



CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Tillämpad mekanik
412 96 Göteborg

TME055 Strömningsmekanik

2017-04-10

Tentamen måndagen den 10 april 2017 kl 08:30-12:30

Ansvarig lärare: Henrik Ström

Ansvarig lärare (eller någon som företräder honom) besöker salen under pågående examination för att svara på eventuella frågor. Under hela tentamen kan han nås på telefon 070 40 25 119.

Maximal poängsumma är 50. För godkänt krävs 20 poäng, för betyg 4 krävs 30 poäng och för betyg 5 krävs 40 poäng.

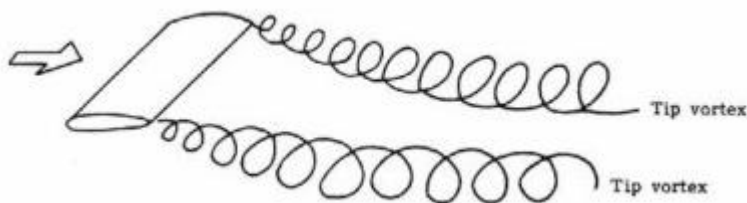
Tillåtna hjälpmedel: Valfri miniräknare med tömt minne samt matematisk handbok (t ex BETA och Physics Handbook).

Lösningar anslås på kurshemsidan i PingPong den 11 april. Även information om möjligheter till tentamensgranskning annonseras på kurshemsidan.

OBS! Notera att uppgifterna inte är ordnade efter svårighetsgrad.

T1.

- a) En liten kontrollvolym inuti en stor gasbehållare innehåller vid varje givet tillfälle ett visst antal gasmolekyler. En uppskattning av gasens densitet kan då erhållas som den sammanlagda massan av dessa gasmolekyler, Δm , dividerad med kontrollvolymens volym, ΔV . Skissa hur $\Delta m/\Delta V$ ser ut som funktion av ΔV . Rita in var gränsen mellan de två domäner som kan utrönas ur grafen går och ange deras namn. Hur ska densitet definieras för att man ska kunna bestämma densiteten i en punkt? (4 p)
- b) No-slip randvillkoret säger att hastigheten hos en strömmande fluid vid en stillastående vägg är identisk med noll. Detta till trots tar det inte oändlig tid för molekylerna närmast väggen att strömma genom ett rörsystem. Varför? (1 p)
- c) De flesta av oss associerar väderrapporter om kommande ”lågtryck” till dåligt väder, med till exempel kalla vindar och regn. Varför är dåligt väder och lågtryck så ofta sammanlänkande? (Ledning: Moln och regn bildas genom att vattenånga i luften kondenserar ut då luften kyls ned.) (2 p)
- d) Fenomenet med roterande luftmassor bakom en flygplansvinge i luften kallas *wingtip vortices* och illustreras i figuren nedan. Fenomenet uppstår i situationer då vingen ger planet en positiv lyftkraft uppåt. En observatör placerad längst bak i flygplanet med blicken framåt kommer att se en virvel vid båda vingtipparna, där den till vänster kommer att rotera medurs och den till höger moturs. Ge en principiell förklaring till hur detta fenomen uppkommer! Virvlarna kan överleva många kilometer bakom flygplanet och utgör stor fara för andra flygplan, som kan kastas runt av dem. Förklara också vilket fysikaliskt fenomen som till slut gör att virvlarna försvinner! (3 p)



T2.

- a) Kraften F på ett föremål i en strömmande fluid kan tänkas bero på hastigheten V , storleken L samt fluidens egenskaper ρ och μ . Hur många dimensionslösa grupper behövs för att beskriva denna situation? Ge förslag på vilka hur de skulle kunna se ut! (3 p)

- b) Ett hastighetsfält är definierat enligt:

$$\begin{aligned}u &= a(x^2 - y^2) \\v &= -2axy \\w &= 0\end{aligned}$$

där a är en konstant. Härled en strömfunktion ψ som beskriver detta hastighetsfält och använd den för att rita en valfri strömlinje! (4 p)

- c) Turbulent strömning är alltid tredimensionell. Föreställ dig ett initialt fall av väldefinierad strömning, med endast en roterande virvel. Förklara genom vilka fysikaliska principer som förekomsten av hastighetsgradienter kan orsaka vorticitet i samtliga koordinatriktningar med denna situation som utgångspunkt! (3 p)

T3.

- a) Skriv om Navier-Stokes ekvationer på dimensionslös form. Vad är den fysikaliska tolkningen av den dimensionslösa grupp som dyker upp och vad kallas den? Visa hur ekvationen kan förenklas om denna dimensionslösa grupp är mycket liten respektive mycket stor. (5 p)

- b) Prandtls tal är ett dimensionslöst tal som definieras på följande sätt:

$$Pr = \frac{\mu c_p}{k} = \frac{\nu}{\alpha}$$

En tolkning av Prandtls tal är att det anger hur tjockt gränsskiktet för rörelsemängds-transport är i jämförelse med det termiska gränsskiktet. Illustrera, genom att rita relevanta hastighets- och temperaturprofiler, hur de två gränsskiktstjocklekarna förhåller sig då kall motorolja strömmar över en varm yta! För denna situation gäller att $Pr \gg 1$. (2 p)

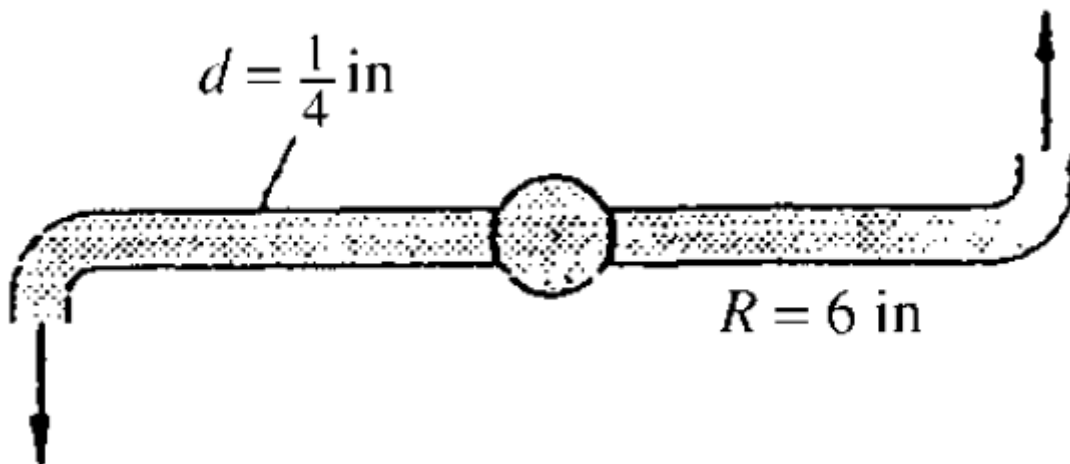
- c) Varför uppstår separation aldrig vid strömning genom en förträngning? (2 p)

P1.

En horisontell vattenspridare med två armar förses med vatten i centrum (se figur nedan). Vattenflödet är 15 l/min, och luftmotståndet mot armarnas rörelse kan försummas.

- Bestäm det moment som skulle krävas vid centrum för att förhindra att vattenspridaren alls roterar.
- Uppskatta med vilken hastighet vattenspridaren roterar (varv/min) om den får rotera helt friktionsfritt (dvs utan bromsande moment).

(7 p)



1 inch = 2.54 cm

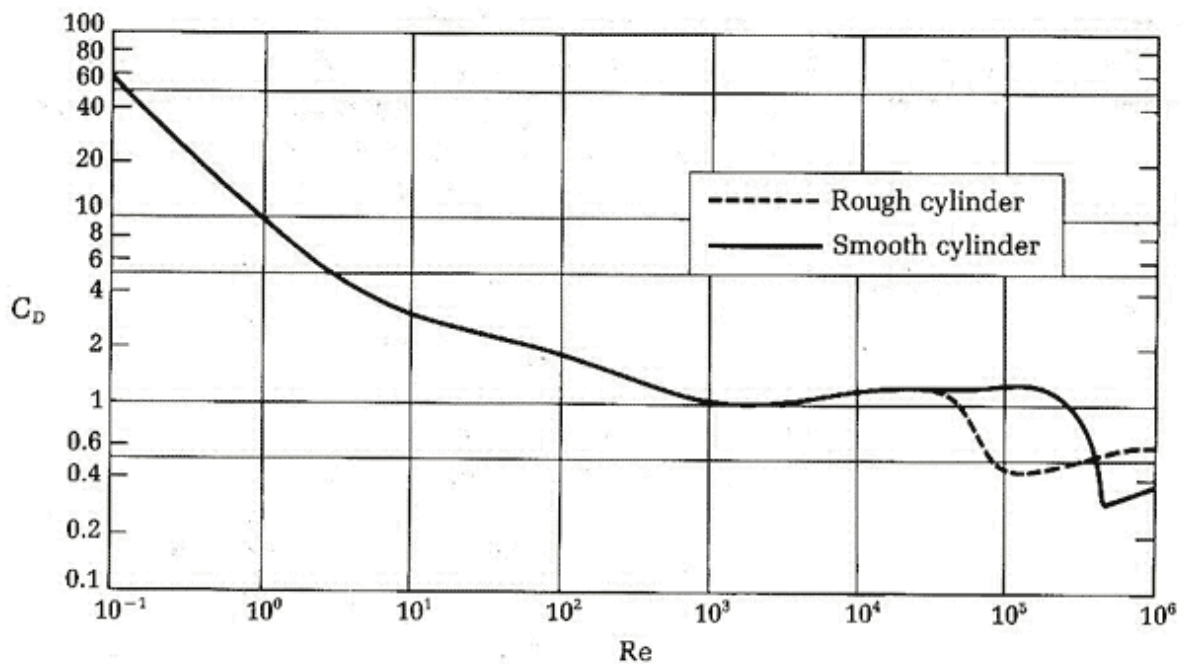
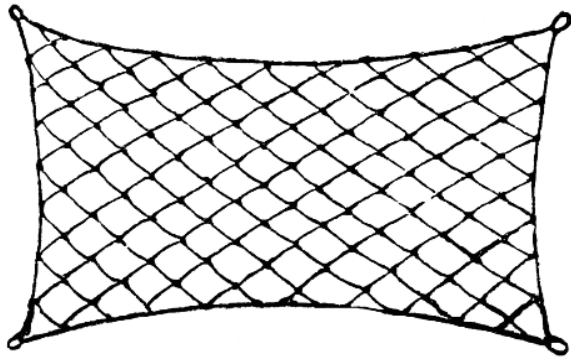
Vattendata: $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$

$\mu = 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$

P2.

Ett fisknät är tillverkat av slät tråd med diametern 1 mm, som har knutits ihop så att det bildar ett stort antal fyrkanter på 2x2 cm (se principskiss nedan). Uppskatta vilken effekt som krävs för att dra ett 30 m² stort sådant fisknät under vatten normalt mot huvudströmriktningen vid en hastighet av 3 knop!

(7 p)



Vattendata: $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$

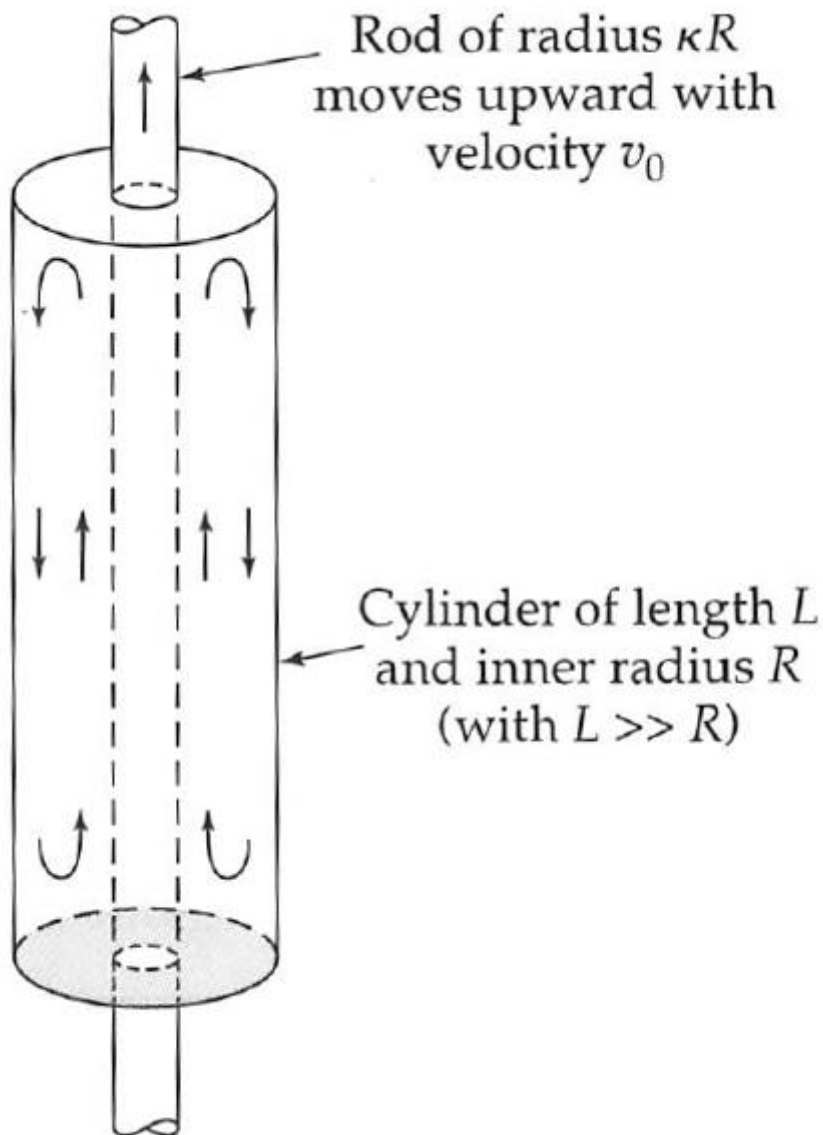
$\mu = 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$

1 knop motsvarar 1852 m/h.

1 hästkraft motsvarar 0.735 kW.

P3.

En stav (på engelska *rod*) dras uppåt med konstant hastighet v_0 genom en cylindrisk behållare med innerradie R . Behållaren innehåller en Newtonsk vätska. Stavens rörelse får vätskan att cirkulera i behållaren: den rör sig uppåt längs den centrerade staven och nedåt vid behållarens stillastående väggar. Härled ett uttryck för hastighetsprofilen i vätskan i mitten av behållaren (dvs försumma ändeffekter)! Du kan anta att κ är bara lite mindre än ett, så att kurvaturen i problemställningen är försumbar. (7 p)



Formelsamling

Mekaniklagar

$$\frac{dm_{syst}}{dt} = 0$$

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{V})$$

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{H}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum (\mathbf{r} \times \mathbf{V}) \delta m \right)$$

$$\frac{dQ}{dt} - \frac{dW}{dt} = \frac{dE}{dt}$$

Reynolds transportteorem

$$\frac{dB_{syst}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\int_{CV} \beta \rho d\mathcal{V} \right) + \int_{CS} \beta \rho (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dA$$

Differentiella samband på vektorform

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} = 0$$

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{g}$$

$$\rho \frac{D\hat{u}}{Dt} + p(\nabla \cdot \mathbf{V}) = \nabla \cdot [k\nabla T] + \Phi$$

Kontinuitetsekvationen och Navier-Stokes ekvationer i cylindriska koordinater

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (v_z) = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r} (v_r) + \frac{1}{r} v_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} (v_r) + v_z \frac{\partial}{\partial z} (v_r) - \frac{1}{r} v_\theta^2 = \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + g_r + \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r} (v_\theta) + \frac{1}{r} v_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta) + v_z \frac{\partial}{\partial z} (v_\theta) + \frac{1}{r} v_r v_\theta = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + g_\theta + \\ + \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r} (v_z) + \frac{1}{r} v_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} (v_z) + v_z \frac{\partial}{\partial z} (v_z) \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g_z + \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] \end{aligned}$$

Buckingham's π -theorem

$$i = n - r$$

Friction head enligt Weisbach

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g}$$

Engångsförluster

$$h_m = K \frac{V^2}{2g}$$

Darcys friktionsfaktor

Laminär strömning

$$f = \frac{64}{Re_D}$$

Turbulent strömning

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2.0 \log_{10}(Re_D \sqrt{f}) - 0.8 \text{ för } \varepsilon/D = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2.0 \log_{10} \left(\frac{\varepsilon/D}{3.7} \right) \text{ för } \varepsilon/D \neq 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2.0 \log_{10} \left(\frac{\varepsilon/D}{3.7} + \frac{2.51}{Re_D \sqrt{f}} \right) \text{ för } \frac{D/\varepsilon}{Re_D \sqrt{f}} > 0.005$$

Formmotstånd, lyftkraft och väggfriktionskoefficient

$$F_D = C_D A_p \frac{\rho V^2}{2}$$

$$F_L = C_L A_p \frac{\rho V^2}{2}$$

$$\tau_w = C_f \frac{\rho V^2}{2}$$

Elementära planströmningar

Uniform strömning: $\psi = Uy = Ur \sin \theta$, samt $\phi = Ux = Ur \cos \theta$

Linjekälla/-sänka: $\psi = m\theta$, samt $\phi = m \ln r$

Linjevirvel: $\psi = -K \ln r$, samt $\phi = K\theta$

Dubblätt: $\psi = -\lambda \sin \theta / r$, samt $\phi = \lambda \cos \theta / r$

Tentamen Strömningsmekanik TME055 2017-04-10

- T1.**
- a) Föreläsning 1 / White kap. 1.4-5
 - b) Föreläsning 6 / White kap. 4.6
 - c) Föreläsning 3 / White kap. 3.5
 - d) Föreläsning 3 & 11 / White kap. 3.5 & Davidson kap. 1.1
- T2.**
- a) Föreläsning 8 / White kap. 5.3 & 5.4
 - b) Föreläsning 10 / White kap. 4.7
 - c) Föreläsning 11 / Davidson kap. 1.1
- T3.**
- a) Föreläsning 8 / White kap. 5.4
 - b) Föreläsning 8 & 12 / White kap. 5.4 & 7.3-4
 - c) Föreläsning 12 / White kap. 7.5

P1 | Vi söker ett moment - ställ upp balans för vinkelrörelsemängd!

$$\sum M_0 = \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_{CV} (r \times W) \rho dV \right] + \int_{CS} (r \times W) \rho (W \cdot n) dA = \underline{\underline{\tau_0}}$$

Låt kontrollvolymen innefatta spridaren med dess vatteninnehåll.
Inkommande vatten i 0 bär g ett moment. Antag stationärt.

$$\Rightarrow \tau_0 = (r \times W) \dot{m}_{ut}$$

$$\text{där } \dot{m}_{ut} = \rho Q = 0,25 \text{ kg/s}$$

$$\text{och } (r \times W) = |r| \cdot |W| \cdot \sin \theta = \left\{ \theta = 90^\circ \right\}_{\text{enl. figur}} = |r| \cdot |W|$$

$$|r| = 0,1524 \text{ m}$$

$$|W| = \frac{Q}{A} = \frac{3,95}{\cancel{0,0001}} \text{ m/s}$$

a) och således $\tau_0 \approx 0,15 \text{ Nm}$ som skulle krävas för att bromsa upp rörelsen

Om spridaren roterar friktionsfritt har dess ändar samma hastighet som utgående vatten, dvs

$$\omega = \frac{|W|}{R} \approx 26 \text{ s}^{-1} \approx \underline{\underline{250 \text{ var/min}}}$$

P2

Vi söker en effekt: $P = F \cdot V$

$$V = 3 \text{ knop} \approx 1,5 \text{ m/s}$$

Återstår att bestämma F .

Vi har väsentligen strömning normalt mot cylindrar.

$$\text{Utnyttja } F = C_D A_p \frac{\rho V^2}{2}$$

Enda okända är C_D som kan erhållas ur diagrammet $\rightarrow f(Re)$

$$Re = \frac{\rho V D}{\mu} \approx 1500 \Rightarrow C_D \approx 1$$

$$\text{Således } F \approx 0,024 \text{ N}$$

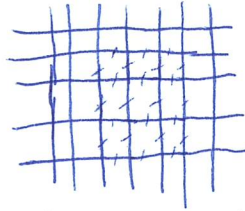
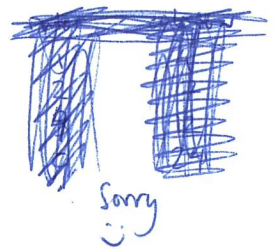
Hur många sådana cylindrar består nätet av?

Tänk 1 m^2 : varje meter innehåller 50 st 2-cm segment
 varje kvadratmeter innehåller 50 st meter långa trådar
 åt varje håll

$$\text{dvs } N = 2 \cdot 50 \cdot 50 = 5000 \text{ st/m}^2$$

För 30 m^2 har vi således 150,000 st 2-cm segment, och

$$\text{den totala kraften är } F_{\text{tot}} = N \cdot A \cdot F = 3,57 \text{ kN}$$

Sökt effekt är således $P \approx 5,5 \text{ kW}$ ($\approx 7,5$ hästkrafter)

P3

Vi söker en strömningsprofil $\rightarrow$ utgå från N-S
 Kuvatur för försummas $\rightarrow$ använd kartesiska koordinater

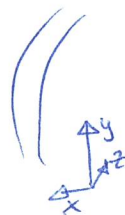
Vi är intresserade av en rörelsemängdsbalans i y-led:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + g_y + \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right]$$

Antag: stationärt
 ingen förändring i y eller z
 $u=0$ (se FM höger) $\rightarrow$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ och } u=0 \text{ på väggarna} \rightarrow u=0$$



$$\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$= \frac{\partial P}{\partial y}$$

där $P = p + \rho g_y$ (piezometrisk tryckhöjd)

$\rightarrow$ VL funktion av y
 HL funktion av x } $\rightarrow$ både VL och HL måste vara lika med en och samma konstant!

$$\Rightarrow \frac{d^2 v}{dx^2} = C_1$$

$$\text{randvillkor: } \begin{cases} v(R) = 0 \\ v(KR) = V_0 \end{cases} \quad (\text{no-slip})$$

Integrera:

$$\frac{dv}{dx} = C_1 x + C_2$$

$$v(x) = C_1 x^2 + C_2 x + C_3$$

$$\text{Randvillkoren ger: } 0 = C_1 R^2 + C_2 R + C_3$$

$$V_0 = C_1 (KR)^2 + C_2 (KR) + C_3$$

Vad är det tredje randvillkoret? Jo - massabalans! Nettomassflödet över ett tvärsnitt i x-planet måste vara noll:

$$\int_{KR}^R v dx = 0 \Rightarrow \left[\frac{C_1 x^3}{3} + \frac{C_2 x^2}{2} + C_3 x \right]_{KR}^R = 0$$

Sammanfoga och slaska ut algebran:

$$v(x) = V_0 \left[3 \left(\frac{x/R - K}{1 - K} \right)^2 - 4 \left(\frac{x/R - K}{1 - K} \right) + 1 \right]$$