



CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Tillämpad mekanik
412 96 Göteborg

TME055 Strömningsmekanik

2016-04-05

Tentamen tisdagen den 5 april 2016 kl 08:30-12:30

Ansvarig lärare: Henrik Ström

Borja Rojo (som företräder ansvarig lärare) besöker salen under pågående examination för att svara på eventuella frågor. Under hela tentamen kan han nås på telefon 0738 92 69 15.

Maximal poängsumma är 50. För godkänt krävs 20 poäng, för betyg 4 krävs 30 poäng och för betyg 5 krävs 40 poäng.

Tillåtna hjälpmedel: Valfri miniräknare med tömt minne samt matematisk handbok (t ex BETA och Physics Handbook).

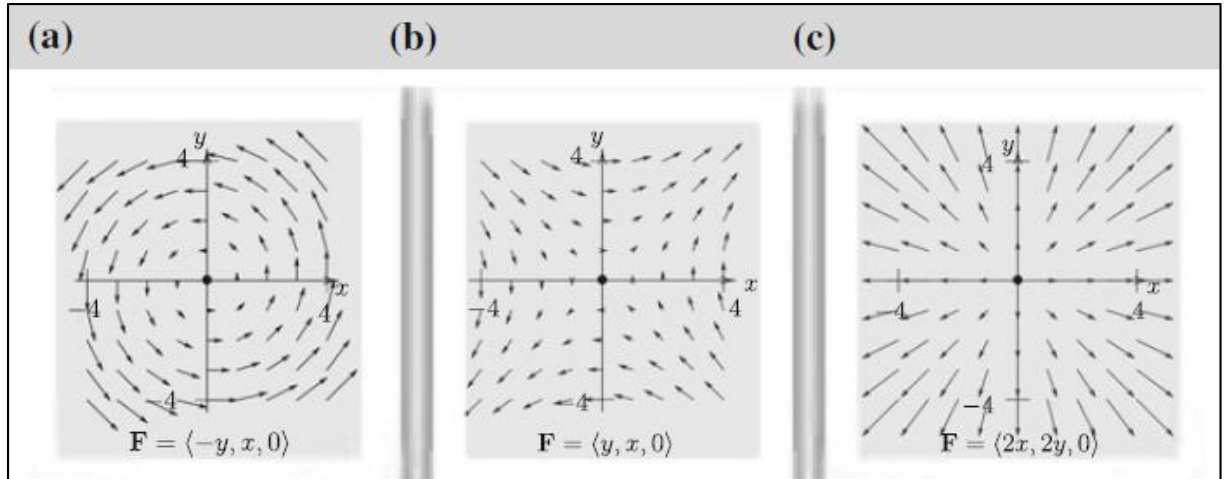
Lösningar anslås på kurshemsidan i PingPong den 6 april. Även information om möjligheter till tentamensgranskning annonseras på kurshemsidan.

OBS! Notera att uppgifterna inte är ordnade efter svårighetsgrad.

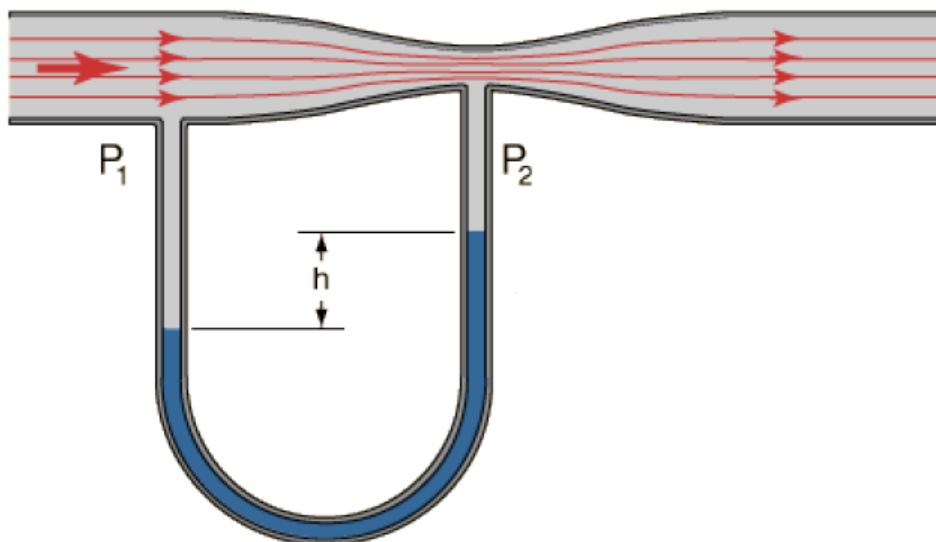
T1.

- a) Nedan återfinns tre enkla strömningsfält, kallade **(a)**, **(b)** och **(c)**.
- Vilket/vilka av dessa är exempel på inkompressibel strömning?
 - Vilket/vilka av dessa är exempel på rotationsfri strömning?
 - Vilket/vilka skulle kunna beskrivas med en strömfunktion?
 - Vilket/vilka skulle kunna beskrivas med en hastighetspotential?

OBS! Kort *matematisk* motivering krävs till svaren på (i) och (ii). (4 p)



- b) Reynolds transportteorem har en viktig roll inom strömningsmekaniken. Vad används det till? Förklara även innebörden av de olika termerna i teoremet. (3 p)
- c) Figurskissen nedan visar principen för hur man kan mäta flödeshastigheten med hjälp av en Venturimeter. Förklara (med en formel) hur hastigheten erhålls genom avläsning av höjden h . Vinkeln på expansionen i Venturimetern är ofta liten (i storleksordningen 5 grader) – varför då? (3 p)



T2.

- a) En ofta använd form av den differentiella energibalansen är

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = k \nabla^2 T + \Phi.$$

Vilka antaganden behöver du göra för att kunna härleda denna ekvation från termodynamikens första huvudsats uttryckt för en differentiell kontrollvolym? (OBS! Du behöver inte göra härledningen, bara redogöra för vilka antaganden som krävs).

Vad är den fysikaliska tolkningen av de tre termerna i ekvationen? På vilka sätt finns det en koppling till hastighetsfältet i ekvationen? (6 p)

- b) Kan en fluid uppleva acceleration även vid stationära betingelser? Motivera ditt svar! (2 p)

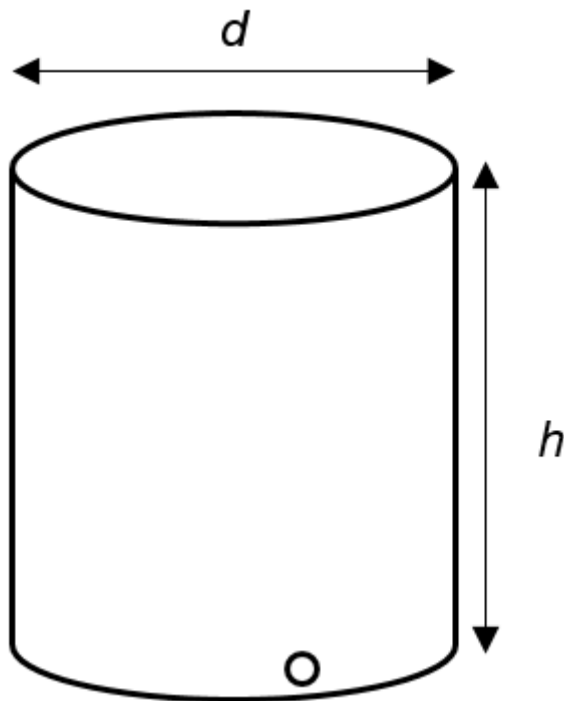
- c) En sfärisk kropp omströmmas av en Newtonsk fluid. Strömningen är inkompressibel. Ange en formel för hur du erhåller nettokraften på kroppen som strömningen orsakar (försumma gravitationseffekter). Förklara också vilken del av detta uttryck som försummas vid antagande om potentialströmning (vilket ger upphov till D'Alemberts paradox). (2 p)

T3.

- a) Beskriv och förklara skillnaden mellan en fullt utvecklad laminär hastighetsprofil mellan två plana plattor och en fullt utvecklad turbulent hastighetsprofil i samma geometri. Varför är de olika? (3 p)
- b) Utgå från en rörelsemängdsbalans i x-led från Navier-Stokes ekvationer (uttryckt för ett kartesiskt koordinatsystem). Inför Reynoldsdekomponering av de okända variablerna och härled den Reynoldsmedelvärderade rörelsemängdsbalansen (RANS) i x-led. Vilka är de nya termerna som dyker upp? Vad kallas de? Det sägs ibland att deras namn är missvisande – varför då? (6 p)

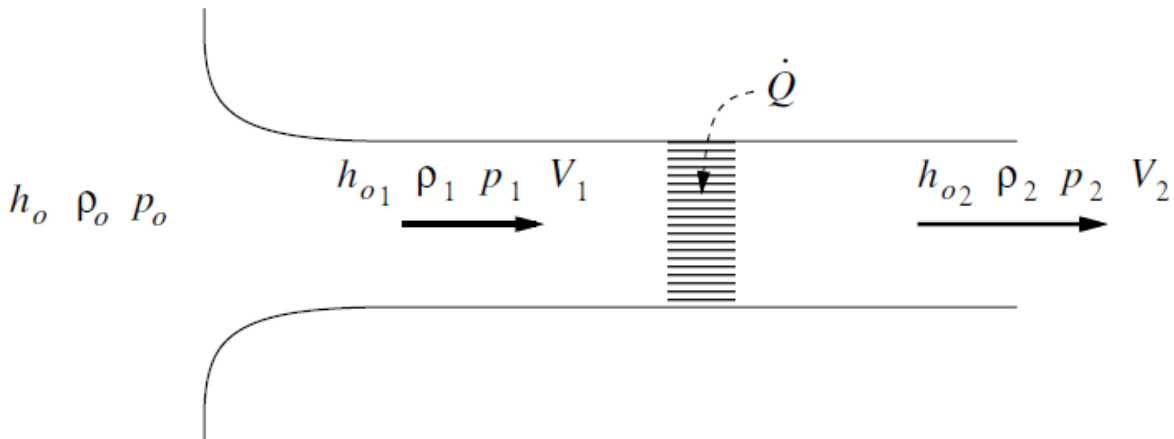
P1.

En cylinderformad tank är initialt full med vatten. Tanken har inget lock utan är öppen upptill. Den har också ett litet hål nedtill (se bild) ur vilket vatten rinner ur tanken. Tanken är placerad inuti en tryckkammare med ett totaltryck på 4 bar. Vattnets densitet kan antas vara 1000 kg/m^3 , tankens diameter är 1 m, och hålets diameter är 2 cm. Innan det lilla hålet öppnas uppmäts tryckdifferensen mellan tankens öppna yta och insidan av tankens botten till 49,050 Pa. Uppskatta hur lång tid det tar för tanken att tömmas till hälften! (7 p)



P2.

Luft sugas med hög hastighet ur en större reservoar och genom ett rör med konstant tvärsnittsarea A . Röret innehåller ett värmeelement som tillför flödet ett känt energiflöde $\dot{Q}$ (i Watt). Såväl värmetransport genom rörväggarna, som friktion mellan luften och väggen och värmeelementet, kan försummas.



Följande storheter är kända:

$h_o = h_{o1}$	total entalpi i reservoaren	ρ_o	densitet i reservoaren
p_o	tryck i reservoaren	p_2	tryck vid utloppet

De återstående sex storheterna i röret är okända:

h_{o2}	total entalpi vid utloppet	p_1	tryck vid inloppet
V_1	hastighet vid inloppet	ρ_1	densitet vid inloppet
V_2	hastighet vid utloppet	ρ_2	densitet vid utloppet

Det behövs således sex ekvationer för att bestämma de sex okända storheterna. En av dessa ekvationer kommer från antagandet om oförändrad entropi mellan reservoaren och inloppet:

$$\frac{p_1}{p_o} = \left(\frac{h_{o1} - \frac{1}{2} V_1^2}{h_o} \right)^{\gamma/(\gamma-1)}$$

Två andra samband är tillståndsekvationerna vid in- och utlopp:

$$p_1 = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \rho_1 \left(h_{o1} - \frac{1}{2} V_1^2 \right)$$

$$p_2 = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \rho_2 \left(h_{o2} - \frac{1}{2} V_2^2 \right)$$

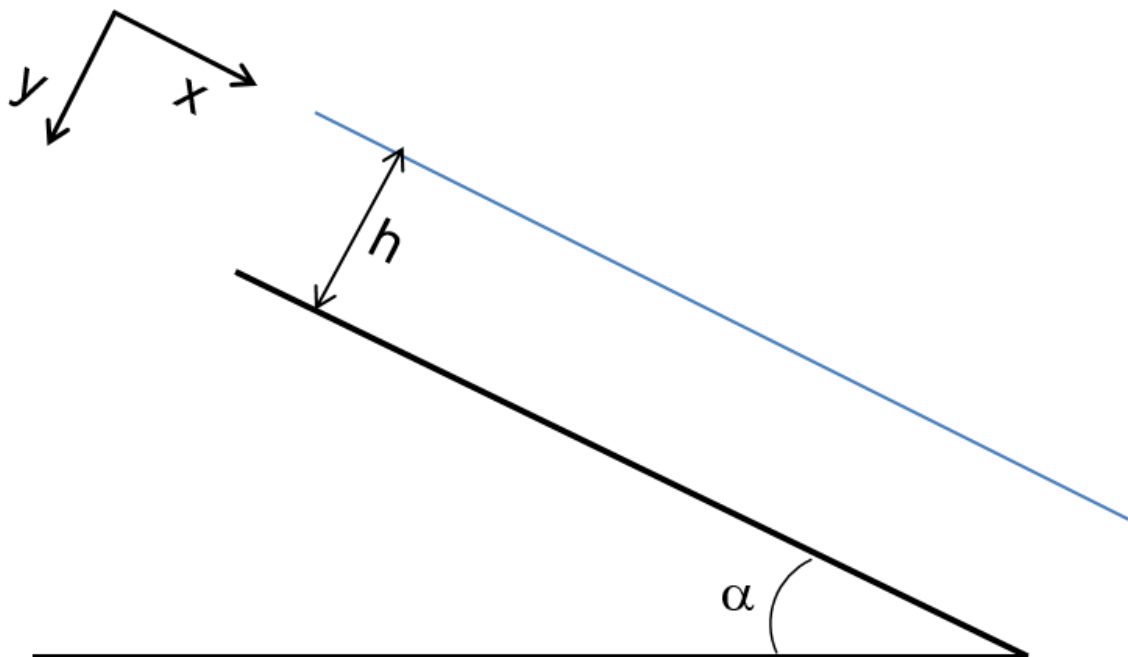
Skriv ned de tre återstående ekvationerna genom att definiera en lämplig kontrollvolym och tillämpa kontrollvolymanalys! (OBS! Ekvationerna behöver inte lösas, men de ska vara uttryckta i endast kända och okända variabler samt A och $\dot{Q}$!) (7 p)

P3.

En vätska strömmar nedför ett sluttande plan på ett sådant sätt att strömningen hela tiden förblir laminär och kan betraktas som inkompressibel. Filmen är inte isoterm, och fluidens viskositet varierar därför genom filmen enligt:

$$\mu = \mu_0 e^{-\beta y/h}.$$

I detta uttryck är μ_0 viskositeten vid ytan på filmen och β en konstant som beskriver hur snabbt μ minskar när y ökar. h är filmens tjocklek (se figur). Härled ett uttryck för hastighetsprofilen $u(y)$ i filmen! (7 p)



Formelsamling

Mekaniklagar

$$\frac{dm_{syst}}{dt} = 0$$

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{V})$$

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{H}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum (\mathbf{r} \times \mathbf{V})\delta m\right)$$

$$\frac{dQ}{dt} - \frac{dW}{dt} = \frac{dE}{dt}$$

Reynolds transportteorem

$$\frac{dB_{syst}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\int_{CV} \beta \rho dV\right) + \int_{CS} \beta \rho (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dA$$

Differentiella samband på vektorform

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} = 0$$

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{g}$$

$$\rho \frac{D\hat{u}}{Dt} + p(\nabla \cdot \mathbf{V}) = \nabla \cdot [k\nabla T] + \Phi$$

Kontinuitetsekvationen och Navier-Stokes ekvationer i cylindriska koordinater

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(v_z) = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r}(v_r) + \frac{1}{r} v_\theta \frac{\partial}{\partial \theta}(v_r) + v_z \frac{\partial}{\partial z}(v_r) - \frac{1}{r} v_\theta^2 = \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + g_r + \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r}(v_\theta) + \frac{1}{r} v_\theta \frac{\partial}{\partial \theta}(v_\theta) + v_z \frac{\partial}{\partial z}(v_\theta) + \frac{1}{r} v_r v_\theta = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + g_\theta + \\ + \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r}(v_z) + \frac{1}{r} v_\theta \frac{\partial}{\partial \theta}(v_z) + v_z \frac{\partial}{\partial z}(v_z) \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g_z + \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] \end{aligned}$$

Buckingham's π -theorem

$$i = n - r$$

Friction head enligt Weisbach

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g}$$

Engångsförluster

$$h_m = K \frac{V^2}{2g}$$

Darcys friktionsfaktor

Laminär strömning

$$f = \frac{64}{Re_D}$$

Turbulent strömning

$$\frac{1}{\sqrt{f/4}} = 4.0 \log_{10} \{Re_D \sqrt{f/4}\} - 0.4 \text{ för } \varepsilon/D = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{f/4}} = 4.0 \log_{10} \frac{D}{\varepsilon} - 0.4 \text{ för } \varepsilon/D \neq 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{f/4}} = 4 \log_{10} \frac{D}{\varepsilon} + 2.28 - 4 \log_{10} \left\{ 4.67 \frac{D/\varepsilon}{Re_D \sqrt{f/4}} + 1 \right\} \text{ för } \frac{D/\varepsilon}{Re_D \sqrt{f/4}} > 0.01$$

Formmotstånd, lyftkraft och väggfriktionskoefficient

$$F_D = C_D A_p \frac{\rho V^2}{2}$$

$$F_L = C_L A_p \frac{\rho V^2}{2}$$

$$\tau_w = C_f \frac{\rho V^2}{2}$$

Elementära planströmningar

Uniform strömning: $\psi = Uy = Ur \sin \theta$, samt $\phi = Ux = Ur \cos \theta$

Linjekälla/-sänka: $\psi = m\theta$, samt $\phi = m \ln r$

Linjevirvel: $\psi = -K \ln r$, samt $\phi = K\theta$

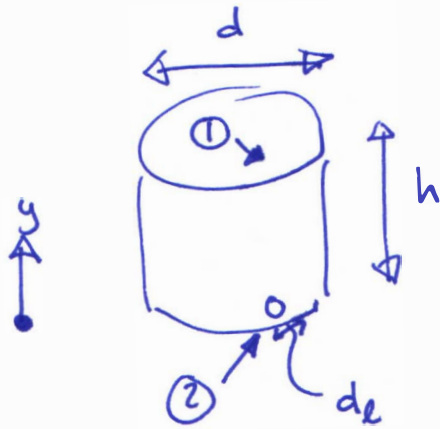
Dubblätt: $\psi = -\lambda \sin \theta / r$, samt $\phi = \lambda \cos \theta / r$

Tentamen Strömningsmekanik TME055 2016-04-05

- T1.**
- a) Föreläsning 10 / White kap. 4.7-9
 - b) Föreläsning 3 / White kap. 3.2
 - c) Föreläsning 9 / White kap. 6.12
- T2.**
- a) Föreläsning 6 / White kap. 4.5
 - b) Föreläsning 5 / White kap. 4.1
 - c) Föreläsning 10 / White kap. 8.4
- T3.**
- a) Föreläsning 9 / White kap. 6.1,4,6
 - b) Föreläsning 12 / White kap. 6.5, Davidson kap. 1.1

P1

Tank som töms av litet hål $\rightarrow$ utnyttja Bernoullis ekvation



Följ en strömlinje från ytan ① till mynningen på hålet ②

$$gy_1 + \frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} = gy_2 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2}$$

Både ① och ② öppna mot omgivningen $\Rightarrow p_1 = p_2$

Kontinuitetsekvationen:

$$\rho v_1 \frac{\pi d^2}{4} = \rho v_2 \frac{\pi d_e^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow v_1 = v_2 \left(\frac{d_e}{d} \right)^2 = 4 \cdot 10^{-4} v_2 \Rightarrow v_1 \approx 0$$

Lös ut v_2 ur Bernoullis: $v_2 = \sqrt{2g(y_1 - y_2)} \approx \sqrt{2gh}$

Vi söker tiden det tar för tanken att tömmas till hälften:

$$\frac{dh}{dt} = -v_1 = -4 \cdot 10^{-4} \sqrt{2gh}$$

Separera och integrera:

$$\int_{h_0}^{\frac{1}{2}h_0} \frac{dh}{\sqrt{h}} = -4 \cdot 10^{-4} \sqrt{2g} \int_0^t dt = -4 \cdot 10^{-4} \sqrt{2g} t$$

Vi saknar nu endast $h(t=0) = h_0 \rightarrow$ erhålles ur tryckinformationen!

$$\Delta p = \rho g h_0 = 49050 \text{ Pa} \Leftrightarrow h_0 = \frac{49050 \text{ Pa}}{\rho g} = 5 \text{ m}$$

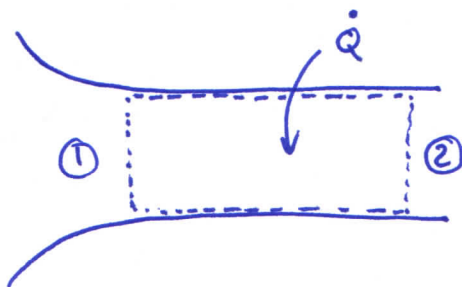
Beräkna t :

$$t = \frac{[2\sqrt{h}]_{h_0}^{\frac{1}{2}h_0}}{-4 \cdot 10^{-4} \sqrt{2g}} = 739,29 \text{ s} \approx \underline{\underline{12 \text{ min}}}$$

P2

Kontrollvolymanalys ska ge oss tre ekvationer till $\rightarrow$ massbalans
röremängdsbalans
energi balans

Val av kontrollvolym:



Det är rimligt att anta att stationära betingelser råder (finns inget som indikerar motsatsen)

Massbalans för KV:
$$\frac{d}{dt} \left(\int_{KV} \rho dV \right) + \int_{KV} \rho (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dA = 0$$

$$\Leftrightarrow -\rho_1 V_1 A + \rho_2 V_2 A = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2} \quad (1)$$

Röremängdsbalans för KV:
$$\frac{d}{dt} \left(\int_{KV} \rho \mathbf{u} dV \right) + \int_{KV} \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dA = \sum \mathbf{F}$$

$$-\rho_1 V_1^2 A + \rho_2 V_2^2 A = p_1 A - p_2 A \quad (\text{övriga friktionsfaktorer försummas!})$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\rho_1 V_1^2 + p_1 = \rho_2 V_2^2 + p_2} \quad (2)$$

Energi balans för KV:
$$\frac{d}{dt} \left(\int_{KV} \left(\hat{u} + \frac{1}{2} V^2 + g z \right) \rho dV \right) + \int_{KV} \left(\hat{u} + \frac{1}{2} V^2 + g z \right) \rho (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dA = \dot{Q} - \dot{W}_{\text{axel}} - \dot{W}_{\text{visk}}$$

- stationärt
- inget axelarbete
- visköst arbete försummas
- ingen höjdskillnad

~~$$\frac{d}{dt} \left(\int_{KV} \left(\hat{u} + \frac{1}{2} V^2 + g z \right) \rho dV \right) + \int_{KV} \left(\hat{u} + \frac{1}{2} V^2 + g z \right) \rho (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dA = \dot{Q} - \dot{W}_{\text{axel}} - \dot{W}_{\text{visk}}$$~~

$$-\rho_1 V_1 A \left(h_{01} + \frac{1}{2} V_1^2 \right) + \rho_2 V_2 A \left(h_{02} + \frac{1}{2} V_2^2 \right) = \dot{Q}$$

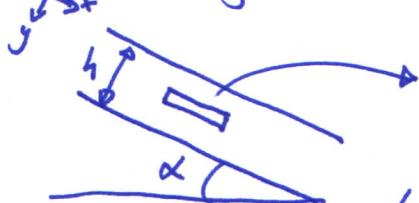
$$\Leftrightarrow \boxed{\rho_1 V_1 \left(h_{01} + \frac{1}{2} V_1^2 \right) + \frac{\dot{Q}}{A} = \rho_2 V_2 \left(h_{02} + \frac{1}{2} V_2^2 \right)} \quad (3)$$

P3 | Vätska strömmar nedför sluttande plan. Viskositet ej konstant $\rightarrow$ kan ej utgå från N-S!

Vi söker hastighetsprofilen $u(y)$. Antag:

- * laminärt (givet)
- * inkompressibelt (givet)
- * stationärt (finns ej indikation på motsatsen)
- * u är funktion av y , $v=0$, $w=0$
- * fullt utvecklade strömning
- * $p(y)$, $p(y=0) = p_{atm} \forall x$

Med dessa förutsättningar har vi för en rörelsemängdsbalans över ett tunt snitt Δy att:



$$(-\tau_{yx}|_y + \tau_{yx}|_{y+\Delta y})LW + (\rho g \sin \alpha)LW\Delta y = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d\tau_{yx}}{dy} = -\rho g \sin \alpha$$

Integrera ~~och kom ihåg att~~ $y=0$ (gas-vätskegränssyta $\rightarrow \tau_{yx}=0$)

$$\tau_{yx} = -\rho g y \sin \alpha + C_1 \quad C_1=0 \Rightarrow \tau_{yx} = -\rho g y \sin \alpha$$

Enligt uppgift har vi att

$$\tau_{yx} = \mu \frac{du}{dy} = \mu_0 e^{-\beta y/h} \frac{du}{dy} = -\rho g y \sin \alpha$$

Randvillkor är att för $y=h$ är $u=0$ (no slip)

stationärt,
så ingen
ackumulering
av rörelse-
mängd!

$$\frac{du}{dy} = - \frac{\rho g y \sin \alpha}{\mu_0 e^{-\beta y/h}} = - \underbrace{\frac{\rho g \sin \alpha}{\mu_0}}_{=K} y e^{\beta y/h}$$

Integrieren: $u(y) = -K e^{\beta y/h} \left(\frac{\beta y/h - 1}{\beta^2/h^2} \right) + C_1$

$$u(y=h) = 0 = -K e^{\beta} \left(\frac{\beta - 1}{\beta^2/h^2} \right) + C_1 = 0 \Leftrightarrow C_1 = K e^{\beta} \left(\frac{\beta - 1}{\beta^2/h^2} \right)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{u(y) = -K e^{\beta y/h} \left(\frac{\beta y/h - 1}{\beta^2/h^2} \right) + K e^{\beta} \left(\frac{\beta - 1}{\beta^2/h^2} \right) =}}$$

$$= \frac{\rho g \sin \alpha}{\mu_0} h^2 \left[e^{\beta} \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta^2} \right) - e^{\beta y/h} \left(\frac{y}{\beta h} - \frac{1}{\beta^2} \right) \right]$$