



CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Mekanik och maritima vetenskaper
412 96 Göteborg

TME055 Strömningsmekanik

2018-01-12

Tentamen fredagen den 12 januari 2018 kl 14:00-18:00

Ansvarig lärare: Henrik Ström

Ansvarig lärare (eller någon som företräder honom) besöker salen under pågående examination för att svara på eventuella frågor. Under hela tentamen kan han nås på telefon 070 40 25 119.

Maximal poängsumma är 50. För godkänt krävs 20 poäng, för betyg 4 krävs 30 poäng och för betyg 5 krävs 40 poäng.

Tillåtna hjälpmedel: Valfri miniräknare med tömt minne samt matematisk handbok (t ex BETA och Physics Handbook).

Lösningar anslås på kurshemsidan i PingPong den 15 januari. Även information om möjligheter till tentamensgranskning annonseras på kurshemsidan.

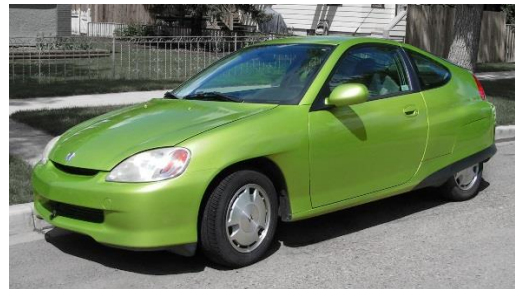
OBS! Notera att uppgifterna inte är ordnade efter svårighetsgrad.

T1.

- a) Beskriv hur densiteten av en gas bör definieras för att man ska kunna bestämma densiteten i en punkt! (2 p)
- b) Materiederivatan, D/Dt , har en central roll i de differentiella uttrycken i strömningsmekaniken. Skriv ut alla dess termer för ett generellt tredimensionellt fall och förklara vad den representerar rent fysikaliskt! (2p)
- c) Mellanrummet mellan två oändliga plattor är fyllt av en Newtonsk vätska. Den ena plattan hålls stilla medan den andra sätts i rörelse (parallellt med den första) med konstant hastighet. Det föreligger ingen tryckförändring i flödesriktningen, vilket innebär att skjuvspänningen är konstant i fluiden och kan beskrivas som $\tau = \mu du/dy$. Strömningen är laminär. Vilka fluidegenskaper påverkar hastighetsprofilens utseende när steady-state har infallit? Motivera ditt svar! (2 p)
- d) En Hummer H2 upplever drygt fem gånger så stort formmotstånd som en Honda Insight vid samma betingelser (dvs samma lufttemperatur och samma relativa hastighet till vägbana och omgivande luft). Förklara varför! (2 p)



Hummer H2



Honda Insight

- e) Kommunalt vatten till villor eller flerfamiljshus levereras normalt vid ett bestämt tryck. Vid val av duschmunstycke finns i detaljhandeln ett stort antal modeller som utlovar en reduktion av vattenflödet på upp till 35-50% i syfte att minska vattenförbrukningen. Förklara hur det är möjligt att designa ett duschmunstycke som utifrån ser likadant ut som ett konventionellt munstycke men som vid användning förbrukar så mycket mindre vatten! (Du behöver inte beakta eventuella skillnader i användarens upplevelse av att duscha med ett lägre vattenflöde)

(2 p)



T2.

- a) En serie experiment utförs för att klargöra vad som påverkar tryckfallet (per enhetslängd), Δp_ℓ , för ett slätt, horisontellt rör. Man har kommit fram till att Δp_ℓ är en funktion av rörets innerdiameter (D), vätskans densitet och viskositet (ρ och μ), samt medelhastigheten (V). Vidare har man för en experimentuppställning där $D = 1.26$ cm, $\rho = 1000$ kg/m³ och $\mu = 10^{-3}$ Pa·s samlat in följande data:

Medelhastighet, V [m/s]	Tryckfall över 1.5 m rör [kPa]
0.36	0.30
0.60	0.75
0.89	1.48
1.78	5.08
3.39	15.8
5.16	32.6
7.11	57.5
8.76	82.8

Hur kan experimentdata i tabellen ovan omformuleras för att vara användbar även i andra fall (t ex för andra rördiametrar eller andra fluider)? Ta fram ett förslag på lämplig formulering! (OBS! Du behöver inte utföra några numeriska beräkningar med data ur tabellen, bara illustrera principen). En kollega studerar strömningen av samma fluid i ett rör vars diameter är 1 mm och där medelhastigheten är 1 m/s. Kan dina data användas för att beräkna tryckfallet (per enhetslängd) för hennes uppställning?

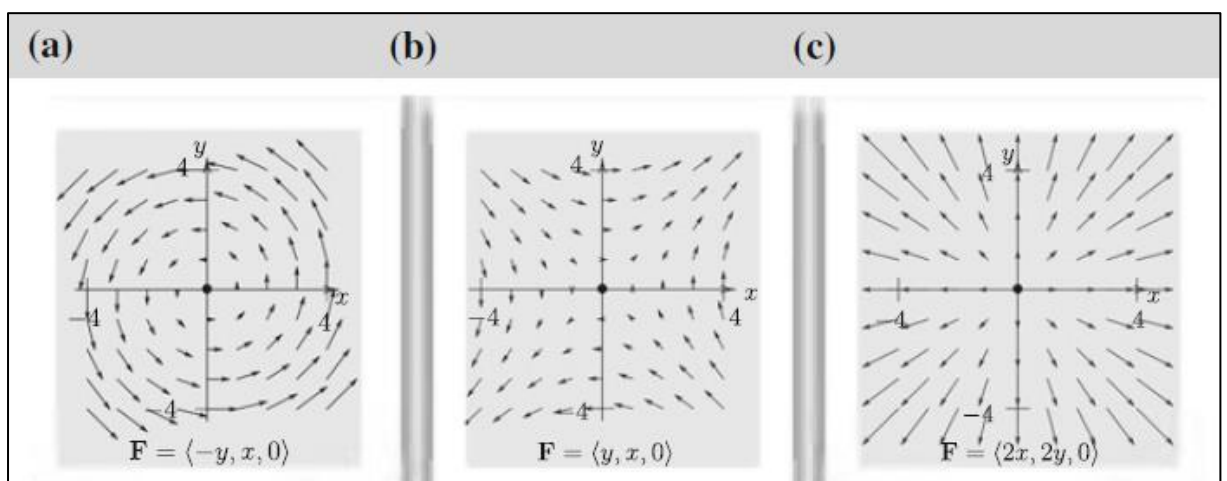
Hur/varför inte?

(6 p)

- b) Nedan återfinns tre enkla strömningsfält, kallade **(a)**, **(b)** och **(c)**.
- Vilket/vilka av dessa är exempel på inkompressibel strömning?
 - Vilket/vilka av dessa är exempel på rotationsfri strömning?
 - Vilket/vilka skulle kunna beskrivas med en strömfunktion?
 - Vilket/vilka skulle kunna beskrivas med en hastighetspotential?

OBS! Kort *matematisk* motivering krävs till svaren på (i) och (ii).

(4 p)



T3.

- a) Skriv om Navier-Stokes ekvationer på dimensionslös form. Vad är den fysikaliska tolkningen av den dimensionslösa grupp som dyker upp och vad kallas den? Visa hur ekvationen kan förenklas om denna dimensionslösa grupp är mycket liten respektive mycket stor. (5 p)
- b) Boussinesq föreslog redan 1887 den analogi mellan turbulenta spänningar och molekylära spänningar som ligger till grund för merparten av nutida industriella simuleringar av turbulent strömning. Hans idé bygger på att effekten av turbulensen på medelhastighetsfältet kan beskrivas med en turbulent viskositet, liknande den molekylära viskositeten. Ange ett bra argument för och ett bra argument mot denna liknelse mellan turbulent och viskös transport av rörelsemängd! (2 p)
- c) Varför är risken för separation störst på baksidan av en omströmmad kropp? (2 p)

P1.

En axialflödesfläkt (se figur nedan) drivs av en motor som levererar 0.4 kW till fläktbladen, vilket får den att generera en axiell luftström med hastigheten 12 m/s. Flödes hastigheten uppströms fläkten kan antas vara försumbar. Fläktens (och den genererade luftströmmens) diameter är 0.6 m. Luftens densitet är 1.23 kg/m^3 och dess viskositet är $1.8 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}$.

Uppskatta fläktens aerodynamiska verkningsgrad, det vill säga hur stor del av fläktbladens arbete som producerar användbar rörelse i fluiden! (7 p)



Ledning: Energibalansen för en fix kontrollvolym kan uttryckas som

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} - \dot{W}_{axel} - \dot{W}_{visköst} = \\ = \frac{d}{dt} \left(\int_{CV} \left(\hat{u} + \frac{1}{2} V^2 + gz \right) \rho dV \right) + \int_{CS} \left(\hat{u} + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} V^2 + gz \right) (\rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dA \end{aligned}$$

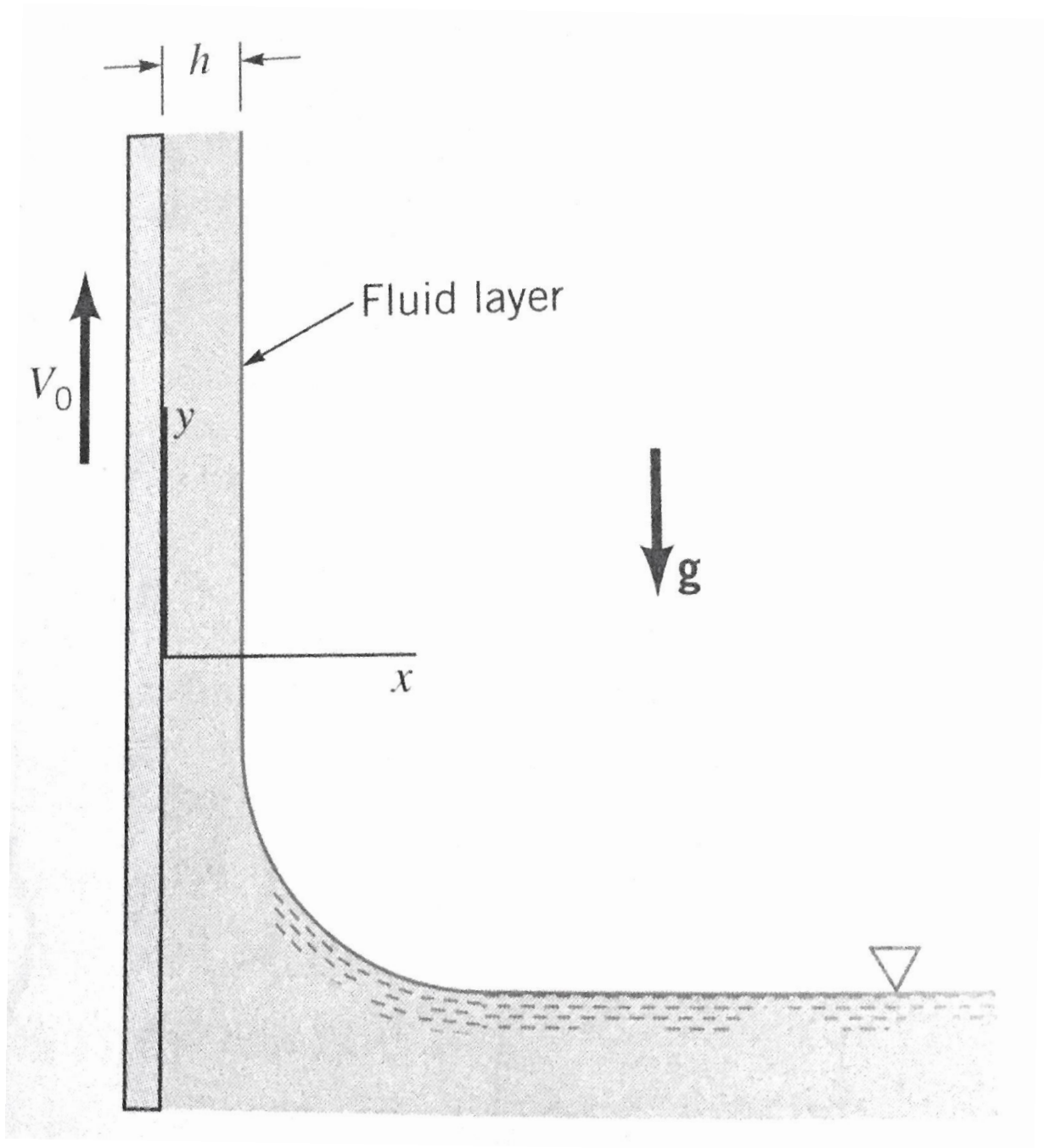
P2.

Hagel bildas då ispartiklar upprepade gånger stiger och faller i starka uppåstigande luftströmmar som skapas i åskoväder. När haglet har växt tillräckligt mycket är kraften från den uppåtgående luftströmmen inte längre tillräcklig för att förhindra att det faller till marken. När förutsättningarna är rätt kan hagelkornen bli riktigt stora. Under antagandet att även stora hagelkorn kan beskrivas som släta sfärer, uppskatta vilken hastighet som krävs på de uppåstigande luftströmmarna för att producera hagel som är 4 cm i diameter! Antag att luftens densitet och viskositet är 1 kg/m^3 och $10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}$, samt att densiteten för is är 900 kg/m^3 . Formmotståndskoefficienten, C_D , kan antas vara ungefär 0.5 vid dessa betingelser. Är strömningen runt hagelkornet laminär eller turbulent? (7 p)



P3.

En bred skiva förs genom en behållare i vilken det finns en Newtonsk vätska. Skivan förs vertikalt rakt uppåt med en konstant hastighet, V_0 , såsom illustreras i figuren nedan. På grund av viskösa krafter i vätskan kommer en vätskefilm av tjocklek h att följa med skivan uppåt. Gravitationen är riktad nedåt och verkar så att vätskan vill rinna ner tillbaka i behållaren längs med skivan. Härled ett uttryck för medelhastigheten i vätskefilmen då den dras med upp av skivan! Du kan anta att strömningen i filmen är laminär, stationär och fullt utvecklad (d v s försumma ändeffekter). (7 p)



Formelsamling

Mekaniklagar

$$\frac{dm_{syst}}{dt} = 0$$

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{V})$$

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{H}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum (\mathbf{r} \times \mathbf{V}) \delta m \right)$$

$$\frac{dQ}{dt} - \frac{dW}{dt} = \frac{dE}{dt}$$

Reynolds transportteorem

$$\frac{dB_{syst}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\int_{CV} \beta \rho dV \right) + \int_{CS} \beta \rho (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dA$$

Differentiella samband på vektorform

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} = 0$$

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{g}$$

$$\rho \frac{D\hat{u}}{Dt} + p(\nabla \cdot \mathbf{V}) = \nabla \cdot [k\nabla T] + \Phi$$

Kontinuitetsekvationen och Navier-Stokes ekvationer i cylindriska koordinater

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (v_z) = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r} (v_r) + \frac{1}{r} v_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} (v_r) + v_z \frac{\partial}{\partial z} (v_r) - \frac{1}{r} v_\theta^2 = \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + g_r + \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r} (v_\theta) + \frac{1}{r} v_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta) + v_z \frac{\partial}{\partial z} (v_\theta) + \frac{1}{r} v_r v_\theta = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + g_\theta + \\ + \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r} (v_z) + \frac{1}{r} v_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} (v_z) + v_z \frac{\partial}{\partial z} (v_z) \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g_z + \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] \end{aligned}$$

Buckingham's π -theorem

$$i = n - r$$

Friction head enligt Weisbach

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g}$$

Engångsförluster

$$h_m = K \frac{V^2}{2g}$$

Darcys friktionsfaktor

Laminär strömning

$$f = \frac{64}{Re_D}$$

Turbulent strömning

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2.0 \log_{10}(Re_D \sqrt{f}) - 0.8 \text{ för } \varepsilon/D = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2.0 \log_{10} \left(\frac{\varepsilon/D}{3.7} \right) \text{ för } \varepsilon/D \neq 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2.0 \log_{10} \left(\frac{\varepsilon/D}{3.7} + \frac{2.51}{Re_D \sqrt{f}} \right) \text{ för } \frac{D/\varepsilon}{Re_D \sqrt{f}} > 0.005$$

Formmotstånd, lyftkraft och väggfriktionskoefficient

$$F_D = C_D A_p \frac{\rho V^2}{2}$$

$$F_L = C_L A_p \frac{\rho V^2}{2}$$

$$\tau_w = C_f \frac{\rho V^2}{2}$$

Elementära planströmningar

Uniform strömning: $\psi = Uy = Ur \sin \theta$, samt $\phi = Ux = Ur \cos \theta$

Linjekälla/-sänka: $\psi = m\theta$, samt $\phi = m \ln r$

Linjevirvel: $\psi = -K \ln r$, samt $\phi = K\theta$

Dubblätt: $\psi = -\lambda \sin \theta / r$, samt $\phi = \lambda \cos \theta / r$

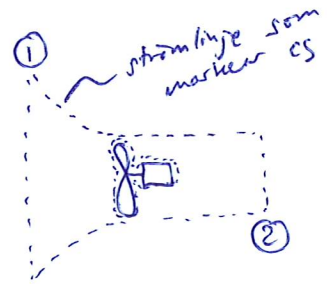
Tentamen Strömningsmekanik TME055 2018-01-12

- T1.**
- a) Föreläsning 1 / White kap. 1
 - b) Föreläsning 5 / White kap. 4
 - c) Föreläsning 1 & 7 / White kap. 1 & 4
 - d) Föreläsning 8 & 10 / White kap. 7
 - e) Föreläsning 9 / White kap. 6
- T2.**
- a) Föreläsning 8 & 9 / White kap. 5 & 6
 - b) Föreläsning 1 & 10 / White kap. 1, 4 & 8
- T3.**
- a) Föreläsning 8 / White kap. 5
 - b) Föreläsning 11 / Davidson kap. 1.1
 - c) Föreläsning 12 / White kap. 7

P1

Vi söker en verkningsgrad, dvs vi vill veta hur stor användbar värde vi producerar

Energibalans för kontrollvolymen till höger:



$$\frac{dQ}{dt} - \dot{W}_{axel} - \dot{W}_{viskosit} = \frac{d}{dt} \left(\int_{CV} \left(\hat{u} + \frac{1}{2}v^2 + gz \right) \rho dV \right) + \int_{CS} \left(\hat{u} + \frac{1}{2}v^2 + gz \right) (\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA$$

$\frac{dQ}{dt} \rightarrow 0$: ingen ext. värmeströmmar
 $\dot{W}_{axel}$: axelarbete
 $\dot{W}_{viskosit} \rightarrow 0$: inget viskosit arbete (ev effektivt lampor i förlust)
 $\frac{d}{dt} \left(\int_{CV} \dots \right) \rightarrow 0$: stationärt
 $\int_{CS} \dots$: ingen ingångskontroll (pump på båda sidor), ingen kontrollerad strömning
 förändring i $\hat{u}$ för 1 till 2 är ej användbar värde

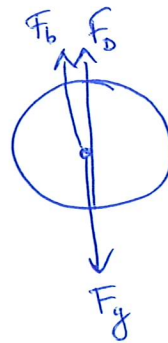
$\Leftrightarrow$

$$-\dot{W}_{axel} + \text{förlust} = \frac{1}{2} \rho V^3 \frac{\pi D^2}{4}$$

$\dot{W}_{axel}$: arbete utfört av systemet
 $= -0,4 \text{ kW}$

Vi söker $\eta = \frac{\frac{1}{2} \rho V^3 \frac{\pi D^2}{4}}{-\dot{W}_{axel}} \approx 75\%$

P2 | När kuglet är 4cm faller det nedåt $\Rightarrow$ faller med terminalhastigheten; dvs $F=ma=0$



För en sfär gäller då att

$$\Sigma F = F_b + F_D - F_g = 0$$

$$F_b = \frac{\pi d^3}{6} \rho_s g$$

$$F_g = \frac{\pi d^3}{6} \rho_s g$$

$$F_D = \frac{1}{2} C_D \rho_f V^2 \frac{\pi d^2}{4}$$

Sätt in: $V_t = \sqrt{\frac{4g d}{3C_D} \left(\frac{\rho_s - \rho_f}{\rho_f} \right)} \approx \underline{\underline{28 \text{ m/s}}}$

P3

Vi söker en medelhastighet, som vi enkelt kan ta fram om vi känner hastighetsprofilen $\rightarrow$ utgår från N-S

Fullt utvecklade strömning $\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ och $v(x)$ är vad vi söker

$$\cancel{\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right)} = - \cancel{\frac{\partial p}{\partial y}} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \rho g_y$$

stationärt $u=0$ $\frac{\partial v}{\partial y}=0$ $v=0$ $\frac{\partial v}{\partial y}=0$ $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$ $\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=0$

ty N-S i x-led
och z-led ger $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0$
dvs ingen tryckvariation i horisontalplanet;
och då p=konst på filmens yta måste således
 $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$ också gälla

Vi landar i: $0 = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \rho g$

Integrera: $\frac{dv}{dx} = \frac{\rho g}{\mu} x + C_1$

Randvillkor vid filmytan är $\tau_{xy} = \mu \frac{dv}{dx} = 0$ (vid $x=h$), så att $C_1 = -\frac{\rho g h}{\mu}$

Integrera igen: $v(x) = \frac{\rho g}{2\mu} x^2 - \frac{\rho g h}{\mu} x + C_2$

Randvillkor vid slutet är $v=V_0$ (vid $x=0$), så att $C_2 = V_0$

dvs $v(x) = \frac{\rho g}{2\mu} x^2 - \frac{\rho g h}{\mu} x + V_0$

Medelhastigheten är relaterad till volymflödet q genom $V = \frac{q}{h}$,

och $q = \int_0^h v(x) dx = \int_0^h \left(\frac{\rho g}{2\mu} x^2 - \frac{\rho g h}{\mu} x + V_0 \right) dx = V_0 h - \frac{\rho g h^3}{3\mu}$

slutligen således $V = V_0 - \frac{\rho g h^2}{3\mu}$