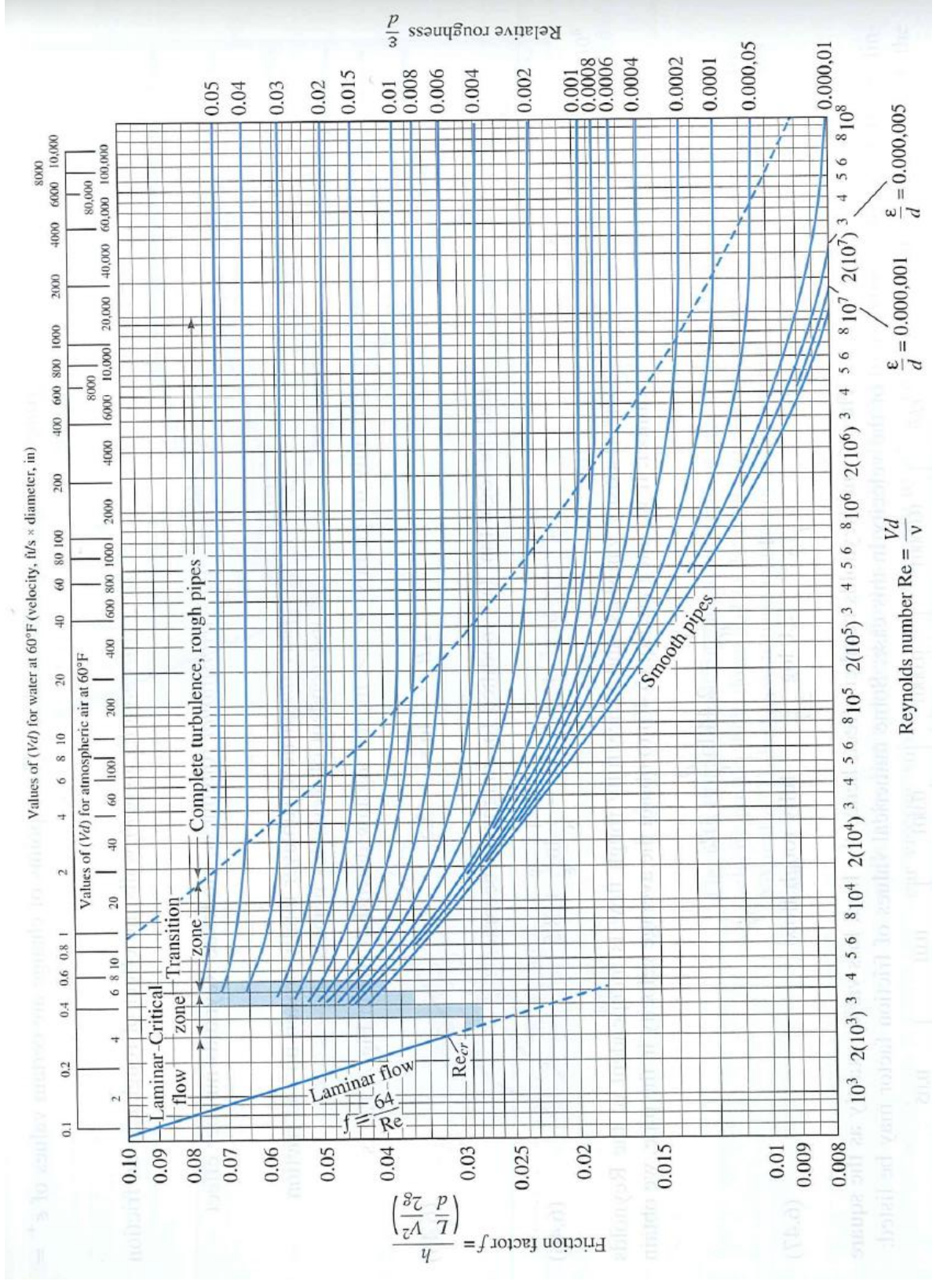
Elementära planströmningar

Uniform strömning: $\psi = Uy = Ur \sin \theta$, samt $\phi = Ux = Ur \cos \theta$

Linjekälla/-sänka: $\psi = m\theta$, samt $\phi = m \ln r$

Linjevirvel: $\psi = -K \ln r$, samt $\phi = K\theta$

Dubblätt: $\psi = -\lambda \sin \theta / r$, samt $\phi = \lambda \cos \theta / r$



Lösningar TME055 17 januari 2020

T1

- 1a) Se Föreläsning 1, slide 16
- 1b) Se Föreläsning 5, slide 10
- 1c) Jeten accelererar vattnet i omgivningen → vidgas → hastigheten sjunker
Viskös dissipation
- 1d) Pumpen ska betala "kostnaden" i form av en tryckskillnad
Trycket ökar nedåt med ρgh
 ρ är ca 1000 ggr större i vatten än i luft
Det högre trycket vid rörets början (långt ner) hjälper pumpen

T2

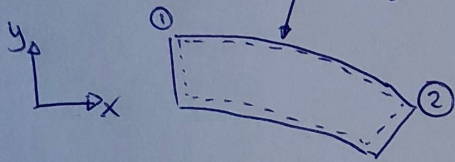
- 2a) Antag inkompressibel strömning och att modellen är korrekt skalad med
avseende på ytråhet → Re ska vara samma → lös för hastigheten
- 2b) Se Föreläsning 10, slides 39-41
- 2c) Se Föreläsning 10, slides 14-23

T3

- 3a) Se Föreläsning 8, slides 37-41, 44, 47-49
- 3b) Spolningen innebär att toalettens tank fylls upp från kallvattenstamledningen
Flödet drivs normalt av ett konstant tryck (tänk vattentorn)
När toaletten får kallvatten minskar kallvattenflödet till duschen
Duschvattnet blir då temporärt varmare
- 3c) Se Föreläsning 12, slides 54, 57-64

P1 Vi söker en kraft på rörböjen (komplex geometri & stannning
 $\Rightarrow$ Kontrollvolumensanalys!)

Val av Kontrollvolumen (flera alternativ finns!)



Söker kraft $\Rightarrow$ RMB:

$$\sum \mathbf{F} = \frac{d}{dt} \left(\int_{CV} \mathbf{U} \rho dV \right) + \int_{CS} \mathbf{U} \rho (\mathbf{U} \cdot \mathbf{n}) dA$$

$\rightarrow = 0$ antag stationärt

Kraftbalans (observera att kraften från fluiden på rörböjen = kraften på fluiden från rörböjen med omvänt tecken)

(observera även att denna kraft består av tryck- & styvningskrafter på rörbøjens inner-sidor)

$$\begin{aligned} \sum F_x &= P_1 A_1 - P_2 A_2 \cos \theta + B_x \\ \sum F_y &= P_2 A_2 \sin \theta - W + B_y \end{aligned}$$

kraft från røret på fluiden

$$\int_{CS} \mathbf{U} \rho (\mathbf{U} \cdot \mathbf{n}) dA \rightarrow \begin{aligned} &\text{x-led: } (v_2 \cos \theta) (\rho v_2 A_2) + (v_1) (-\rho v_1 A_1) \\ &\text{y-led: } (-v_2 \sin \theta) (\rho v_2 A_2) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow B_x = v_2^2 \rho A_2 \cos \theta - v_1^2 \rho A_1 - P_1 A_1 + P_2 A_2 \cos \theta$$

$$B_y = -v_2^2 \rho A_2 \sin \theta - P_2 A_2 \sin \theta + W$$

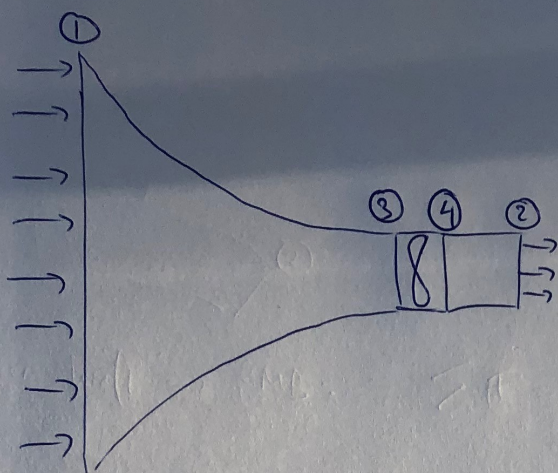
Skiv svyggene då $\dot{m} = \rho v_1 A_1 = \rho v_2 A_2$ och vi søker $R = -B$

Svar:

$$\begin{cases} R_x = \dot{m} (v_1 - v_2 \cos \theta) + P_1 A_1 - P_2 A_2 \cos \theta \\ R_y = \dot{m} v_2 \sin \theta + P_2 A_2 \sin \theta - W \end{cases}$$

P2

Såser effekten till fläkt vars geometri är komplex & okänd $\Rightarrow$ kontrollvolymensanalys!



$$V_{\text{luft}} = 0.5 \cdot (12 \cdot 40 \cdot 40) \text{ cm}^3 = 9600 \text{ cm}^3 \quad (\text{enl. uppg.})$$

Ska bytas ut varje sekund $\Rightarrow \dot{V} = \frac{V_{\text{luft}}}{\Delta t} = 9.6 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$

alt. $\dot{m} = 9.6 \cdot 10^{-3} \text{ kg/s} \quad (\rho = 1 \text{ kg/m}^3)$

Utlöppsarean är $A_2 = \frac{\pi D_2^2}{4} = 1.96 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$

Så att $V_2 = 4.9 \text{ m/s}$

Ut- och inlopp är "fria i rummet" $\Rightarrow P_1 \approx P_2 \approx P_{\text{atm}}$

Inloppsarean är mycket stor $\Rightarrow V_1 \approx 0 \text{ m/s}$

Antag försumbar horisontell skillnad $\Rightarrow z_1 \approx z_2$

$\frac{d}{dt} - \dot{W}_{\text{axel}} - \dot{W}_{\text{tryck}} = \frac{d}{dt} \left(\int_{CV} \left[\dot{u} + \frac{1}{2} V^2 + g z \right] dV \right) + \int_{CS} \left[\dot{u} + \frac{1}{2} V^2 + g z \right] (\rho V dA)$

$\frac{d}{dt} = 0$ ingen extern värmetransport
 $\dot{W}_{\text{tryck}} = 0$ inga friktions effekter
 $\frac{d}{dt} = 0$ antag stationärt
 $\int_{CS} = 0$ inga friktions effekter
 $\int_{CS} = 0$ trycket samma
 $\frac{d}{dt} = 0$ inga geometriska förändringar

$$\dot{W}_{\text{axel}} + \dot{m} \frac{V_1^2}{2} = \dot{m} \frac{V_2^2}{2} \Rightarrow \dot{W}_{\text{axel}} = 0.115 \text{ W}$$

Med 30% verkningsgrad behövs alltså $\dot{W} = \frac{\dot{W}_{\text{axel}}}{0.3} = \underline{\underline{0.38 \text{ W}}}$

Tryckskillnaden mellan ③ och ④ ovan kan uppskattas genom att anta $V_3 \approx V_4$

och $z_3 = z_4 \Rightarrow \dot{m} \frac{P_3}{\rho} + \dot{W}_{\text{axel}} = \dot{m} \frac{P_4}{\rho} \Rightarrow P_4 - P_3 = \frac{\rho \dot{W}_{\text{axel}}}{\dot{m}} \approx \underline{\underline{12 \text{ Pa}}}$

P2

Strömning mellan stakastående ^{horisontella} plattor $\rightarrow$ måste orsakas av tryckgradient!

Laminärt

Inkompressibelt

Newtonsk fluid

Stationärt (finns ingen uppgift om transienta fenomen)

Gravitationen försumbar

Fullt utvecklade strömning (oändliga plattor)

$$\text{N.S. i x-led: } \underbrace{\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right)}_{=0} = - \underbrace{\frac{\partial p}{\partial x}}_{=0} + \underbrace{\rho g_x}_{=0} + \underbrace{\mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)}_{=0}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \text{här} \quad \frac{dp}{dx} = \mu \frac{d^2 u}{dy^2}$$

$$\text{Integrera: } \frac{du}{dy} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} y + C_1$$

$$u = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2$$

$$\text{Randvillkor: } u(y=+h) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \frac{h^2}{2} + C_1 h + C_2$$

$$u(y=-h) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \frac{h^2}{2} - C_1 h + C_2$$

$$\therefore C_1 = 0$$

$$C_2 = -\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \frac{h^2}{2}$$

Vi söker hastigheten mitt mellan plattorna, dvs i $y=0$

$$\Rightarrow u(y=0) = -\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \frac{h^2}{2}$$

Tryckgradienten är okänd men kan erhållas ur väggspänningen

Det strömmar i positiv x-riktning

$\Rightarrow$ väggarna

bromsar fluiden

som "vill dra med sig" plattorna

$$\tau_{\text{vägg}} = -\mu \left. \frac{du}{dy} \right|_{y=h} = -\mu \cdot \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} h = -\frac{dp}{dx} h \Leftrightarrow \frac{dp}{dx} = -\frac{\tau_{\text{vägg}}}{h} = -1000 \text{ Pa/m}$$

Med denna gradient har vi:

$$u(y=0) = 0,5 \text{ m/s}$$

($Re_{2h} = 1000$ laminärt antagande ok)