



CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Tillämpad mekanik
412 96 Göteborg

TME055 Strömningsmekanik

2017-08-25

Tentamen fredagen den 25 augusti 2017 kl 14:00-18:00

Ansvarig lärare: Henrik Ström

Ansvarig lärare (eller någon som företräder honom) besöker salen under pågående examination för att svara på eventuella frågor. Under hela tentamen kan han nås på telefon 070 40 25 119.

Maximal poängsumma är 50. För godkänt krävs 20 poäng, för betyg 4 krävs 30 poäng och för betyg 5 krävs 40 poäng.

Tillåtna hjälpmedel: Valfri miniräknare med tömt minne samt matematisk handbok (t ex BETA och Physics Handbook).

Lösningar anslås på kurshemsidan i PingPong den 28 augusti. Även information om möjligheter till tentamensgranskning annonseras på kurshemsidan.

OBS! Notera att uppgifterna inte är ordnade efter svårighetsgrad.

T1.

- a) Vid strömning genom ett långt rakt rör av cirkulärt tvärsnitt erhålles normalt en parabolisk hastighetsprofil då Reynolds tal är lågt. Ett undantag är dock till exempel om fluiden är luft vid atmosfärstryck och rumstemperatur och rörets diameter är mindre än $1\text{ }\mu\text{m}$. Varför blir hastighetsprofilen inte parabolisk i denna situation? Om (absolut)trycket höjs markant blir hastighetsprofilen åter parabolisk. Varför? (2 p)
- b) Ett välkänt fenomen vid vädringsförsök under varma sommardagar är att en dörr som lämnas på glänt plötsligt kan slå igen på grund av korsdrag. Förklara detta fenomen! (2p)
- c) Vad är den matematiska innebörden av ett antagande om inkompressibel strömning? För att kunna avgöra om inkompressibilitetsantagandet är acceptabelt eller inte beräknar man normalt Machtalet, som definieras som kvoten mellan en karaktäristisk hastighet och ljudhastigheten i fluiden. Varför är ljudhastigheten en relevant egenskap när det gäller att avgöra om strömningen kan betraktas som inkompressibel? (2 p)
- d) En Hummer H2 upplever drygt fem gånger så stort formmotstånd som en Honda Insight vid samma betingelser (dvs samma lufttemperatur och samma relativa hastighet till vägbana och omgivande luft). Förklara varför! (2 p)



Hummer H2



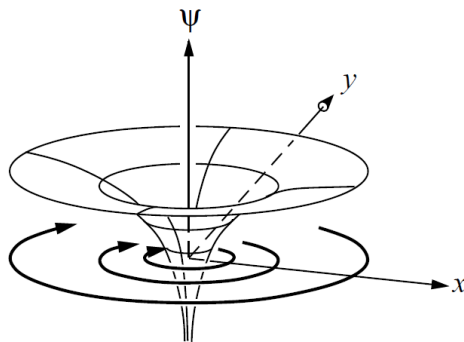
Honda Insight

- e) Ketchup är välkänd icke-Newtonska fluid som ofta behöver lite ”hjälp” för att börja rinna effektivt ur flaskan. Rita upp ett diagram med deformationshastighet på x-axeln och skjuvspänning på y-axeln. Rita därefter in kurvor för en Newtonska fluid (t ex vatten) och för en icke-Newtonska av samma typ som ketchup. (2 p)

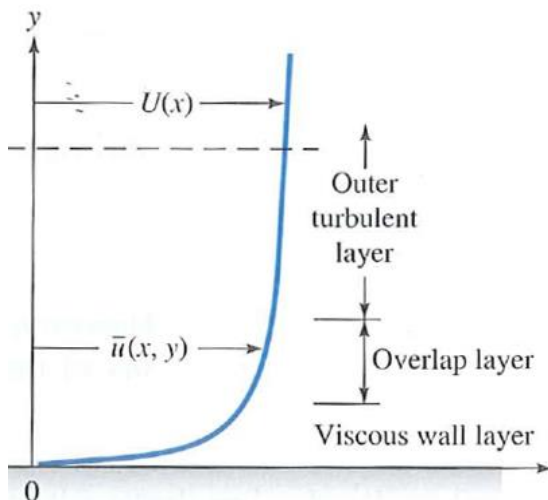
T2.

- a) Kraften F på ett föremål i en strömmande fluid kan tänkas bero på hastigheten V , storleken L samt fluidens egenskaper ρ och μ . Hur många dimensionslösa grupper behövs för att beskriva denna situation? Ge förslag på hur de skulle kunna se ut! Vad finns det för fördel med att gå över till dimensionslös form om vi till exempel är intresserade av att ta reda på hur F varierar genom att utföra experiment i en vindtunnel? (4 p)

- b) En rotationsfri virvel (se figur nedan) kan beskrivas med strömfunktionen $\psi(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$. Ange vilka uttryck för hastighetskomponenterna $u(x, y)$ och $v(x, y)$ som detta motsvarar! (2 p)

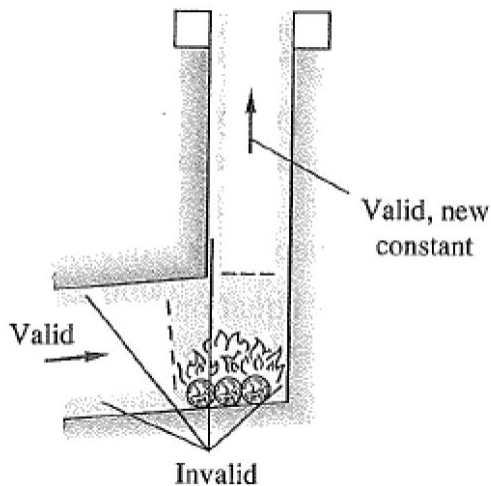


- c) Figuren nedan illustrerar hur medelhastighetsprofilen $\bar{u}(x, y)$ möter friströms-hastigheten $U(x)$ i ett turbulent flöde över en vägg (variabeln y markerar koordinat-riktningen normalt mot väggen). Rita en korresponderande graf över hur profilen för medelskjuvspänningen $\bar{\tau}(x, y)$ ser ut i detta turbulenta gränsskikt. Indikera i din figur hur stor del av $\bar{\tau}(x, y)$ som beror av viskösa effekter och hur stor del som går att hänföra till turbulenta effekter, samt hur denna uppdelning varierar som funktion av y . Varför ser kurvan för det turbulenta bidraget ut som den gör i närheten av $y = 0$? Och vad illustrerar den streckade linjen i figuren? (4 p)



T3.

- a) Skriv om Navier-Stokes ekvationer på dimensionslös form. Vad är den fysikaliska tolkningen av den dimensionslösa grupp som dyker upp och vad kallas den? Visa hur ekvationen kan förenklas om denna dimensionslösa grupp är mycket liten respektive mycket stor. (5 p)
- b) Bilden nedan visar ett exempel där vissa begränsningar finns för användandet av Bernoullis ekvation. Varför är Bernoullis ekvation inte tillämpbar i regionerna märkta "Invalid"? Och vad innebär det att Bernoullis ekvation är giltig såväl före som efter den brinnande veden, men med olika konstanter? (2 p)



- c) Den turbulenta kinetiska energin är ett mått på rörelseenergin hos virvlarna i ett turbulent flöde. Genom en så kallad energikaskad flödar energin från större till mindre virvlar. Varifrån kommer energin ursprungligen hos de stora virvlarna och vart tar energin som lämnar de små virvlarna vägen? (2 p)

P1.

En spruta ska användas för att vaccinera en ko. Pistongen har en tvärsnittsarea på 500 mm^2 , och man vill att vätskan i sprutan ska injiceras med en flödes hastighet av $300 \text{ cm}^3/\text{min}$. Läckaget förbi pistongen är 0.1 gånger volymsflödet ut ur sprutan. Med vilken hastighet ska pistongen tryckas ned? (7 p)



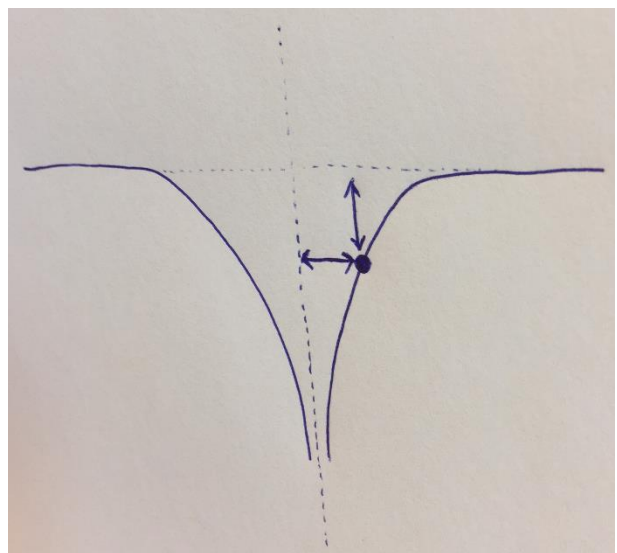
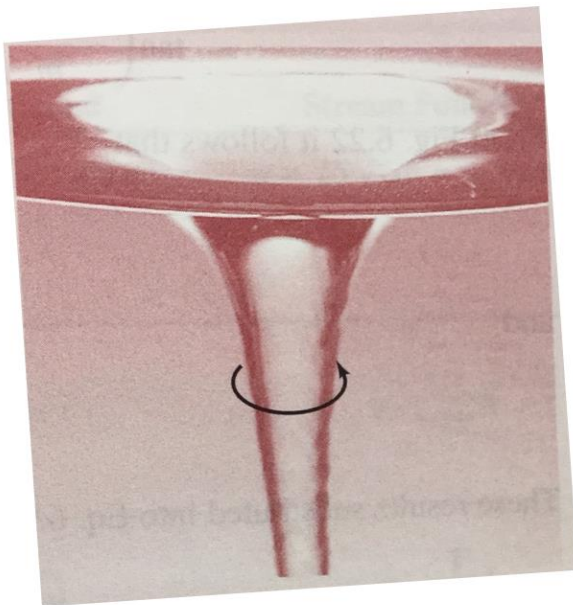
P2.

Då en stor tank töms genom ett litet hål i botten bildas en virvel (se figur nedan till vänster) vars hastighetsfält långt bort från öppningen approximativt kan beskrivas med hastighetspotentialen

$$\phi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta.$$

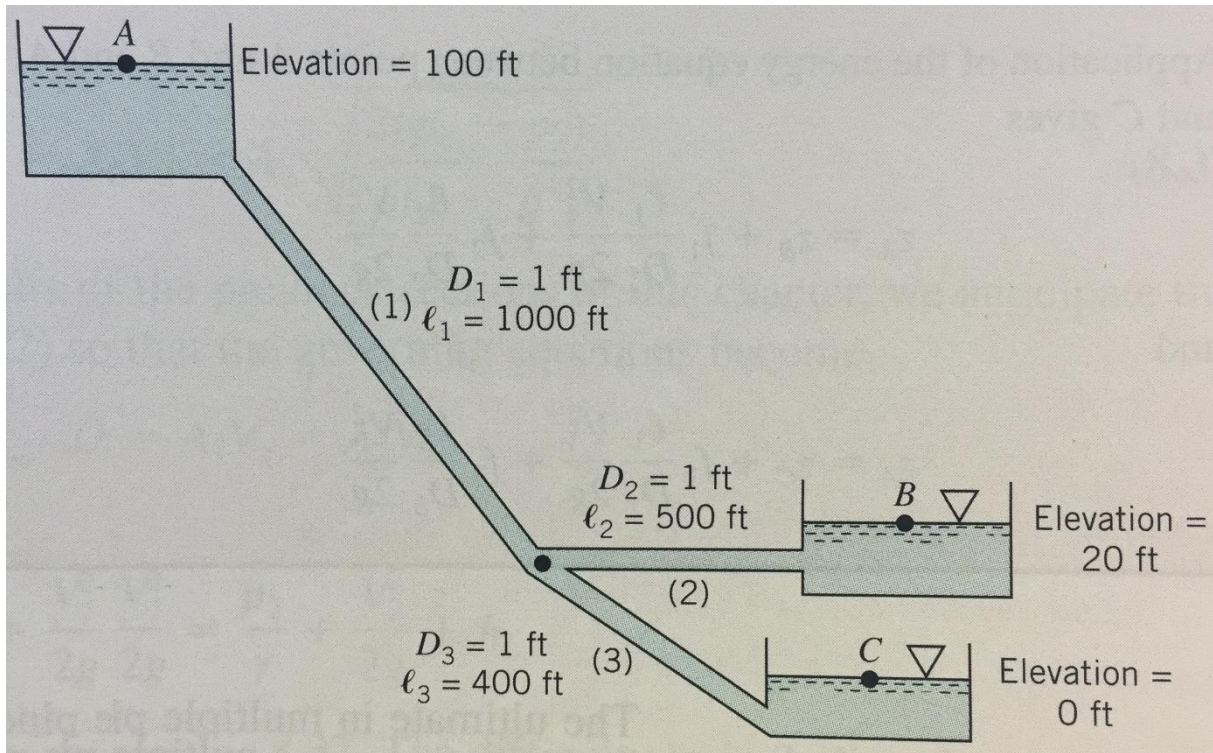
- a) Det finns en punkt på den fria vätskeytan där avståndet till virvelns axel är identiskt med avståndet till vätskeytan oändligt långt från virvlens axel (se skiss nedan till höger). Hitta denna punkt!
- b) I vilken region av flödet är approximationen given av hastighetspotentialen ovan uppenbart otillförlitlig?

(7 p)



P3.

Tre reservoarer är sammankopplade med tre rörledningar enligt figuren nedan. Samtliga rör har diametern 1 ft och en friktionsfaktor på 0.02. Bestäm flödet in eller ut ur var och en av de tre reservoarerna! (7 p)



Använd 1 ft = 1 fot = 0.3 m.

Formelsamling

Mekaniklagar

$$\frac{dm_{syst}}{dt} = 0$$

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{V})$$

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{H}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum (\mathbf{r} \times \mathbf{V}) \delta m \right)$$

$$\frac{dQ}{dt} - \frac{dW}{dt} = \frac{dE}{dt}$$

Reynolds transportteorem

$$\frac{dB_{syst}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\int_{CV} \beta \rho dV \right) + \int_{CS} \beta \rho (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dA$$

Differentiella samband på vektorform

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} = 0$$

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{g}$$

$$\rho \frac{D\hat{u}}{Dt} + p(\nabla \cdot \mathbf{V}) = \nabla \cdot [k\nabla T] + \Phi$$

Kontinuitetsekvationen och Navier-Stokes ekvationer i cylindriska koordinater

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (v_z) = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r} (v_r) + \frac{1}{r} v_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} (v_r) + v_z \frac{\partial}{\partial z} (v_r) - \frac{1}{r} v_\theta^2 = \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + g_r + \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r} (v_\theta) + \frac{1}{r} v_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta) + v_z \frac{\partial}{\partial z} (v_\theta) + \frac{1}{r} v_r v_\theta = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + g_\theta + \\ + \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r} (v_z) + \frac{1}{r} v_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} (v_z) + v_z \frac{\partial}{\partial z} (v_z) \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g_z + \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] \end{aligned}$$

Buckingham's π -theorem

$$i = n - r$$

Friction head enligt Weisbach

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g}$$

Engångsförluster

$$h_m = K \frac{V^2}{2g}$$

Darcys friktionsfaktor

Laminär strömning

$$f = \frac{64}{Re_D}$$

Turbulent strömning

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2.0 \log_{10}(Re_D \sqrt{f}) - 0.8 \text{ för } \varepsilon/D = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2.0 \log_{10} \left(\frac{\varepsilon/D}{3.7} \right) \text{ för } \varepsilon/D \neq 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2.0 \log_{10} \left(\frac{\varepsilon/D}{3.7} + \frac{2.51}{Re_D \sqrt{f}} \right) \text{ för } \frac{D/\varepsilon}{Re_D \sqrt{f}} > 0.005$$

Formmotstånd, lyftkraft och väggfriktionskoefficient

$$F_D = C_D A_p \frac{\rho V^2}{2}$$

$$F_L = C_L A_p \frac{\rho V^2}{2}$$

$$\tau_w = C_f \frac{\rho V^2}{2}$$

Elementära planströmningar

Uniform strömning: $\psi = Uy = Ur \sin \theta$, samt $\phi = Ux = Ur \cos \theta$

Linjekälla/-sänka: $\psi = m\theta$, samt $\phi = m \ln r$

Linjevirvel: $\psi = -K \ln r$, samt $\phi = K\theta$

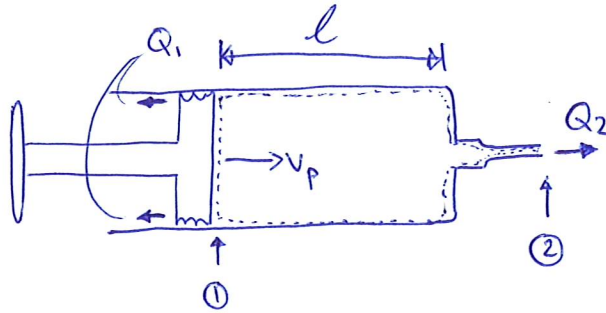
Dubblätt: $\psi = -\lambda \sin \theta / r$, samt $\phi = \lambda \cos \theta / r$

Tentamen Strömningsmekanik TME055 2017-08-25

- T1.**
- a) Föreläsning 1 / White kap. 1
 - b) Föreläsning 3 / White kap. 3
 - c) Föreläsning 1 & 5 / White kap. 1 & 4
 - d) Föreläsning 8 & 10 / White kap. 7
 - e) Föreläsning 1 / White kap. 1
- T2.**
- a) Föreläsning 8 / White kap. 5
 - b) Föreläsning 10 / White kap. 4
 - c) Föreläsning 11 / Davidson kap. 1.1 / White kap. 6 & 7
- T3.**
- a) Föreläsning 8 / White kap. 5
 - b) Föreläsning 3 / White kap. 3
 - c) Föreläsning 11 / Davidson kap. 1.1

P1

En spruta som trycks in $\rightarrow$ masskonservering för
deformerande kontrollvolym!



Kontrollvolym väljs (lämpligen
som i skissen till vänster

Det förekommer visserligen något
läckage, men antag ändå att
den projicerade arean $A_{p1} = A_{p2} \approx A_{p, pistong}$
 $= 500 \text{ mm}^2$

Vi har för läckaget att $Q_1 = 0,1 Q_2$ (och $Q_2 = 300 \text{ cm}^3/\text{min}$)

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho dV + \int_{cs} \rho (\mathbf{W} \cdot \mathbf{n}) dA = 0$$

Antag 1D och vi erhåller: $\frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho dV + \rho Q_2 + \rho Q_1 = 0$

För volymintegralen måste det gälla att $\int_{cv} \rho dV = \rho (l A_1 + V_{nål})$

där $V_{nål}$ är den totala volymen av sprutans nål.

$$\text{Således: } \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho dV = \rho A_1 \frac{\partial l}{\partial t}$$

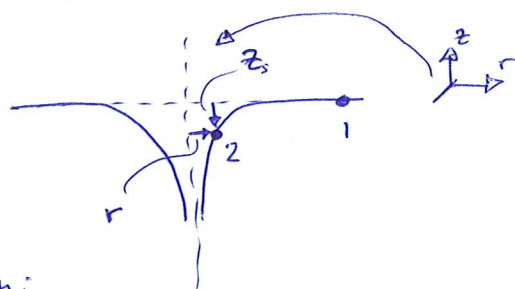
Vi söker hastigheten $V_p = -\frac{\partial l}{\partial t}$, så att: $-\rho A_1 V_p + \rho Q_2 + 0,1 \rho Q_2 = 0$

Lös ut $V_p \approx 660 \text{ mm/min}$

P2

Hastighetspotentialen existerar $\rightarrow$ vi kan anta inkompressibelt & utan viskosa effekter (rotationsfritt hastighetsfält) $\rightarrow$ Bernoulli gäller

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2$$



Välj två punkter på den fria vätskeytan:

$p_1 = p_2 = 0$ och sätt punkten vid $r \rightarrow \infty$ till nollnivå (1)

$$\Rightarrow \frac{V_1^2}{2g} = z_s + \frac{V_2^2}{2g}$$

Hastighetsfältet är givet: $V_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{\Gamma}{2\pi r}$

Da $r \rightarrow \infty$ förväntas vi oss att $V_\theta \rightarrow 0$, så:

$$z_s = -\frac{\Gamma^2}{8\pi^2 r^2 g}$$

a) Vi söker punkten $r = z_s \Rightarrow z_s^3 = -\frac{\Gamma^2}{8\pi^2 g}$

$$\text{dvs } z_s = \sqrt[3]{-\frac{\Gamma^2}{8\pi^2 g}}$$

b) Da $V_\theta \propto \frac{1}{r}$ så går hastigheten mot oändligheten när man närmar sig virvelns axel, vilket inte kan vara korrekt.

P3

Det är inte uppenbart åt vilket håll det flödar i rör (2), så vi måste börja med att anta något. Antag därför att det flödar in i reservoar B och C och ut ur reservoar A.

Rörssystem $\rightarrow$ Bernoulli med förluster!

Massbalans: $Q_1 = Q_2 + Q_3 \Leftrightarrow V_1 = V_2 + V_3$ (Samma diameter överallt)

Bernoulli mellan A och B: $z_A = z_B + f_1 \frac{L_1}{D_1} \frac{V_1^2}{2g} + f_2 \frac{L_2}{D_2} \frac{V_2^2}{2g}$ (1)

Bernoulli mellan A och C: $z_A = z_C + f_1 \frac{L_1}{D_1} \frac{V_1^2}{2g} + f_3 \frac{L_3}{D_3} \frac{V_3^2}{2g}$ (2)

Sätt in givna data:

$$258 = V_1^2 + 0,5 V_2^2 \quad (1)$$

$$322 = V_1^2 + 0,4 V_3^2 \quad (2)$$

$$V_1 = V_2 + V_3 \quad (3)$$

här har vi vårt ekvationssystem!

Lös* och erhåll: $Q_1 = A_1 V_1 = \underline{12,5 \text{ ft}^3/\text{s}} \text{ ut ur A}$

$Q_2 = A_2 V_2 = \underline{2,26 \text{ ft}^3/\text{s}} \text{ in i B}$

$Q_3 = A_3 V_3 = \underline{10,2 \text{ ft}^3/\text{s}} \text{ in i C}$

(* tex: subtrahera (1) från (2) $\rightarrow V_3 = \sqrt{160 + 1,25 V_2^2}$ (4)

Sätt in (3) och (4) i (1) och kvadrera $\rightarrow V_2^4 - 460 V_2^2 + 3748 = 0$

ger $V_2^2 = 452$ eller $V_2^2 = 8,3$, att. 1 är inte en rot till uspr. ekv. så $V_2 = 2,88 \text{ ft/s}$

Sätt in $V_2 = 2,88 \text{ ft/s}$ i (1) $\rightarrow V_1 = 15,9 \text{ ft/s}$

Sätt in i (2) eller (3) $\rightarrow V_3 = 13,02 \text{ ft/s}$

(Om antagandet att det flödar ut ur B görs istället, erhålles ett ekvationssystem som saknar positiva reella lösningar för alla de tre hastigheterna. Detta antagande är alltså ej korrekt.)