CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Tillämpad mekanik
412 96 Göteborg

TME055 Strömningsmekanik 2017-01-13

Tentamen fredagen den 13 januari 2017 kl 14:00-18:00

Ansvarig lärare: Henrik Ström

Ansvarig lärare (eller någon som företräder honom) besöker salen under pågående examination för att svara på eventuella frågor. Under hela tentamen kan han nås på telefon 070 40 25 119.

Maximal poängsumma är 50. För godkänt krävs 20 poäng, för betyg 4 krävs 30 poäng och för betyg 5 krävs 40 poäng.

Tillåtna hjälpmedel: Valfri miniräknare med tömt minne samt matematisk handbok (t ex BETA och Physics Handbook).

Lösningar anslås på kurshemsidan i PingPong den 16 januari. Även information om möjligheter till tentamensgranskning annonseras på kurshemsidan.

OBS! Notera att uppgifterna inte är ordnade efter svårighetsgrad.

T1.

a) En liten kontrollvolym inuti en stor gasbehållare innehåller vid varje givet tillfälle ett visst antal gasmolekyler. En uppskattning av gasens densitet kan då erhållas som den sammanlagda massan av dessa gasmolekyler, Δm, dividerad med kontrollvolymens volym, ΔV. Skissa hur $\Delta m/\Delta V$ ser ut som funktion av ΔV. Rita in var gränsen mellan de två domäner som kan utrönas ur grafen går och ange deras namn. Hur ska densitet definieras för att man ska kunna bestämma densiteten i en punkt? (4 p)

b) För ett helt stilla hav kan vattenytan lokalt approximeras som ett perfekt plan. När det sedan blåser upp, kommer vattnet att accelereras av luften som strömmar över vattenytan. Är hastighetsgradienten (förändringen av hastigheten i vindriktningen i en koordinatriktning normal mot vattenytan) precis vid ytan i detta skede störst på luftsidan eller på vattensidan, eller är den lika stor på bägge sidor? Motivera ditt svar! (1 p)

c) En stor adiabatisk tank rymmer 100 m^3 gas som initialt håller temperaturen T_0. Om 1 m^3 av denna gas ges en temperatur $T_1 > T_0$ vid tiden $t = 0$, kommer energin då $t \to \infty$ ha spritt sig jämnt så att alla 100 m^3 till slut håller samma, något högre, temperatur än T_0. Om man istället tänker sig att man kunde ge 1 m^3 gas en viss medelhastighet (skild från noll) vid $t = 0$, medan omgivande 99 m^3 har en medelhastighet av 0 m/s, vad händer då med gasens temperatur då $t \to \infty$? Vad händer med dess medelhastighet? (2 p)

d) Ett friktionsfritt, inkompressibelt och laminärt flöde accelererar ($\partial v_z/\partial z > 0$) genom en axisymmetrisk förträngning. Vad händer med de två andra hastighets-komponenterna (v_r och v_θ), givet att de båda var noll i hela tvärsnittet uppströms förträngningen? Vad händer med trycket? Motivera ditt svar! (Ledning: Kontinuitetsekvationen i cylindriska koordinater (se formelsamlingen) kan vara till viss hjälp.) (3 p)

T2.

a) En modell av en fallskärm har en diameter på 1.7 m. Modellen testas i en vindtunnel där den omströmmas av luft vid 20°C och atmosfärstryck ($\rho = 1.2$ kg/m^3, $\mu = 1.8 \cdot 10^{-5}$ Pa,s). Den uppmätta formmotståndskraften på modellfallskärmen är då 4226 N vid en lufthastighet på 52.9 m/s. Vilken lufthastighet och kraft motsvarar detta för en fullstor fallskärm vid dynamiskt lik strömning (i luft av samma temperatur och tryck)? Den fullstora fallskärmen är tio gånger så stor som modellen. (3 p)

b) Rita ett turbulent energispektrum för fullt utvecklad turbulent strömning vid högt Reynoldstal. Visa hur detta spektrum kan delas in i tre regioner och ange vilka egenskaper som utmärker de turbulenta virvlarna i respektive region. Vad kallas de minsta skalorna och vilka variabler behövs för att bestämma dem? (4 p)

c) Beskriv och förklara skillnaden mellan en fullt utvecklad laminär hastighetsprofil mellan två plana plattor och en fullt utvecklad turbulent hastighetsprofil i samma geometri. Varför är de olika? (3 p)

T3.

a) Skriv om Navier-Stokes ekvationer på dimensionslös form. Vad är den fysikaliska tolkningen av den dimensionslösa grupp som dyker upp och vad kallas den? Visa hur ekvationen kan förenklas om denna dimensionslösa grupp är mycket liten respektive mycket stor. (5 p)

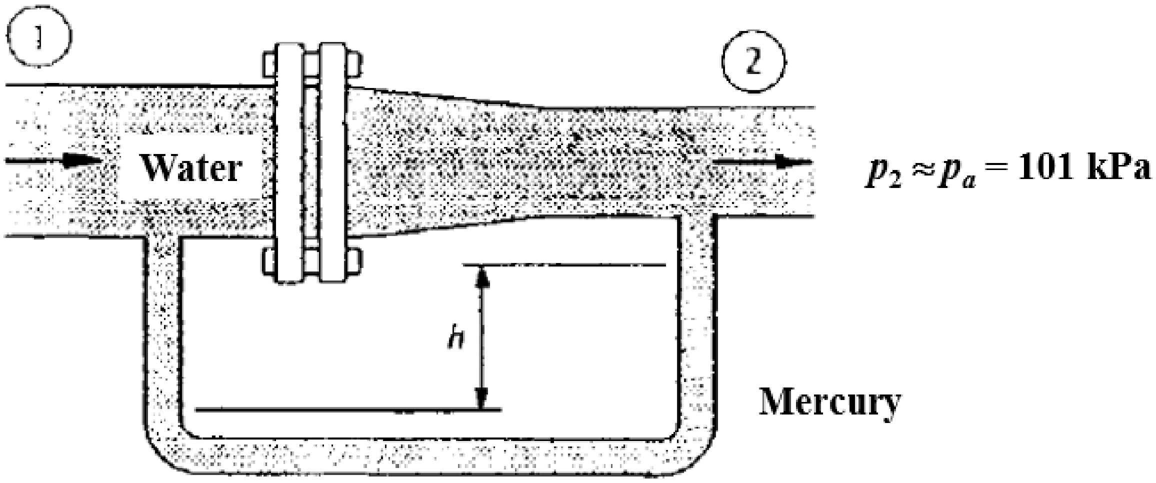
b) Boussinesq föreslog redan 1887 den analogi mellan turbulenta spänningar och molekylära spänningar som ligger till grund för merparten av nutida industriella simuleringar av turbulent strömning. Hans idé bygger på att effekten av turbulensen på medelhastighetsfältet kan beskrivas med en turbulent viskositet, liknande den molekylära viskositeten. Ange ett bra argument för och ett bra argument mot denna liknelse mellan turbulent och viskös transport av rörelsemängd! (2 p)

c) Varför är risken för separation störst på baksidan av en omströmmad kropp? (2 p)

P1.

En kontrakterande rörsektion är fäst vid ett uppströms rör genom en skarvfläns med ett antal bultar. Det strömmande mediet är vatten, och en kvicksilvermanometer är ihopkopplad med systemet enligt nedanstående figur. Vad visar manometern för utslag (h) då V_1 = 5 m/s och den horisontella kraften som bultarna står emot är 163 N? Friktionseffekter får försummas, och systemet håller en konstant temperatur av 20°C.

(7 p)

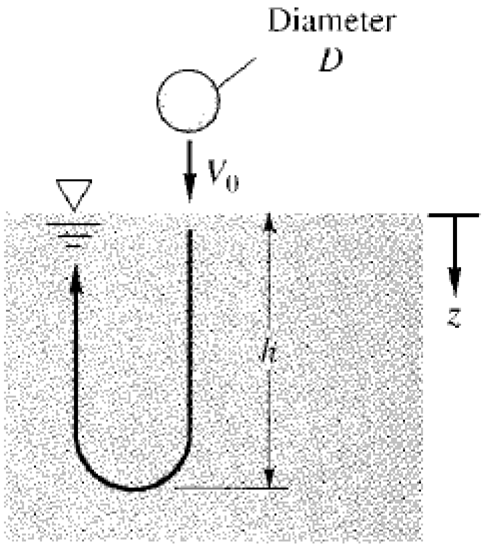


D_1 = 8 cm
D_2 = 5 cm
ρ_{H2O} = 998 kg/m^3
ρ_{Hg} = 13,579 kg/m^3

P2.

En boll som flyter i vattenytan (dvs vars densitet är lägre än vattens) kommer, då den släpps från hög höjd, först att penetrera ett visst avstånd *h* ned i vattnet, innan den återvänder till ytan (se figur). Uppskatta hur lång tid det tar innan en boll med diametern 5 cm och densiteten 500 kg/m^3 vänder uppåt, om den inkommande hastigheten V_0 då bollen tränger ned i vattnet är 10 m/s! Antag att formmotståndskoefficienten (C_D) är konstant och kan approximeras till 0.47.

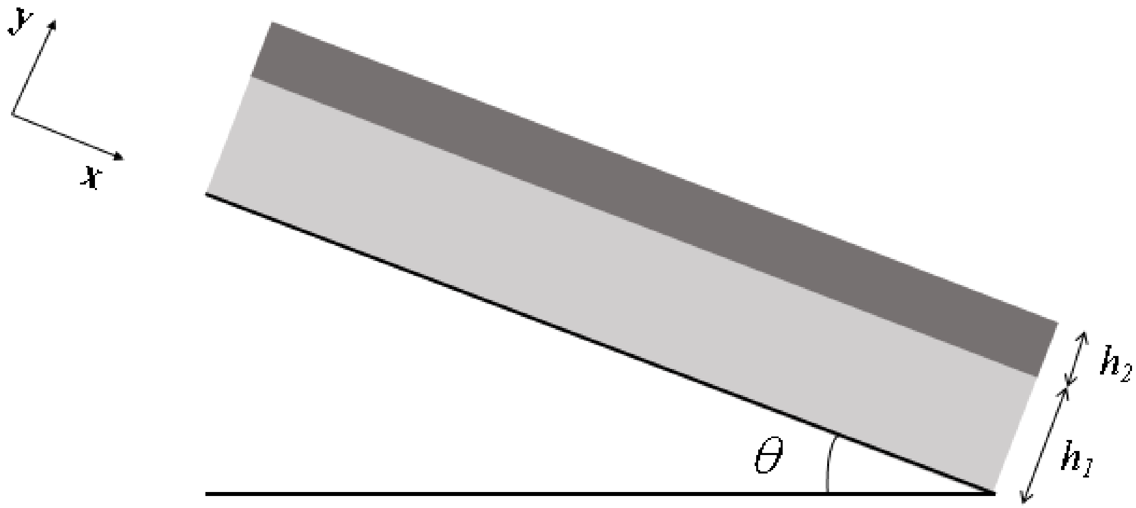
(7 p)



Vattendata: ρ = 1000 kg/m^3 μ = 10^{-3} Pa,s

P3.

Två inkompressibla Newtonska fluider strömmar laminärt ovanpå varandra nedför ett sluttande plan (se figur). De har samma densitet men olika viskositet. Djupet för den nedre fluiden är h_1 och djupet för den övre är h_2, enligt figuren. Härled ett uttryck för hastighetsprofilen $u_1(y)$ i den nedre fluiden! Antag att viskösa krafter från omgivande luft är försumbara. Antag även att trycket vid den fria vätskeytan är konstant och lika med p_{atm}, men försumma inte den hydrostatiska tryckvariationen i y-led. (7 p)



Formelsamling

Mekaniklagar

$$\frac{dm_{syst}}{dt} = 0$$

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{V})$$

$$\boldsymbol{M} = \frac{d\boldsymbol{H}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum(\boldsymbol{r} \times \mathbf{V})\delta m\right)$$

$$\frac{dQ}{dt} - \frac{dW}{dt} = \frac{dE}{dt}$$

Reynolds transportteorem

$$\frac{dB_{syst}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\int_{CV} \beta\rho d\mathcal{V}\right) + \int_{CS} \beta\rho(\mathbf{V}\cdot\mathbf{n})\, dA$$

Differentiella samband på vektorform

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\, \nabla \cdot \mathbf{V} = 0$$

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho\mathbf{g}$$

$$\rho \frac{D\hat{u}}{Dt} + p(\nabla \cdot \mathbf{V}) = \nabla \cdot [k\nabla T] + \Phi$$

Kontinuitetsekvationen och Navier-Stokes ekvationer i cylindriska koordinater

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(v_z) = 0$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial}{\partial r}(v_r) + \frac{1}{r}v_\theta\frac{\partial}{\partial \theta}(v_r) + v_z\frac{\partial}{\partial z}(v_r) - \frac{1}{r}{v_\theta}^2 =$$
$$= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + g_r + \frac{\mu}{\rho}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_r}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}\right]$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r\frac{\partial}{\partial r}(v_\theta) + \frac{1}{r}v_\theta\frac{\partial}{\partial \theta}(v_\theta) + v_z\frac{\partial}{\partial z}(v_\theta) + \frac{1}{r}v_r v_\theta = -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + g_\theta +$$
$$\frac{\mu}{\rho}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right]$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r\frac{\partial}{\partial r}(v_z) + \frac{1}{r}v_\theta\frac{\partial}{\partial \theta}(v_z) + v_z\frac{\partial}{\partial z}(v_z)$$
$$= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + g_z + \frac{\mu}{\rho}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right]$$

Buckinghams π-teorem

$$i = n - r$$

Friction head enligt Weisbach

$$h_f = f\frac{L}{D}\frac{\mathrm{V}^2}{2g}$$

Engångsförluster

$$h_m = K\frac{\mathrm{V}^2}{2g}$$

Darcys friktionsfaktor

Laminär strömning

$$f = \frac{64}{Re_D}$$

Turbulent strömning

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2.0\log_{10}\left(Re_D\sqrt{f}\right) - 0.8 \text{ för } \varepsilon/D = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2.0\log_{10}\left(\frac{\varepsilon/D}{3.7}\right) \text{ för } \varepsilon/D \neq 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2.0\log_{10}\left(\frac{\varepsilon/D}{3.7} + \frac{2.51}{Re_D\sqrt{f}}\right) \text{ för } \frac{D/\varepsilon}{Re_D\sqrt{f}} > 0.005$$

Formmotstånd, lyftkraft och väggfriktionskoefficient

$$F_D = C_D A_p \frac{\rho \mathrm{V}^2}{2}$$

$$F_L = C_L A_p \frac{\rho \mathrm{V}^2}{2}$$

$$\tau_w = C_f \frac{\rho \mathrm{V}^2}{2}$$

Elementära planströmningar

Uniform strömning: $\psi = Uy = Ur\sin\theta$, samt $\phi = Ux = Ur\cos\theta$

Linjekälla/-sänka: $\psi = m\theta$, samt $\phi = m\ln r$

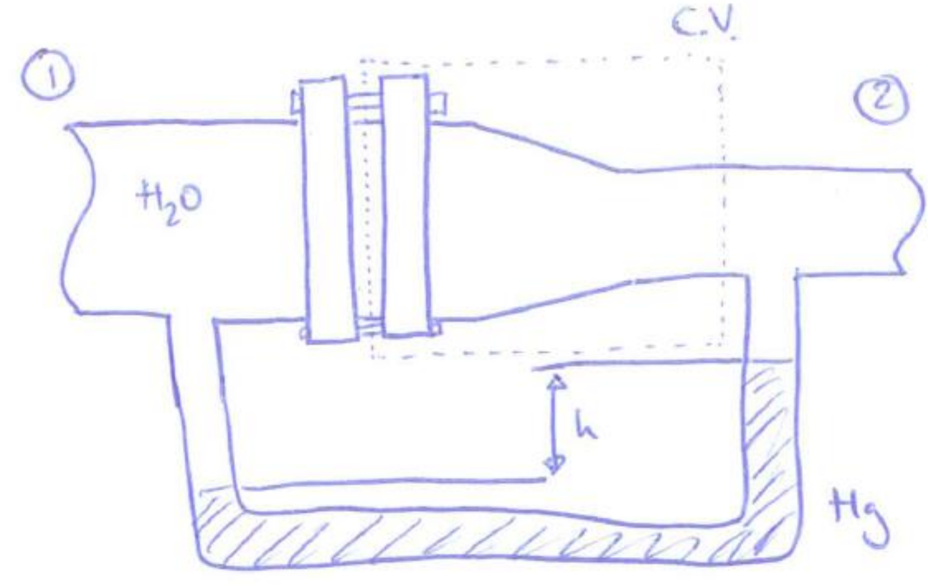
Linjevirvel: $\psi = -K\ln r$, samt $\phi = K\theta$

Dubblett: $\psi = -\lambda\sin\theta/r$, samt $\phi = \lambda\cos\theta/r$

Tentamen Strömningsmekanik TME055 2017-01-13

T1.	a)	Föreläsning 1 / White kap. 1.4-5
	b)	Föreläsning 6 / White kap. 4.6
	c)	Föreläsning 6 / White kap. 3.5 & 4.5
	d)	Föreläsning 3 & 5 / White kap. 3.5 & 4.2
T2.	a)	Föreläsning 8 / White kap. 5.3 & 5.4
	b)	Föreläsning 11 / Davidson kap. 1.1
	c)	Föreläsning 9 / White kap. 6.4 & 6.6
T3.	a)	Föreläsning 8 / White kap. 5.4
	b)	Föreläsning 11 / White kap. 6.5, Davidson kap. 1.1
	c)	Föreläsning 12 / White kap. 7.5

P1



Vi söker en ingenjörsmässig uppskattning av ett komplext problem – kontrollvolymsanalys!

Låt CV skära genom bultarna för att kunna utnyttja information om kraften i dessa!

Rörelsemängdsbalans i huvudströmriktningen:

$$\sum F = \frac{d}{dt}\left(\int_{CV} W \rho \, dV\right) + \int_{CS} W \rho (W \cdot n)\, dA$$

Antag stationärt!
Inlopp med data som vid 1
Utlopp med data som vid 2

$$\rightarrow \quad \sum F = -V_1^2 \rho A_1 + V_2^2 \rho A_2$$

där $\sum F = p_1 A_1 - p_2 A_1 + \left\{ \begin{array}{c} \text{tryckbidrag utanför } A_1 \\ \text{kancellerar varandra!} \end{array} \right\} - F_{bultar}$

↑verkar i negativ riktning!

V_2 okänd men erhålles ur kontinuitetsvillkoret:

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{CV} \rho \, dV\right) + \int_{CS} \rho (W \cdot n)\, dA = 0 \quad \longrightarrow \quad \rho V_1 A_1 = \rho V_2 A_2 \quad \Leftrightarrow \quad V_2 = V_1 \frac{A_1}{A_2}$$

Vi kan nu lösa ut p_1:

$$p_1 = \frac{1}{A_1}\left(F_{butter} + p_2 A_1 - v_1^2 \rho A_1 + v_2^2 \rho A_2\right) = 172,3 \text{ kPa}$$

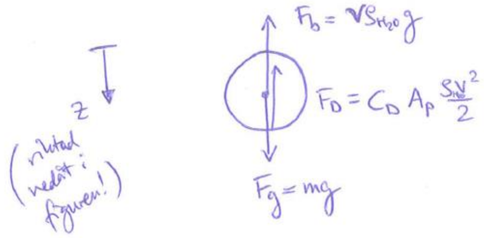
Manometern visar tryckskillnaden $p_1 - p_2 = 71,3 \text{ kPa}$

$$p_1 - p_2 = \rho_{Hg} g h \iff h = \frac{p_1 - p_2}{\rho_{Hg} g} = 0,54 \text{ m}$$

Svar: $\underline{54 \text{ cm}}$

P2 Ett föremål av fix identitet/massa som accelerear pga en nettokraft
$\Rightarrow$ använd Newtons andra lag direkt (Lagrangeskt betraktelsesätt)!

$$\sum F_z = m\frac{dv}{dt}$$



Tre huvudsakliga krafter att ta hänsyn till:

* gravitationskraft
* lyftkraft
* formmotstånd (drag)

Sätt ihop: $$\frac{\pi D^3}{6}\rho_{boll}\frac{dv}{dt} = \frac{\pi D^3}{6}\rho_{boll}\, g - \frac{\pi D^3}{6}\rho_{H_2O}\, g - C_D\frac{\pi D^2}{4}\frac{\rho v^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad D\rho_{boll}\frac{dv}{dt} = Dg(\rho_{boll}-\rho_{H_2O}) - \frac{3}{4}C_D\rho_{H_2O}v^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{dv}{dt} = \frac{\rho_{boll}-\rho_{H_2O}}{\rho_{boll}}g - \frac{3}{4}\frac{C_D}{D}\frac{\rho_{H_2O}}{\rho_{boll}}v^2$$

Separera och integrera! Vid $t=0$ är $v = 10$ m/s och vid $t|_{v=0}$ är ju $v = 0$ m/s:

$$\int_{10}^{0}\frac{dv}{A + Bv^2} = -\int_{0}^{t|_{v=0}} dt \qquad \text{där} \begin{cases} A = -\frac{\rho_{boll}-\rho_{H_2O}}{\rho_{boll}}g = 9{,}81 \\ B = \frac{3}{4}\frac{C_D}{D}\frac{\rho_{H_2O}}{\rho_{boll}} = 14{,}1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad t|_{v=0} = 0{,}126 \text{ s}$$

BETA ger att $$\int\frac{dx}{a^2x^2+c^2} = \frac{1}{ac}\tan^{-1}\left(\frac{ax}{c}\right) \quad \text{där} \begin{cases} a^2 = B \\ c^2 = A \end{cases}$$

P3 | Strömningsprofil för laminär, inkompressibel strömning hos Newtonska fluider
→ använd N-S och förenkla!

Antag: stationärt
laminärt
oändligt stora plattor
fullständigt utvecklad strömning

N-S i kartesiska koordinater (2D):

$$\cancelto{=0}{\frac{\partial u}{\partial x}} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$ (och då $v=0$ vid planet måste $v=0$ gälla överallt!)

$$\rho\left(\cancelto{=0}{\frac{\partial u}{\partial t}} + u\cancelto{=0}{\frac{\partial u}{\partial x}} + v\cancelto{=0}{\frac{\partial u}{\partial y}} + w\cancelto{=0}{\frac{\partial u}{\partial z}}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left[\cancelto{=0}{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \cancelto{=0}{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}\right] + \rho g_x$$

$$\rho\left(\cancelto{=0}{\frac{\partial v}{\partial t}} + u\cancelto{=0}{\frac{\partial v}{\partial x}} + v\cancelto{=0}{\frac{\partial v}{\partial y}} + w\cancelto{=0}{\frac{\partial v}{\partial z}}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left[\cancelto{=0}{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}} + \cancelto{=0}{\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}} + \cancelto{=0}{\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}}\right] + \rho g_y$$

dvs
$$\begin{cases} -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \rho g \sin\theta = 0 & (1) \\ -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g\cos\theta = 0 & (2) \end{cases}$$

Låt oss först ta fram $p(x,y)$ → Fluid 1: (2) → $p_1(y) = -\rho g\cos\theta\, y + f_1(x)$

Fluid 2: p.s.s. $p_2(y) = -\rho g\cos\theta\, y + f_2(x)$

Trycket vid $y = h_1 + h_2$ är p_{atm}:

$$p_{atm} = -\rho g\cos\theta(h_1+h_2) + f_2(x) \Rightarrow f_2(x) = p_{atm} + \rho g\cos\theta(h_1+h_2) \Rightarrow \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0$$

Trycket vid $y = h_1$ är kontinuerligt:

$$p_{atm} + \rho g\cos\theta\, h_2 = -\rho g\cos\theta\, h_1 + f_1(x) \Rightarrow f_1(x) = p_{atm} + \rho g\cos\theta(h_1+h_2) \Rightarrow \frac{\partial f_1}{\partial x} = 0$$

Med andra ord:

$$p = p(y) = -\rho g\cos\theta\, y + p_{atm} + \rho g\cos\theta(h_1+h_2) \quad \text{och} \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

Således: $$\boxed{\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \rho g\sin\theta = 0}$$

med randvillkoren: i) no-slip på plattan: $u|_{y=0} = 0$

2) friktionsfritt vid vätskeytan: $\mu_2 \frac{\partial u_2}{\partial y}\Big|_{y=h_1+h_2} = 0$ (slarvigt! :))

3) kontinuerlig skjuvspänning vid gränsytan: $\mu_1 \frac{\partial u_1}{\partial y}\Big|_{y=h_1} = \mu_2 \frac{\partial u_2}{\partial y}\Big|_{y=h_1}$

4) kontinuerligt hastighetsfält vid gränsytan: $u_1|_{y=h_1} = u_2|_{y=h_2}$

Integrera upp hastigheterna:

$$\frac{d^2u}{dy^2} = -\frac{\rho g \sin\theta}{\mu} \iff \frac{du}{dy} = -\frac{\rho g}{\mu}\sin\theta\, y + C \iff u(y) = -\frac{\rho g}{2\mu}\sin\theta\, y^2 + Cy + D$$

För de två hastighetsprofilerna har vi således:

$$u_1(y) = -\frac{\rho g}{2\mu_1}\sin\theta\, y^2 + C_1 y + D_1$$

$$u_2(y) = -\frac{\rho g}{2\mu_2}\sin\theta\, y^2 + C_2 y + D_2$$

$RV1 \Rightarrow D_1 = 0$

$RV2 \Rightarrow C_2 = \frac{\rho g}{\mu_2}(h_1+h_2)\sin\theta$

$RV3 \Rightarrow C_1 = \frac{\mu_2}{\mu_1}C_2 = \frac{\rho g}{\mu_1}(h_1+h_2)\sin\theta$

$RV4 \Rightarrow D_2 = \ldots$ (behövs ej för att lösa uppgiften!)

Sätt ihop:

$$\underline{\underline{u_1(y)}} = -\frac{\rho g}{2\mu_1}\sin\theta\, y^2 + \frac{\rho g}{\mu_1}(h_1+h_2)\sin\theta\, y =$$

$$\underline{\underline{= \frac{\rho g}{\mu_1}\sin\theta\left([h_1+h_2]y - \frac{1}{2}y^2\right)}}$$