



CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Tillämpad mekanik
412 96 Göteborg

TME055 Strömningsmekanik

2016-08-26

Tentamen fredagen den 26 augusti 2016 kl 14:00-18:00

Ansvarig lärare: Henrik Ström

Ansvarig lärare (eller någon som företräder honom) besöker salen under pågående examination för att svara på eventuella frågor. Under hela tentamen kan han nås på telefon 070 40 25 119.

Maximal poängsumma är 50. För godkänt krävs 20 poäng, för betyg 4 krävs 30 poäng och för betyg 5 krävs 40 poäng.

Tillåtna hjälpmedel: Valfri miniräknare med tömt minne samt matematisk handbok (t ex BETA och Physics Handbook).

Lösningar anslås på kurshemsidan i PingPong den 29 augusti. Även information om möjligheter till tentamensgranskning annonseras på kurshemsidan.

OBS! Notera att uppgifterna inte är ordnade efter svårighetsgrad.

T1.

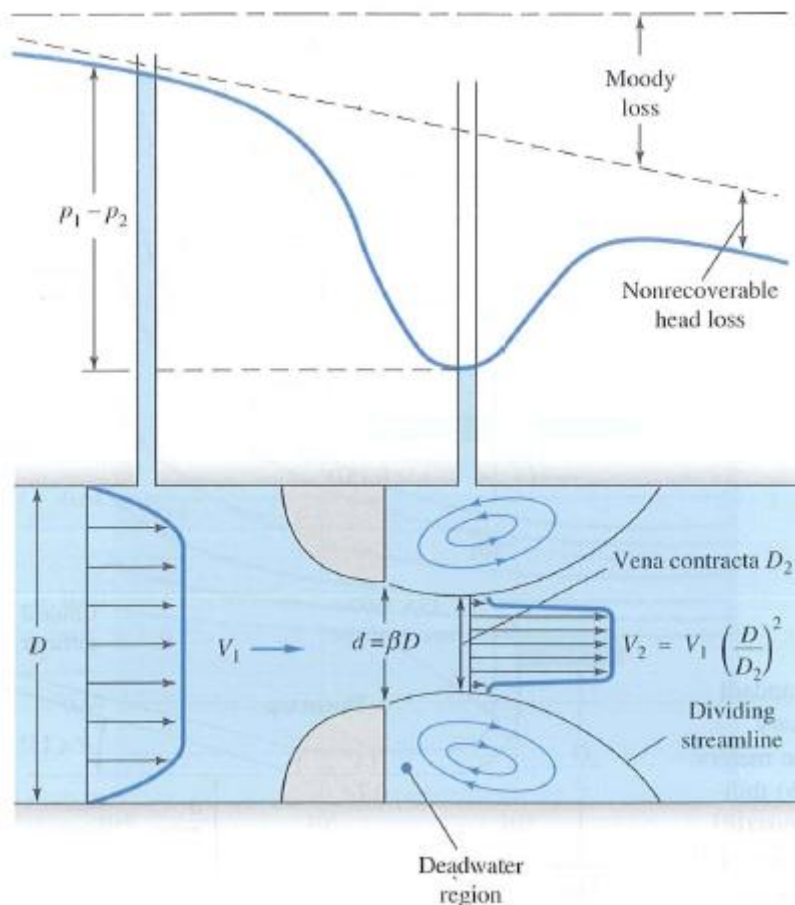
- a) Betrakta ett fall av stationär, inkompressibel strömning där hastighetsfältet ges av följande hastighetsvektor:

$$\mathbf{v} = (x + y)\mathbf{i} + (y + z)\mathbf{j} + 2(x - z)\mathbf{k}$$

- Visa att hastighetsfältet uppfyller kontinuitetsekvationen!
- Under antagande om en konstant viskositet (μ), visa hur den viskösa spänningstensorn $\boldsymbol{\tau}$ ser ut!
- Under antagande om en konstant densitet (ρ) och frånvaro av volymskrafter, härled ett uttryck för tryckgradienten! (5 p)

- b) Figurskissen nedan illustrerar hur det statiska trycket varierar vid strömning genom en förträngning.

- Förklara varför trycket först minskar för att sedan öka igen!
- Man kan se att den totala tryckminskningen kan delas upp i två olika bidrag – ”Moody loss” och ”Nonrecoverable head loss”. Vad orsakar dessa två olika förluster?
- Alldeles bakom förträngningen har det bildats recirkulationsregioner (”Deadwater region”). Förklara hur detta fenomen uppstår! (5 p)



T2.

- a) Kraften F på ett föremål i en strömmande fluid kan tänkas bero på hastigheten V , storleken L samt fluidens egenskaper ρ och μ . Hur många dimensionslösa grupper behövs för att beskriva denna situation? Ge förslag på vilka hur de skulle kunna se ut! (3 p)
- b) Hur förenklas Navier-Stokes ekvationer i gränsen av mycket högt Reynoldstal? Vad får det för konsekvenser för randvillkoren? (2 p)
- c) Rita ett turbulent energispektrum för fullt utvecklad turbulent strömning vid högt Reynoldstal. Visa hur detta spektrum kan delas in i tre regioner och ange vilka egenskaper som utmärker de turbulenta virvlarna i respektive region. Vad kallas de minsta skalorna och vilka variabler behövs för att bestämma dem? (4 p)
- d) I härledningen av Bernoullis ekvation görs ett antagande om stationär strömning. Trots att turbulent strömning till sin karaktär alltid är tidsberoende går det bra att tillämpa Bernoullis ekvation oberoende av strömningsregim (turbulent eller laminärt). Hur kommer detta sig? (1 p)

T3.

- a) Prandtls tal är ett dimensionslöst tal som definieras på följande sätt:

$$Pr = \frac{\mu c_p}{k} = \frac{\nu}{\alpha}$$

En tolkning av Prandtls tal är att det anger hur tjockt gränsskiktet för rörelsemängds-transport är i jämförelse med det termiska gränsskiktet. För motoroljor gäller normalt att $Pr \gg 1$. Illustrera, genom att rita relevanta hastighets- och temperaturprofiler, hur de två gränsskiktstjocklekarna förhåller sig då kall motorolja strömmar över en varm yta! (3 p)

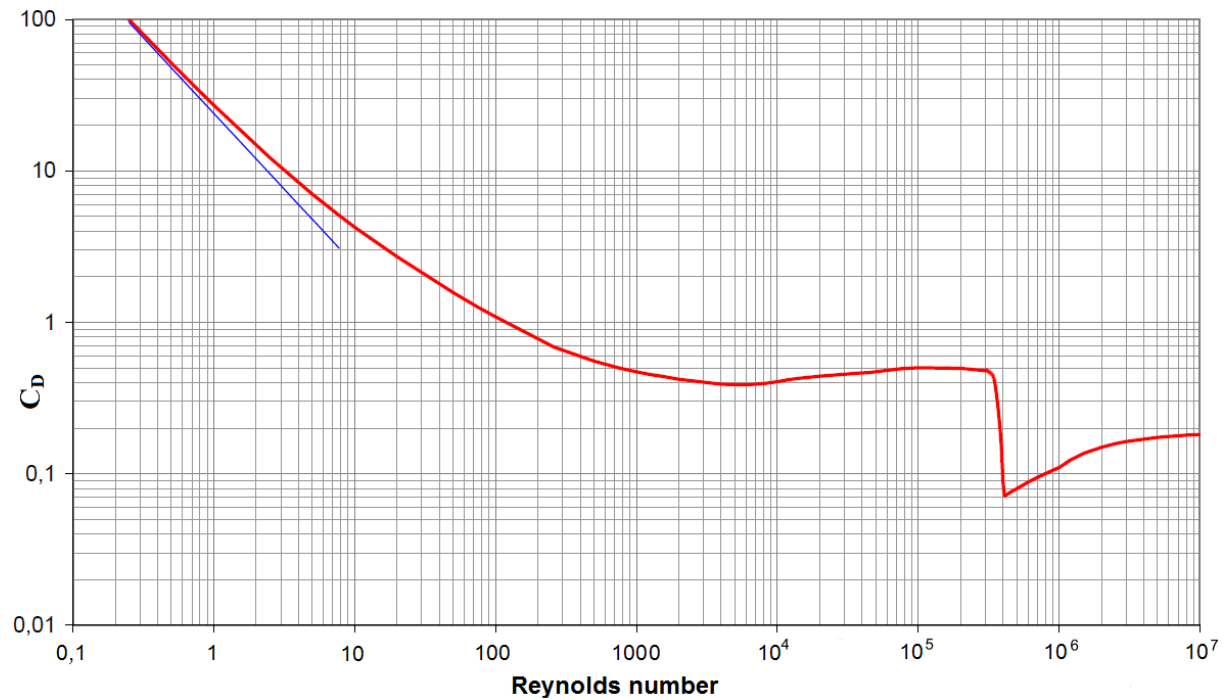
- b) Nedanstående uttryck är känt som *den logaritmiska vägglagen*:

$$\frac{\bar{u}}{u^*} = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + A$$

Utgå från en rörelsemängdsbalans i x -led (huvudströmriktningen) från Navier-Stokes ekvationer (uttryckt för ett kartesiskt koordinatsystem) och härled detta uttryck! Vilka antaganden behöver du göra angående skjuvspänningen i regionen närmast väggen? (6 p)

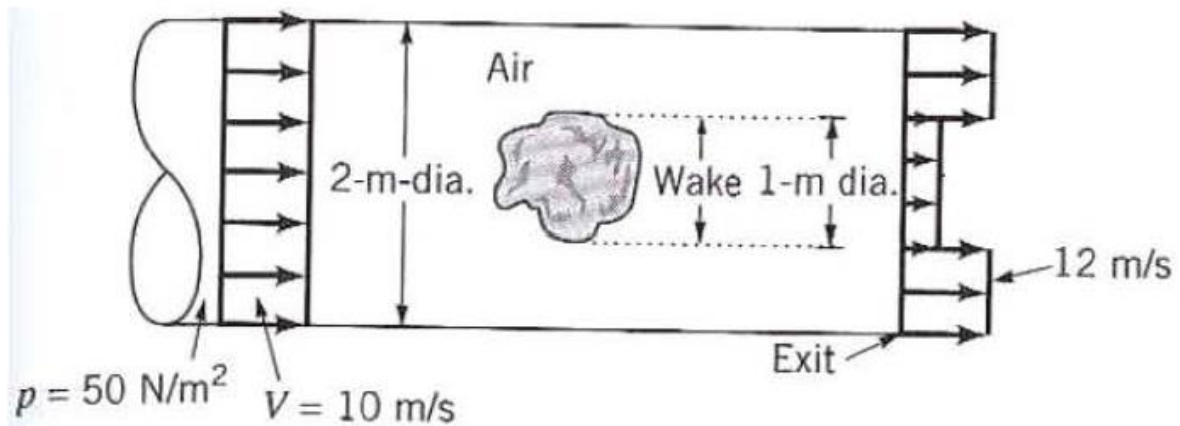
P1.

En sfärisk kropp släpps från hög höjd och accelererar först, för att sedan anta en konstant hastighet (den så kallade terminalhastigheten). Uppskatta terminalhastigheten då sfärens diameter är 1 cm och dess densitet 1000 kg/m^3 , när den faller i luft med densiteten 1 kg/m^3 och viskositeten $10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}$! (7 p)



P2.

Luft strömmar förbi ett föremål i ett cylindriskt rör vars innerdiameter är 2 m, och lämnar röret rakt ut i omgivande atmosfär. Hastigheten uppströms föremålet är 10 m/s och övertrycket i denna position är 50 N/m². På grund av föremålets närvaro i röret blir strömningsbilden ojämn vid utloppet, då det utvecklas en så kallad vak ("wake") bakom föremålet (se bild). Uppskatta den kraft som den strömmande luften utverkar på föremålet! Inverkan av skjuvspänningar längs rörväggarna får försummas. (7 p)

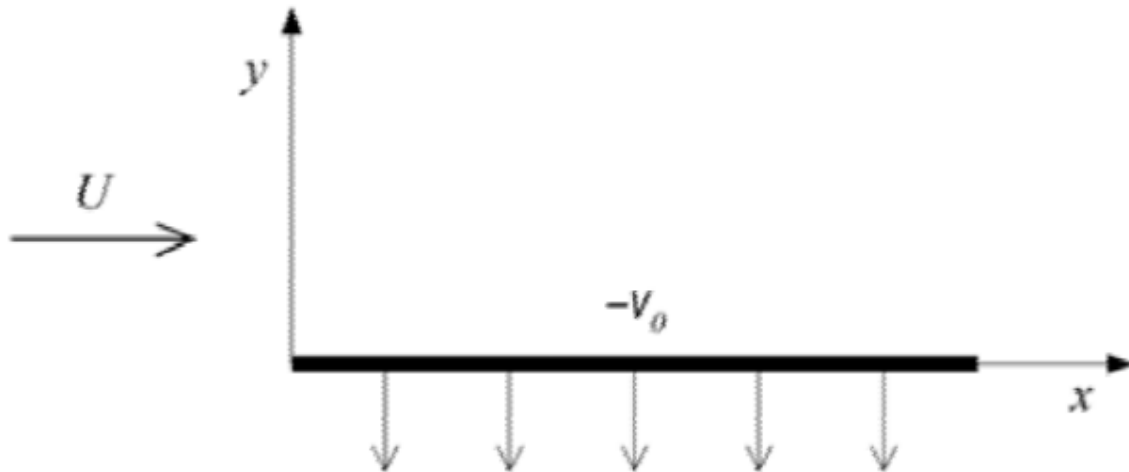


Luftdata: $\rho = 1 \text{ kg/m}^3$ $\mu = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}$

P3.

En Newtonsk fluid med konstant densitet och viskositet strömmar stationärt med hastigheten $u = U$ (vid $y = \infty$) över en oändlig platta (placerad vid $y = 0$), se figur nedan. Strömningen kan antas vara tvådimensionell, inkompressibel, laminär och utan signifikanta gravitationseffekter. Den oändliga plattan är porös och suger med konstant hastighet $v = -v_0$. Under antagandet att trycket är konstant samt att $v = -v_0$ gäller för hela strömningsfältet, härled ett uttryck för hastighetsprofilen $u(y)$!

(7 p)



Formelsamling

Mekaniklagar

$$\frac{dm_{syst}}{dt} = 0$$

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{V})$$

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{H}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum (\mathbf{r} \times \mathbf{V}) \delta m \right)$$

$$\frac{dQ}{dt} - \frac{dW}{dt} = \frac{dE}{dt}$$

Reynolds transportteorem

$$\frac{dB_{syst}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\int_{CV} \beta \rho dV \right) + \int_{CS} \beta \rho (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dA$$

Differentiella samband på vektorform

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} = 0$$

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{g}$$

$$\rho \frac{D\hat{u}}{Dt} + p(\nabla \cdot \mathbf{V}) = \nabla \cdot [k\nabla T] + \Phi$$

Kontinuitetsekvationen och Navier-Stokes ekvationer i cylindriska koordinater

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (v_z) = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r} (v_r) + \frac{1}{r} v_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} (v_r) + v_z \frac{\partial}{\partial z} (v_r) - \frac{1}{r} v_\theta^2 = \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + g_r + \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r} (v_\theta) + \frac{1}{r} v_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta) + v_z \frac{\partial}{\partial z} (v_\theta) + \frac{1}{r} v_r v_\theta = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + g_\theta + \\ + \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r} (v_z) + \frac{1}{r} v_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} (v_z) + v_z \frac{\partial}{\partial z} (v_z) \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g_z + \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] \end{aligned}$$

Buckingham's π -theorem

$$i = n - r$$

Friction head enligt Weisbach

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g}$$

Engångsförluster

$$h_m = K \frac{V^2}{2g}$$

Darcys friktionsfaktor

Laminär strömning

$$f = \frac{64}{Re_D}$$

Turbulent strömning

$$\frac{1}{\sqrt{f/4}} = 4.0 \log_{10} \{Re_D \sqrt{f/4}\} - 0.4 \text{ för } \varepsilon/D = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{f/4}} = 4.0 \log_{10} \frac{D}{\varepsilon} - 0.4 \text{ för } \varepsilon/D \neq 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{f/4}} = 4 \log_{10} \frac{D}{\varepsilon} + 2.28 - 4 \log_{10} \left\{ 4.67 \frac{D/\varepsilon}{Re_D \sqrt{f/4}} + 1 \right\} \text{ för } \frac{D/\varepsilon}{Re_D \sqrt{f/4}} > 0.01$$

Formmotstånd, lyftkraft och väggfriktionskoefficient

$$F_D = C_D A_p \frac{\rho V^2}{2}$$

$$F_L = C_L A_p \frac{\rho V^2}{2}$$

$$\tau_w = C_f \frac{\rho V^2}{2}$$

Elementära planströmningar

Uniform strömning: $\psi = Uy = Ur \sin \theta$, samt $\phi = Ux = Ur \cos \theta$

Linjekälla/-sänka: $\psi = m\theta$, samt $\phi = m \ln r$

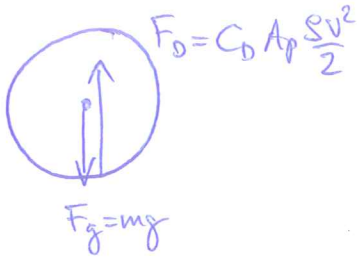
Linjevirl: $\psi = -K \ln r$, samt $\phi = K\theta$

Dubblätt: $\psi = -\lambda \sin \theta / r$, samt $\phi = \lambda \cos \theta / r$

Tentamen Strömningsmekanik TME055 2016-08-26

- T1.**
- a) Föreläsning 5 / White kap. 4.2-3
 - b) Föreläsning 4, 9 och 12 / White kap. 3.5, 6.3 och 7.5
- T2.**
- a) Föreläsning 8 / White kap. 5.4
 - b) Föreläsning 8 / White kap. 5.4
 - c) Föreläsning 11 / White kap. 6.5, Davidson kap. 1.1
 - d) Föreläsning 4 / White kap. 3.5
- T3.**
- a) Föreläsning 8 och 12 / White kap. 7.1
 - b) Föreläsning 11 / White kap. 6.5

P1



"Uppsinken" = ngenjörsmässigt

$S_{\text{för}} \gg S_{\text{luft}} \rightarrow$ försumma lyftkraft från omgivande (undantaget) luft

Terminalhastighet $\rightarrow a=0 \Leftrightarrow \Sigma F=0 \Leftrightarrow F_g = F_D$

$$\frac{\pi D^3}{6} \rho_{\text{för}} g = C_D \frac{\pi D^2}{4} \frac{\rho_{\text{luft}} V^2}{2} \Leftrightarrow V = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{D \rho_{\text{för}} g}{C_D \rho_{\text{luft}}}}$$

Återstår att veta $C_D = f(Re)$ dvs funktion av V och given i graf $\rightarrow$ iterera!

Gissa $V = 1 \text{ m/s} \rightarrow Re = \frac{\rho_{\text{luft}} D V}{\mu_{\text{luft}}} = 1000 \rightarrow C_D \approx 0,5 \rightarrow V = 16,2 \text{ m/s}$

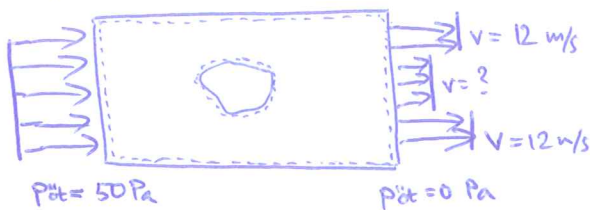
$V = 16 \text{ m/s} \rightarrow Re = 16000 \rightarrow C_D \approx 0,45 \rightarrow V = 17 \text{ m/s}$

$V = 17 \text{ m/s} \rightarrow Re = 17000 \rightarrow C_D \approx 0,45 \rightarrow V = 17 \text{ m/s}$ ok!

Svar: 17 m/s

P2

$$V_{in} = 10 \text{ m/s}$$



RMB i huvudsakströmningarna: $\sum \vec{F} = \frac{d}{dt} \left(\int_{CV} \rho \vec{v} dV \right) + \int_{CS} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA$

Antag stationärt. Sljivspänningar längs rörväggar försummas. Sökt kraft är F_D .

$$p_{t,in} A_{in} - \cancel{p_{t,out} A_{out}} - F_D = -S A_{in} V_{in}^2 + S A_{wake} V_{wake}^2 + S A_{out-wake} V_{out-wake}^2$$

$$F_D = p_{t,in} A_{in} + S A_{in} V_{in}^2 - S A_{wake} V_{wake}^2 - S A_{out-wake} V_{out-wake}^2$$

Allt är känt utom v_{wake} — erhålles ur KE:

$$\int_{CS} \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA = 0 \Rightarrow -S V_{in} A_{in} + S V_{wake} A_{wake} + S V_{out-wake} A_{out-wake} = 0$$

$$\Rightarrow V_{wake} = \frac{S V_{in} A_{in} - S V_{out-wake} A_{out-wake}}{S A_{wake}} = \frac{V_{in} A_{in} - V_{out-wake} A_{out-wake}}{A_{wake}} = 4 \text{ m/s}$$

Insättning ger:

$$\underline{\underline{F_D = 119 \text{ N}}}$$

P3 2D men $v = -v_0$ (konstant) överallt. Utgå från N-S i x -riktningen!

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \rho g_x$$

Stationärt $\rightarrow \frac{\partial}{\partial t} = 0$

2D $\rightarrow w = 0, \frac{\partial}{\partial z} = 0$

Försumbar gravitation $\rightarrow g = 0$

Konstant tryck $\rightarrow \nabla p = 0$

v känd $\rightarrow v = -v_0, \nabla v = 0$

$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ (fullt utvecklade strömning)

$$-\rho v_0 \frac{\partial u}{\partial y} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Leftrightarrow \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \rho v_0 \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

ODE med lösning av typ $u = e^{\lambda y} \rightarrow \frac{du}{dy} = \lambda e^{\lambda y}, \frac{d^2 u}{dy^2} = \lambda^2 e^{\lambda y}$

Identifiera genom insättning:

$$\mu \lambda^2 e^{\lambda y} + \rho v_0 \lambda e^{\lambda y} = 0$$

$$e^{\lambda y} (\mu \lambda^2 + \rho v_0 \lambda) = 0 \rightarrow \mu \lambda^2 + \rho v_0 \lambda = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda (\mu \lambda + \rho v_0) = 0 \Rightarrow \lambda = \begin{cases} 0 \\ -\rho v_0 / \mu \end{cases}$$

Så att:

$$u(y) = C_1 e^{\lambda_1 y} + C_2 e^{\lambda_2 y} = C_1 + C_2 e^{-\rho v_0 y / \mu}$$

Randvillkor: $u=0$ vid $y=0 \rightarrow C_1 + C_2 = 0$
 $u=U$ vid $y=\infty \rightarrow U = C_1$ } $\Rightarrow \begin{cases} C_1 = U \\ C_2 = -U \end{cases}$

Svar: $u(y) = U - U e^{-\rho v_0 y / \mu} = U (1 - e^{-\rho v_0 y / \mu})$