



CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Mekanik och maritima vetenskaper
412 96 Göteborg

TME055 Strömningsmekanik

2019-04-24

Tentamen onsdagen den 24 april 2019 kl 08:30-12:30

Ansvarig lärare: Henrik Ström

Ansvarig lärare (eller någon som företräder honom) besöker salen under pågående examination för att svara på eventuella frågor. Under hela tentamen kan han nås på telefon 070 40 25 119.

Maximal poängsumma är 50. För godkänt krävs 20 poäng, för betyg 4 krävs 30 poäng och för betyg 5 krävs 40 poäng.

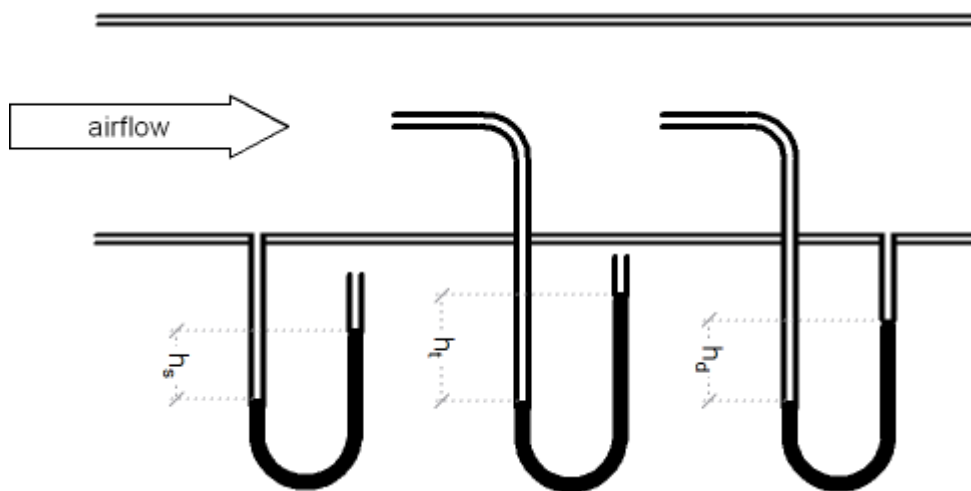
Tillåtna hjälpmedel: Valfri miniräknare med tömt minne samt matematisk handbok (t ex BETA och Physics Handbook).

Lösningar anslås på kurshemsidan i Canvas den 25 april. Även information om möjligheter till tentamensgranskning annonseras på kurshemsidan.

OBS! Notera att uppgifterna inte är ordnade efter svårighetsgrad.

T1.

- a) En liten kontrollvolym inuti en stor gasbehållare innehåller vid varje givet tillfälle ett visst antal gasmolekyler. En uppskattning av gasens densitet kan då erhållas som den sammanlagda massan av dessa gasmolekyler, Δm , dividerad med kontrollvolymens volym, ΔV . Skissa hur $\Delta m/\Delta V$ ser ut som funktion av ΔV . Rita in var gränsen mellan de två domäner som kan utrönas ur grafen går och ange deras namn. Hur ska densitet definieras för att man ska kunna bestämma densiteten i en punkt? (4 p)
- b) Bilden nedan visar tre olika konstruktioner i vilka en tryckdifferens kan avläsas i en manometer kopplad till ett större rör med strömmande luft. Vad motsvarar tryckdifferensen i de tre olika mätkonstruktionerna? Vilken konstruktion gör det möjligt att beräkna luftens hastighet? Motivera ditt svar! (2 p)



- c) Ett experiment utförs där en vätska strömmar med konstant volymsflöde i ett rör. Genom att påverka vätskans sammansättning kan viskositeten förändras i experimentet, samtidigt som tryckfallet över en sektion av röret registreras. Vid experimentets start avläses ett visst tryckfall för den initiala viskositeten. När viskositeten sedan sänks noterar man att tryckfallet blir lägre. En ytterligare sänkning av viskositeten resulterar dock i att tryckfallet åter stiger. Vilken är den bakomliggande orsaken till dessa observationer? (2 p)
- d) Lanseringen av vattengevär från tillverkaren Super Soaker revolutionerade vattenpistolmarknaden under tidigt 90-tal. Dessa vattenvapen krävde manuell luftpumpning (med ett handtag på pipan) efter vattenpåfyllning, varefter det blev möjligt att skjuta en kontinuerlig vattenstråle med avtryckaren. Förklara principen bakom denna typ av vattenpistol! (2 p)



T2.

- a) Effekten P som krävs för att röra om vätskan i en tank har funnits bero på impellerns (omrörarens) diameter D , rotationshastigheten (antal rotationer per sekund) N , samt vätskans viskositet μ och densitet ρ . Använd dimensionsanalys för att ta fram ett generellt samband för hur effekten förhåller sig till de fyra andra variablerna! Man har experimentellt slagit fast att effekten är proportionell mot rotationshastigheten i kvadrat. Hur mycket större effekt kan man då förvänta sig behöva tillföras om impellerdiametern dubblas? (4p)
- b) Ett flöde med hastigheten U transporterar ett ämne A som genomgår en kemisk reaktion $A \rightarrow 2B$, vilket får till följd att koncentrationen av A minskar i huvudströmriktningen. Den ökande koncentrationen av B ger samtidigt upphov till diffusion av ämne B i motsatt riktning mot strömningen (så kallad *bakåtdiffusion*). Vid en viss flödeshastighet U_0 är det konvektiva fluxet av B i strömriktningen identiskt med det diffusiva fluxet av B i motsatt riktning. Vilka materialdata (fluidegenskaper och/eller egenskaper relaterade till ämne B) behöver man känna till för att kunna bestämma U_0 , om koncentrationsprofilen är känd? Motivera ditt svar! Antag endimensionell strömning. (3 p)
- c) Vad är Reynoldsdekomponering? Förklara genom att visa hur den instantana hastigheten i en punkt i ett turbulent flöde kan uttryckas med hjälp av Reynoldsdekomponering. Använd sedan denna dekomponering för att härleda en differentiell kontinuitetsekvation för medelflödet vid inkompressibel strömning! (3 p)

T3.

- a) Skriv om Navier-Stokes ekvationer på dimensionslös form. Vad är den fysikaliska tolkningen av den dimensionslösa grupp som dyker upp och vad kallas den? Visa hur ekvationen kan förenklas om denna dimensionslösa grupp är mycket liten respektive mycket stor. (5 p)

- b) Lewis tal är ett dimensionslöst tal som skrivs

$$Le = \frac{\alpha}{D}$$

där α är termisk diffusivitet och D är massdiffusivitet. Om Lewis tal = 1 för en gasblandning, hur förhåller sig då det termiska gränsskiktet till koncentrationsgränsskiktet (för den komponent vars diffusivitet i blandningen är D)? (1 p)

- c) Två flygkatastrofer med nya Boeing 737 MAX flygplan inom loppet av fem månader har nyligen knutits till ett datorsystem avsett att förhindra så kallad *stallning* (överstegring), det så kallade MCAS-systemet (Maneuvering Characteristics Augmentation System). Vid stallning tappas flygplanet lyftkraft och blir samtidigt svårt att kontrollera. MCAS-systemet syftade till att rikta ner nosen vid risk för stallning, men tros ha aktiverats av misstag på grund av felaktig sensorinput. Förklara fenomenet stallning ur ett aerodynamiskt perspektiv! Hur kan en normalt fungerande vinge generera en lyftkraft för flygplanet? Vad är det som händer kring vingarna på ett flygplan när det utsätts för risk för stallning? Varför vill man rikta ner nosen på ett flygplan som är på väg att råka ut för stallning? (3 p)

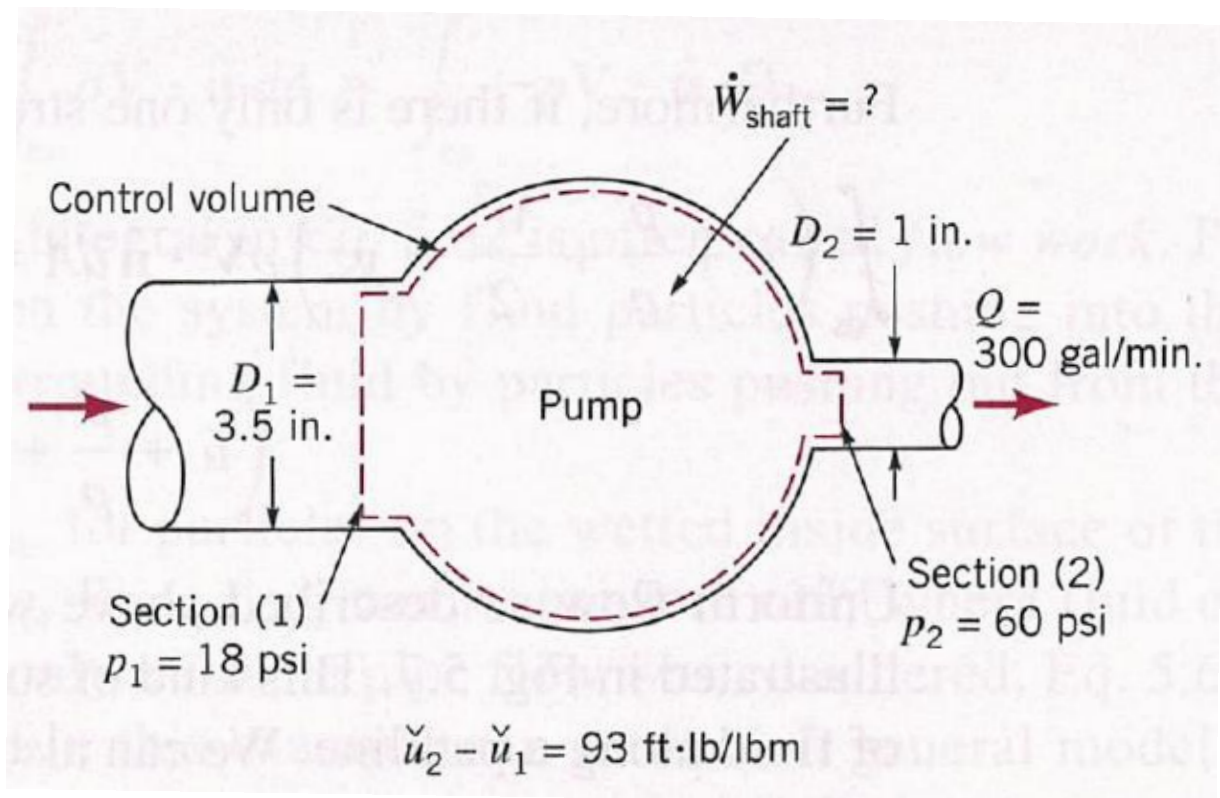


P1.

En pump levererar vatten vid ett konstant flöde av 300 gal/min = 19 liter/sekund. Alldeles uppströms pumpen (det som i figuren kallas *Section (1)*) är rördiametern 3.5 inches = 89 mm och absoluttrycket 18 psi = 124 kPa. Alldeles nedströms pumpen (det som i figuren kallas *Section (2)*) är diametern 1 inch = 25 mm och absoluttrycket 60 psi = 414 kPa. Pumpen är placerad horisontellt. Förändringen i vattnets inre energi över pumpen, $\check{u}_2 - \check{u}_1$, är 93 ft·lb/lbm = 278 J/kg, och pumpprocessen kan antas vara adiabatisk. Antag att vattnets densitet är 1000 kg/m³.

- Uppskatta hur stor effekt som krävs för att driva pumpen! (Du kan försumma mekaniska förluster i pumpen).
- Hur stor andel av pumpenergin övergår till inre energi i vattnet? Vad får detta tillskott av inre energi för effekt på det strömmande vattnet?

(7 p)

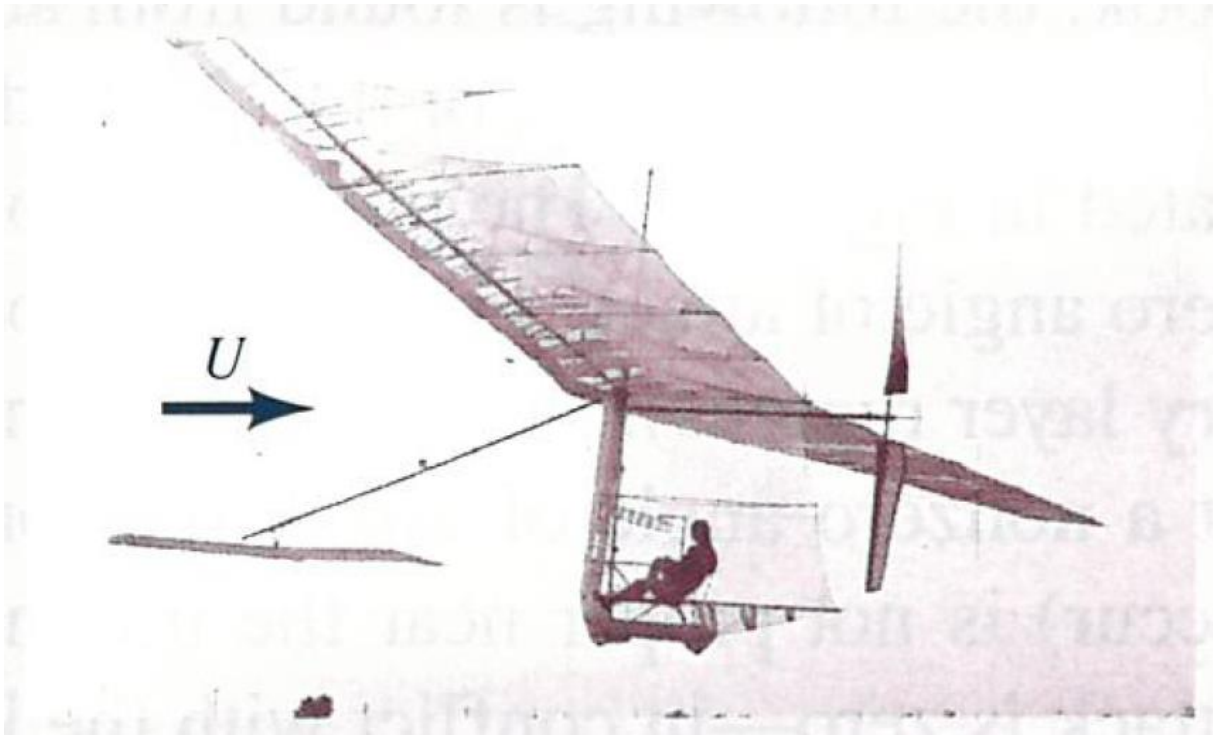


Ledning: Energibalansen för en fix kontrollvolym kan skrivas

$$\frac{dQ}{dt} - \dot{W}_{\text{axel}} - \dot{W}_{\text{visköst}} = \frac{d}{dt} \left(\int_{\text{CV}} \left(\hat{u} + \frac{1}{2} V^2 + gz \right) \rho dV \right) + \int_{\text{CS}} \left(\hat{u} + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} V^2 + gz \right) (\rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dA$$

P2.

Paul MacCready designade den första farkosten, *Gossamer Condor*, som kunde framföras kontrollerat under längre tid, driven av enbart mänsklig kraft. Denna farkost var först i sitt slag att framföras runt en ”åttaformad” bana mellan två vändpunkter placerade på $\frac{1}{2}$ miles avstånd, och med ett 10-fots hinder vid start och mål. I och med detta vann den därmed *The Kremer Prize* på £50,000 år 1977. Aktuella data för *The Gossamer Condor* finns sammanfattade nedan. Uppskatta, med hjälp av dessa, farkostens lyftkoefficient samt den effekt piloten måste tillföra för att framföra farkosten! Hur stor är lyftkraften jämfört med formmotståndskraften? (7 p)



Flyghastighet, $U = 4.6 \text{ m/s}$

Vingspann, $b = 29 \text{ m}$

Vingkorda ($\sim$ vinglängd i huvudströmriktningen), $c = 2.3 \text{ m}$

Vikt (inklusive pilot), $W = 95 \text{ kg}$

Formmotståndskoefficient, $C_D = 0.046$

Drivlinans effektivitet (kvot mellan effekten som krävs för att övervinna luftmotståndet och den totala effekten som piloten måste tillföra), $\eta = 0.8$

Luftens densitet, $\rho = 1 \text{ kg/m}^3$

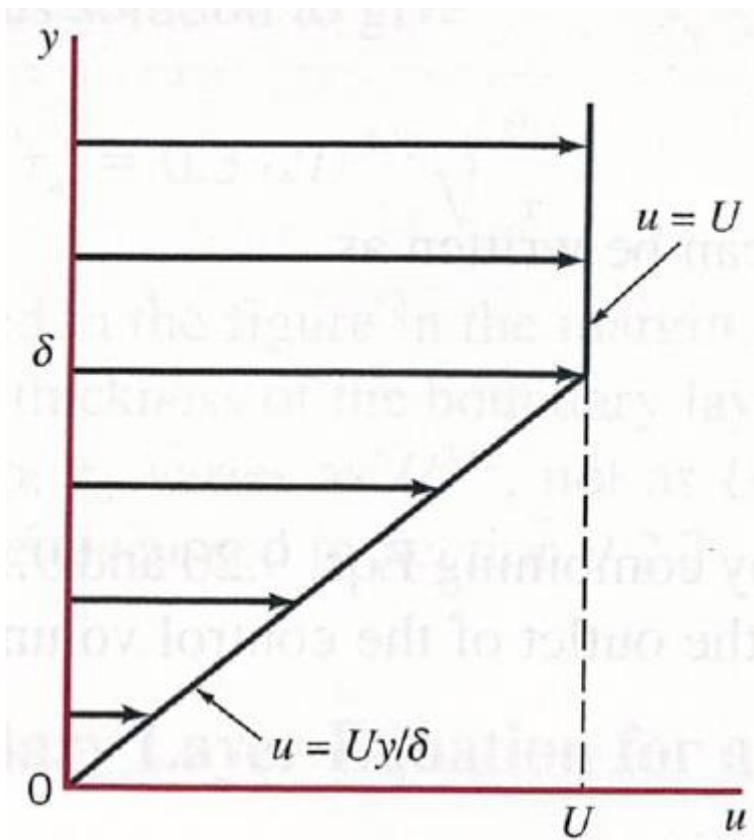
OBS! Formmotstånds- och lyftkoefficienterna är baserad på vingens *planform area*, dvs $b \cdot c$

P3.

Betrakta laminär, inkompressibel strömning av en fluid över ett horisontellt plan vid $y = 0$. En grov approximation av gränsskiktets utseende ges av:

$$u = \begin{cases} \frac{Uy}{\delta}, & 0 \leq y \leq \delta \\ U, & y > \delta \end{cases}$$

vilket även illustreras i figuren nedan. Tag, baserat på denna profil, fram ett uttryck för väggskjuvspänningen som funktion av fristörms hastigheten U och position x samt eventuella materialdata för fluiden! (7 p)



Ledning: Väggsjuvspänningen τ_w kan relateras till impulsmomentförlustjockleken θ genom

$$\tau_w = \rho U^2 \frac{d\theta}{dx}$$

där

$$\theta = \int_0^{\infty} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy$$

Formelsamling

Mekaniklagar

$$\frac{dm_{syst}}{dt} = 0$$

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{V})$$

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{H}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum (\mathbf{r} \times \mathbf{V}) \delta m \right)$$

$$\frac{dQ}{dt} - \frac{dW}{dt} = \frac{dE}{dt}$$

Reynolds transportteorem

$$\frac{dB_{syst}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\int_{CV} \beta \rho dV \right) + \int_{CS} \beta \rho (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dA$$

Differentiella samband på vektorform

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} = 0$$

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{g}$$

$$\rho \frac{D\hat{u}}{Dt} + p(\nabla \cdot \mathbf{V}) = \nabla \cdot [k\nabla T] + \Phi$$

Kontinuitetsekvationen och Navier-Stokes ekvationer i cylindriska koordinater

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (v_z) = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r} (v_r) + \frac{1}{r} v_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} (v_r) + v_z \frac{\partial}{\partial z} (v_r) - \frac{1}{r} v_\theta^2 = \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + g_r + \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r} (v_\theta) + \frac{1}{r} v_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta) + v_z \frac{\partial}{\partial z} (v_\theta) + \frac{1}{r} v_r v_\theta = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + g_\theta + \\ + \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r} (v_z) + \frac{1}{r} v_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} (v_z) + v_z \frac{\partial}{\partial z} (v_z) \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g_z + \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] \end{aligned}$$

Buckingham's π -theorem

$$i = n - r$$

Friction head enligt Weisbach

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g}$$

Engångsförluster

$$h_m = K \frac{V^2}{2g}$$

Darcys friktionsfaktor

Laminär strömning

$$f = \frac{64}{Re_D}$$

Turbulent strömning

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2.0 \log_{10}(Re_D \sqrt{f}) - 0.8 \text{ för } \varepsilon/D = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2.0 \log_{10} \left(\frac{\varepsilon/D}{3.7} \right) \text{ för } \varepsilon/D \neq 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2.0 \log_{10} \left(\frac{\varepsilon/D}{3.7} + \frac{2.51}{Re_D \sqrt{f}} \right) \text{ för } \frac{D/\varepsilon}{Re_D \sqrt{f}} > 0.005$$

Formmotstånd, lyftkraft och väggfriktionskoefficient

$$F_D = C_D A_p \frac{\rho V^2}{2}$$

$$F_L = C_L A_p \frac{\rho V^2}{2}$$

$$\tau_w = C_f \frac{\rho V^2}{2}$$

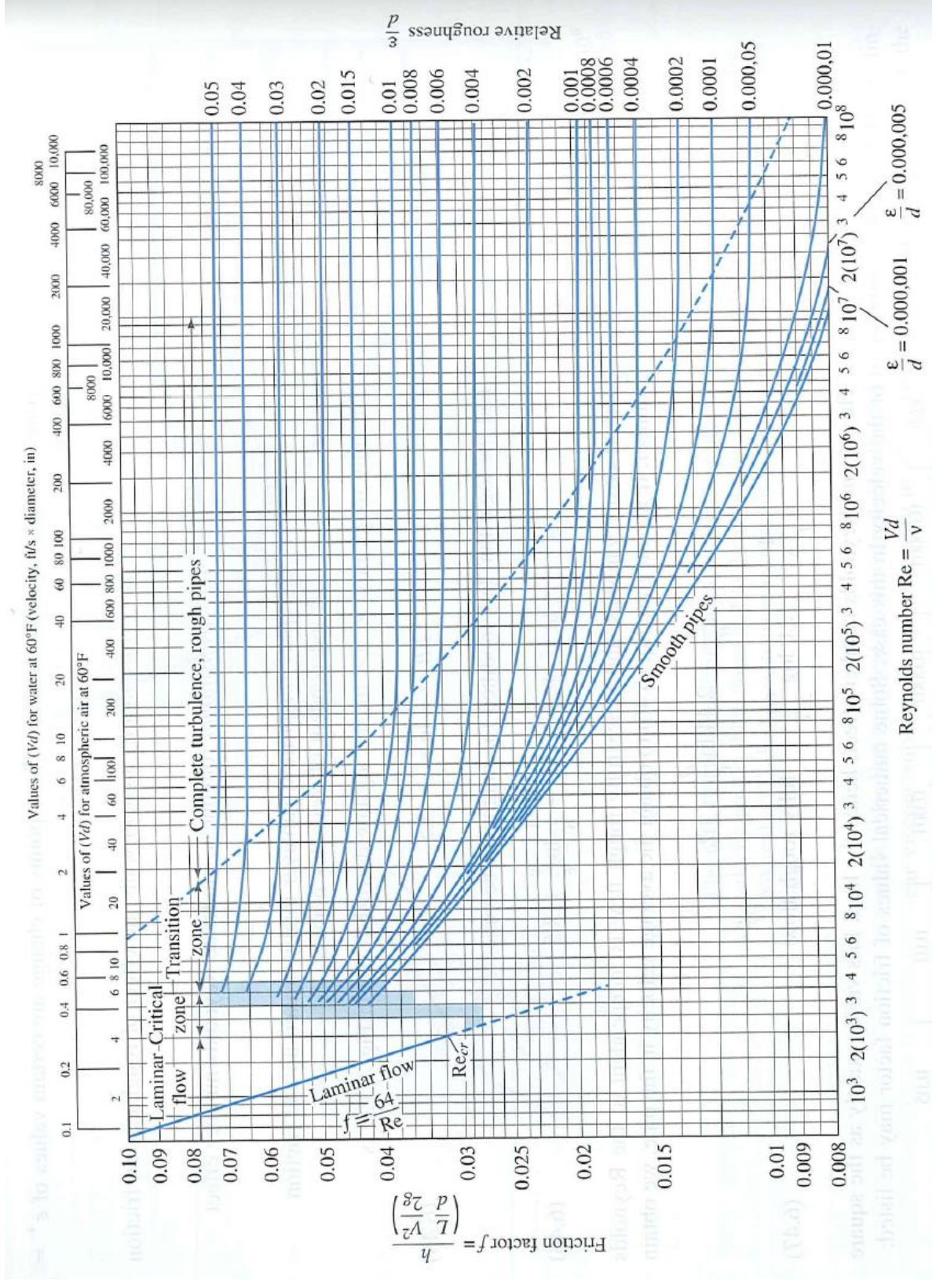
Elementära planströmningar

Uniform strömning: $\psi = Uy = Ur \sin \theta$, samt $\phi = Ux = Ur \cos \theta$

Linjekälla/-sänka: $\psi = m\theta$, samt $\phi = m \ln r$

Linjevirvel: $\psi = -K \ln r$, samt $\phi = K\theta$

Dubblätt: $\psi = -\lambda \sin \theta / r$, samt $\phi = \lambda \cos \theta / r$



P1 | Visa uppskatta effekten som krävs för att driva pumpen utan vetskap om detaljer i strömningens inre $\rightarrow$ kontrollvolymanalys!

Energil balans för fix kontrollvolym:

$$\cancel{\frac{dQ}{dt}} - \cancel{\dot{W}_{axel}} - \cancel{\dot{W}_{\text{västast}}} = \frac{d}{dt} \left(\int_{CV} \left(\hat{u} + \frac{1}{2} V^2 + gz \right) \rho dV \right) + \int_{CS} \left(\hat{u} + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} V^2 + gz \right) (\rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dA$$

Annotations:
 $\cancel{\frac{dQ}{dt}}$: = 0 ty isolerad
 $\cancel{\dot{W}_{axel}}$: = 0 ty CS normalt mot kretsströmningen alltså inget västast
 $\cancel{\dot{W}_{\text{västast}}}$: = 0 antag stationärt
 $\int_{CS}$: = 0 horisontell pump

$$\Leftrightarrow -\dot{W}_{axel} = \left(\hat{u}_2 - \hat{u}_1 + \frac{p_2}{\rho} - \frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2} V_2^2 - \frac{1}{2} V_1^2 \right) \dot{m}$$

$\dot{W}_{axel}$ är arbete som systemet utför $\rightarrow$ vi söker $\dot{W}_{pump} = -\dot{W}_{axel}$!

Vi behöver bara bestämma V_1 och V_2 samt $\dot{m}$:

$$V = \frac{Q}{A} \Rightarrow V_1 \approx 3 \text{ m/s}$$

$$V_2 \approx 38,7 \text{ m/s}$$

$$\dot{m} = \rho Q = 19 \text{ kg/s}$$

a) Sätt in: $\dot{W}_{pump} \approx \underline{\underline{24\,900 \text{ W}}} \quad (\approx 33 \text{ hästkrafter})$

b) Andelen som övergår till mer energi = $\frac{\dot{m}(\hat{u}_2 - \hat{u}_1)}{\dot{W}_{pump}} \approx \underline{\underline{21\%}}$

Den energi övergår till värme i vattnet (dvs höjer vattnets temperatur något (knapp märkligt))

P2

Vi söker lyftefficient och effekt.

Vid framfart av farkosten på konstant höjd måste lyftkraften balansera tyngdkraften, dvs

$$F_L = F_w$$

$$C_L A_p \frac{\rho U^2}{2} = mg$$

Vi har fått veta att här gäller $A_p = b \cdot c$

Lös för $C_L = \frac{2mg}{A \rho U^2} \approx \underline{1,32}$, vilket motsvarar $\frac{C_L}{C_D} \approx \underline{28,7}$ ger formmotståndskoeff.

Effekten som pilen måste tillföra för att driva farkosten motsvarar vad som krävs för att övervinna formmotståndet, med hänsyn tagen till drivlinans effektivitet

$$\eta P = F_D U$$

$$\Leftrightarrow P = \frac{F_D U}{\eta} = \frac{C_D A_p \rho U^3}{2\eta} \approx \underline{187 \text{ W}}$$

P3

Vi söker τ_w och har fått givet att

$$\tau_w = \rho U^2 \frac{d\theta}{dx} \quad (1) \quad \text{samt} \quad \theta = \int_0^\infty \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \quad (2)$$

Desfontain gäller att $\tau_w = \mu \frac{du}{dy} \Big|_{y=0} = \mu \frac{U}{\delta} \quad (3)$

Vi ser att fristörmen $u=U$ inte ger bidrag till θ och kan således skriva:

$$\begin{aligned} \theta &= \int_0^\infty \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = \int_0^\delta \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = \int_0^\delta \left(\frac{y}{\delta}\right) \left(1 - \frac{y}{\delta}\right) dy = \\ &= \left[\frac{y^2}{2\delta} - \frac{y^3}{3\delta^2} \right]_0^\delta = \frac{\delta}{2} - \frac{\delta}{3} = \frac{\delta}{6} \end{aligned}$$

Insättning i (1) ger nu $\tau_w = \rho U^2 \frac{d\theta}{dx} = \frac{\rho U^2}{6} \frac{d\delta}{dx}$

Kombinera med (3):

$$\tau_w = \mu \frac{U}{\delta} = \frac{\rho U^2}{6} \frac{d\delta}{dx}$$

$$\Leftrightarrow \delta d\delta = \frac{6\mu}{\rho U} dx$$

Denne differensial kan integreras från $x=0$ (där $\delta=0$) till x (där δ har fått fjöcklek):

$$\frac{\delta^2}{2} = \frac{6\mu x}{\rho U} \quad \Leftrightarrow \quad \delta \approx 3,46 \sqrt{\frac{\nu x}{U}}$$

Sätt ihop med (3): $\tau_w = 0,289 U^{3/2} \sqrt{\frac{\rho \mu}{x}}$

(jfr Blasius lösning: $\tau_w = 0,332 U^{3/2} \sqrt{\frac{\rho \mu}{x}}$ — skiljer borta 13% !!)