CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Tillämpad mekanik
412 96 Göteborg

TME055 Strömningsmekanik 2016-01-15

Tentamen fredagen den 15 januari 2016 kl 14:00-18:00

Ansvarig lärare: Henrik Ström

Ansvarig lärare (eller någon som företräder honom) besöker salen under pågående examination för att svara på eventuella frågor. Under hela tentamen kan han nås på telefon 070 40 25 119.

Maximal poängsumma är 50. För godkänt krävs 20 poäng, för betyg 4 krävs 30 poäng och för betyg 5 krävs 40 poäng.

Tillåtna hjälpmedel: Valfri miniräknare med tömt minne samt matematisk handbok (t ex BETA och Physics Handbook).

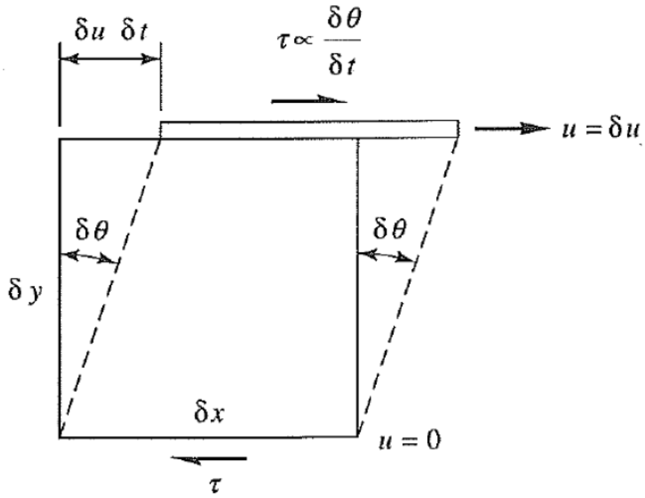
Lösningar anslås på kurshemsidan i PingPong den 18 januari. Även information om möjligheter till tentamensgranskning annonseras på kurshemsidan.

OBS! Notera att uppgifterna inte är ordnade efter svårighetsgrad.

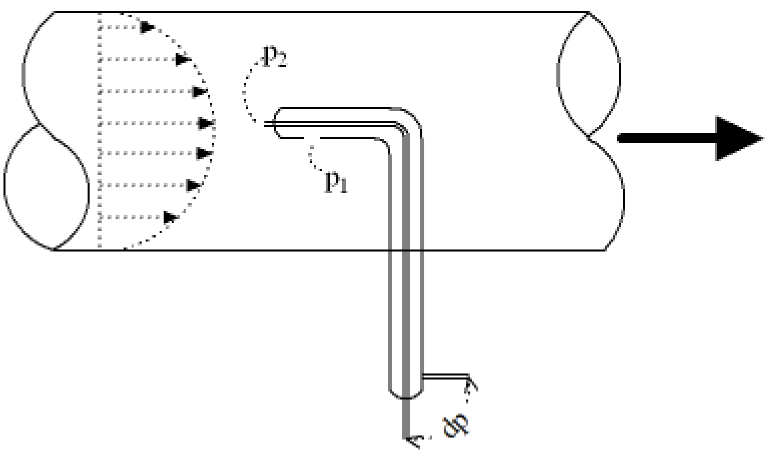
T1.

a) En liten kontrollvolym inuti en stor gasbehållare innehåller vid varje givet tillfälle ett visst antal gasmolekyler. En uppskattning av gasens densitet kan då erhållas som den sammanlagda massan av dessa gasmolekyler, Δm, dividerad med kontrollvolymens volym, ΔV. Skissa hur $\Delta m/\Delta V$ ser ut som funktion av ΔV. Rita in var gränsen mellan den molekylära domänen och kontinuumdomänen går. Hur ska densitet definieras för att man ska kunna bestämma densiteten i en punkt? (4 p)

b) Figuren nedan illustrerar ett tvådimensionellt fluidelement som deformeras på grund av att dess övre sida rör sig snabbare än dess nedre sida. Visa hur skjuvspänningen beror av hastighetsgradienten du/dy under antagandet att skjuvspänningen är proportionell mot deformationshastigheten $d\theta/dt$. Vad kallas fluider där detta är ett bra antagande? Vad kallas proportionalitetskonstanten i det resulterande uttrycket? (3 p)



c) Figurskissen nedan visar principen för hur man kan mäta flödeshastigheten med hjälp av ett Pitotrör. Förklara (med en formel) hur hastigheten erhålls genom mätning av tryckskillnaden $dp = p_2 - p_1$. I vilken punkt mäter man hastigheten (1, 2 eller ett medelvärde)? Varför är det viktigt att Pitotröret riktas rakt mot det ankommande flödet (och inte i vinkel mot det)? (3 p)



T2.

a) Man brukar säga att det inte finns någon strikt definition av turbulens, utan att turbulens har ett antal karaktäristiska egenskaper. Ange och förklara kort innebörden av dessa egenskaper! (4 p)

b) Vad är tanken bakom strömfunktionen? Vad krävs för att den ska kunna användas? (2 p)

c) Vilken typ av likhet krävs mellan en modell och verkligheten för att analys av strömningen i/runt modellen ska vara användbar? Vad innebär denna typ av likhet? (2 p)

d) Varför är det inte möjligt för friktionsfri strömning att uppfylla no-slip randvillkoret? (1 p)

T3.

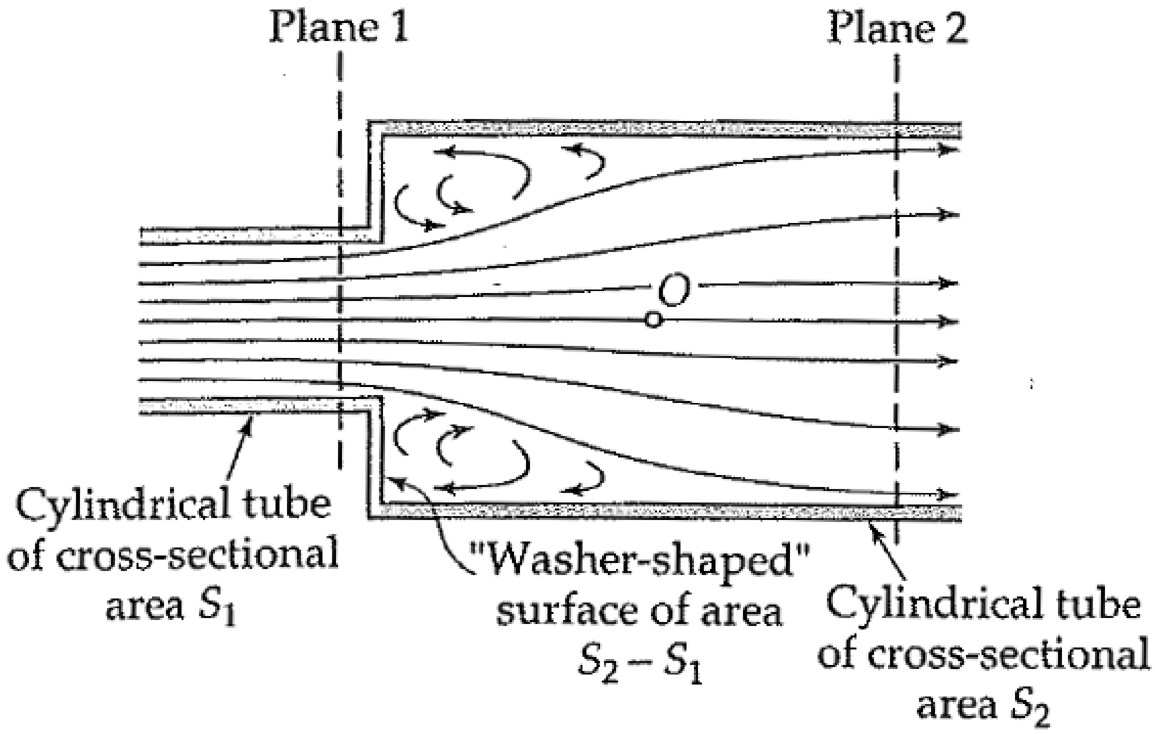
a) Skriv om Navier-Stokes ekvationer på dimensionslös form. Vad är den fysikaliska tolkningen av den dimensionslösa grupp som dyker upp och vad kallas den? Visa hur ekvationen kan förenklas om denna dimensionslösa grupp är mycket liten respektive mycket stor. (5 p)

b) Vad innebär det att ett gränsskikt separerar från en yta? Visa matematiskt, t ex genom att utgå från den förenklade differentiella rörelsemängdsbalansen i huvud-strömriktningen nedan, vad som är ett nödvändigt krav för separation. Varför är risken för separation störst på baksidan av en omströmmad kropp? (5 p)

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} \approx -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

P1.

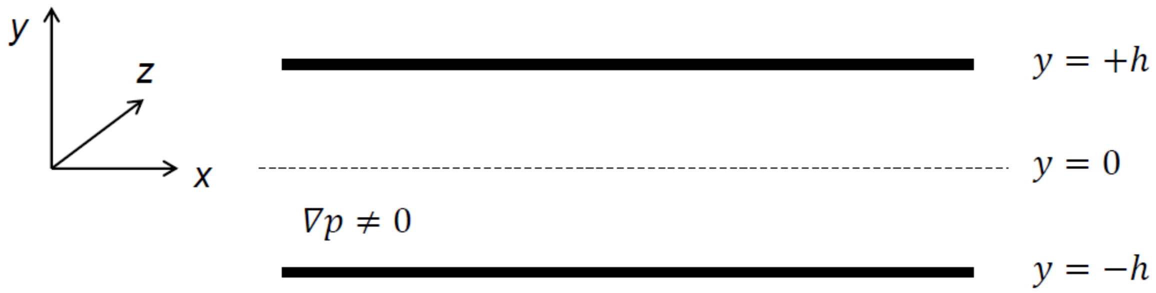
En fluid strömmar inkompressibelt och turbulent i ett litet cylindriskt rör som övergår i ett större cylindriskt rör genom en plötslig expansion (se figur). Tvärsnittsytorna för respektive rör är S_1 respektive S_2, och tvärsnittsytan som är vinkelrät mot huvudströmriktningen precis vid expansionen är således $S_2 - S_1$ (denna yta benämns *"washer-shaped" surface* i figuren). Uppskatta tryckskillnaden mellan plan 1 och 2 samt vilken effekt som krävs för att övervinna friktionsförlusterna i expansionen. Areaförhållandet $\beta = S_1/S_2$ är 0.8, medelhastigheten vid plan 2 är 10 m/s, fluidens densitet är 1000 kg/m^3 och S_2 är 0.1 m^2. Avståndet mellan plan 1 och expansionen kan antas vara mycket litet. <u>Ledning:</u> Friktionseffekterna vid väggarna är tillräckligt små för att kunna försummas i en kraftbalans, men de orsakar en förlust av mekanisk energi som måste beaktas i en energibalans. (7 p)



P2.

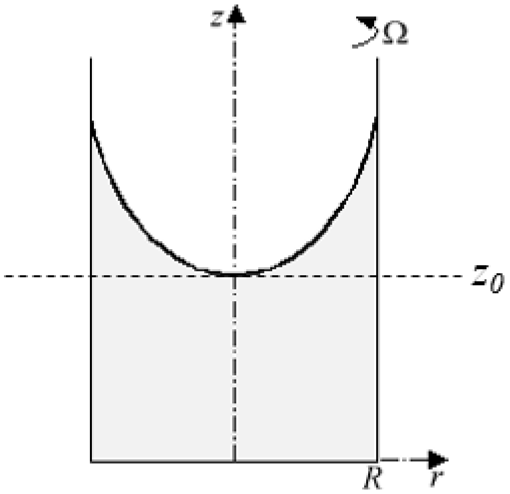
Betrakta strömning mellan två oändliga, plana, stillastående plattor. Fluidens densitet är 1000 kg/m3, dess viskositet är 0.001 Pa,s och avståndet mellan plattorna är 2 mm. Strömningen är laminär och inkompressibel och fluiden är Newtonsk. Gravitationens inverkan är försumbar. Om väggskjuvspänningen är 1 Pa, vad är då hastigheten mitt mellan plattorna?

(7 p)



P3.

En cylindrisk tank av radie *R* innehåller en vätska av konstant densitet och viskositet. Tanken roterar kring sin egen axel med den konstanta vinkelhastigheten Ω och gravitationen verkar nedåt i figuren. Tanken kan antas ha roterat tillräckligt länge för att systemet ska ha ställt in sig i steady-state. I detta läge är v_r och v_z båda noll och $v_\theta = \Omega r$, medan trycket beror av både *z* och *r*. Härled ett uttryck *z(r)* för formen på gränsytan mellan vätskan och luften ovanför i denna situation, i termer av höjd ovanför z_0. (7 p)



Formelsamling

Mekaniklagar

$$\frac{dm_{syst}}{dt} = 0$$

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{V})$$

$$\boldsymbol{M} = \frac{d\boldsymbol{H}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum(\boldsymbol{r} \times \mathbf{V})\delta m\right)$$

$$\frac{dQ}{dt} - \frac{dW}{dt} = \frac{dE}{dt}$$

Reynolds transportteorem

$$\frac{dB_{syst}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\int_{CV} \beta\rho d\mathcal{V}\right) + \int_{CS} \beta\rho(\mathbf{V}\cdot\mathbf{n})\, dA$$

Differentiella samband på vektorform

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\, \nabla\cdot\mathbf{V} = 0$$

$$\rho\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla p + \nabla\cdot\boldsymbol{\tau} + \rho\mathbf{g}$$

$$\rho\frac{D\hat{u}}{Dt} + p(\nabla\cdot\mathbf{V}) = \nabla\cdot[k\nabla T] + \Phi$$

Kontinuitetsekvationen och Navier-Stokes ekvationer i cylindriska koordinater

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(v_z) = 0$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial}{\partial r}(v_r) + \frac{1}{r}v_\theta\frac{\partial}{\partial\theta}(v_r) + v_z\frac{\partial}{\partial z}(v_r) - \frac{1}{r}{v_\theta}^2 =$$
$$= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + g_r + \frac{\mu}{\rho}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_r}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}\right]$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r\frac{\partial}{\partial r}(v_\theta) + \frac{1}{r}v_\theta\frac{\partial}{\partial\theta}(v_\theta) + v_z\frac{\partial}{\partial z}(v_\theta) + \frac{1}{r}v_r v_\theta = -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial\theta} + g_\theta +$$
$$\frac{\mu}{\rho}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right]$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r\frac{\partial}{\partial r}(v_z) + \frac{1}{r}v_\theta\frac{\partial}{\partial\theta}(v_z) + v_z\frac{\partial}{\partial z}(v_z)$$
$$= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + g_z + \frac{\mu}{\rho}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right]$$

Buckinghams π-teorem

$$i = n - r$$

Friction head enligt Weisbach

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{\mathrm{V}^2}{2g}$$

Engångsförluster

$$h_m = K \frac{\mathrm{V}^2}{2g}$$

Darcys friktionsfaktor

Laminär strömning

$$f = \frac{64}{Re_D}$$

Turbulent strömning

$$\frac{1}{\sqrt{f/4}} = 4.0 \log_{10}\left\{Re_D \sqrt{f/4}\right\} - 0.4 \text{ för } \varepsilon/D = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{f/4}} = 4.0 \log_{10} \frac{D}{\varepsilon} - 0.4 \text{ för } \varepsilon/D \neq 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{f/4}} = 4 \log_{10} \frac{D}{\varepsilon} + 2.28 - 4 \log_{10} \left\{4.67 \frac{D/\varepsilon}{Re_D \sqrt{f/4}} + 1\right\} \text{ för } \frac{D/\varepsilon}{Re_D \sqrt{f/4}} > 0.01$$

Formmotstånd, lyftkraft och väggfriktionskoefficient

$$F_D = C_D A_p \frac{\rho \mathrm{V}^2}{2}$$

$$F_L = C_L A_p \frac{\rho \mathrm{V}^2}{2}$$

$$\tau_w = C_f \frac{\rho \mathrm{V}^2}{2}$$

Elementära planströmningar

Uniform strömning: $\psi = Uy = Ur \sin\theta$, samt $\phi = Ux = Ur \cos\theta$

Linjekälla/-sänka: $\psi = m\theta$, samt $\phi = m \ln r$

Linjevirvel: $\psi = -K \ln r$, samt $\phi = K\theta$

Dubblett: $\psi = -\lambda \sin\theta / r$, samt $\phi = \lambda \cos\theta / r$

Tentamen Strömningsmekanik TME055 2016-01-15

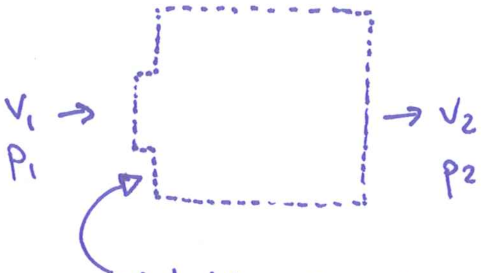
T1.	a)	Föreläsning 1 / White kap. 1.5
	b)	Föreläsning 1 / White kap. 1.9
	c)	Föreläsning 9 / White kap. 6.12
T2.	a)	Föreläsning 11 / Davidson kap. 1.1
	b)	Föreläsning 10 / White kap. 4.7
	c)	Föreläsning 8 / White kap. 5.5
	d)	Föreläsning 6 / White kap. 4.6
T3.	a)	Föreläsning 8 / White kap. 5.4
	b)	Föreläsning 12 / White kap. 7.5

P1 Vi söker en tryckskillnad i ett strömningsfall med friktionsförluster → använd kontrollvolymstekniken (Bernoullis gäller ej)

$$\sum \mathbf{F} = \frac{d}{dt}\left(\int_{CV} \rho \mathbf{v}\, dV\right) + \int_{CS} \mathbf{v}\rho(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\, dA$$

Studera systemet i kanalströmriktningen → ingen effekt av gravitationsaccelerationen
Friktionseffekter vid väggar försummas → endast tryck-bidrag i kraftbalansen
Antag stationärt → volymsintegralen = 0

Kontrollvolym:



Vi behöver även trycket här!
då plan 1 får antas ligga mycket nära → ansätt p_1 även här!

Sålunda:

$$p_1 S_1 + p_1(S_2 - S_1) - p_2 S_2 = -\rho v_1^2 S_1 + \rho v_2^2 S_2$$

$$\Leftrightarrow \quad (p_1 - p_2) S_2 = \rho\left(v_2^2 S_2 - v_1^2 S_1\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad p_1 - p_2 = \rho v_2^2 - \rho v_1^2 \frac{S_1}{S_2} = \rho v_2^2 - \rho v_1^2 \beta$$

Vi behöver uttrycka v_1 i kända variabler → använd kontinuitetsekvationen!

$$\rho v_1 S_1 = \rho v_2 S_2 \quad \Leftrightarrow \quad v_1 = v_2 \frac{S_2}{S_1} = \frac{v_2}{\beta}$$

Tryckskillnaden: $$p_1 - p_2 = \rho v_2^2 - \rho \frac{v_2^2}{\beta^2}\beta = \rho v_2^2 \left(1 - \frac{1}{\beta}\right) =$$

$$= \underline{-25 \text{ kPa}}$$

Trycket är alltså 25 kPa högre i plan 2, rimligt vid expansion!

Vad har vi för friktionsförlust i expansionen?

Bernoulli med förlustterm kan nu användas:

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + h_f$$

$$z_1 = z_2 \quad \Rightarrow \quad h_f = \frac{(p_1 - p_2)}{\rho g} + \frac{(V_1^2 - V_2^2)}{2g}$$

Uttryck i termer av energi ($J/kg = m^2/s^2$):

$$g h_f = \frac{p_1 - p_2}{\rho} + \frac{V_1^2 - V_2^2}{2} =$$

$$= \frac{1}{\rho}\left(\rho V_2^2\left(1 - \frac{1}{\beta}\right)\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{V_2^2}{\beta^2} - V_2^2\right) =$$

$$= V_2^2\left(1 - \frac{1}{\beta}\right) + V_2^2\left(\frac{1}{2\beta^2} - \frac{1}{2}\right) =$$

$$= V_2^2\left(1 - \frac{1}{\beta} + \frac{1}{2\beta^2} - \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} V_2^2\left(\frac{1}{\beta} - 1\right)^2 = 3{,}125 \ J/kg$$

Massflödet: $\dot{m} = \rho V_2 S_2 = 1000 \ kg/s$

Effekt associerad med friktionsförlusterna: $P = \dot{m}(g h_f) = 3125 \ W = \underline{\underline{3{,}125 \ kW}}$

P2 Strömning mellan stillastående $\overset{\text{horisontella}}{}$ plattor → måste orsakas av tryckgradient!

Laminärt
Inkompressibelt
Newtonsk fluid
Stationärt (finns ingen uppgift om transienta fenomen)
Gravitationen försumbar
Fullt utvecklad strömning (oändliga plattor)

N.S. i x-led:
$$\underbrace{\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right)}_{=0} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \underbrace{\rho g_x}_{=0} + \mu\left(\underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{=0} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}_{=0}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \text{här} \quad \frac{dp}{dx} = \mu\frac{d^2u}{dy^2}$$

Integrera: $$\frac{du}{dy} = \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}y + c_1$$
$$u = \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}\frac{y^2}{2} + c_1 y + c_2$$

Randvillkor: $$u(y=+h)=0 \Rightarrow 0 = \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}\frac{h^2}{2} + c_1 h + c_2$$
$$u(y=-h)=0 \Rightarrow 0 = \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}\frac{h^2}{2} - c_1 h + c_2$$

$$\therefore \; c_1 = 0$$
$$c_2 = -\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}\frac{h^2}{2}$$

Vi söker hastigheten mitt mellan plattorna dvs i $y=0$

$$\Rightarrow u(y=0) = -\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}\frac{h^2}{2}$$

Tryckgradienten är okänd men kan erhållas ur väggskjuvspänningen

$$\tau_{wall} = -\mu\frac{du}{dy}\bigg|_{y=h} = -\mu\cdot\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}h = -\frac{dp}{dx}h \iff \frac{dp}{dx} = \frac{-\tau_{wall}}{h} = -1000 \text{ Pa/m}$$

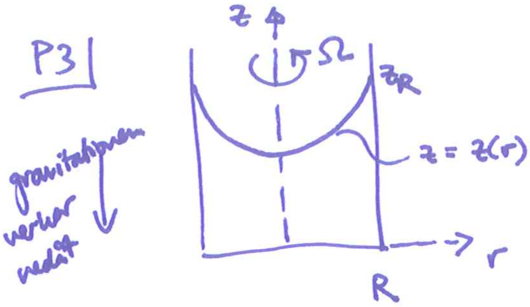
Det strömmar i positiv x-riktning ⇒ väggarna bromsar fluiden som "vill dra med sig" plattorna

Med denna gradient har vi:

$$\underline{\underline{u(y=0) = 0{,}5 \text{ m/s}}}$$

($Re_{2h} = 1000$ laminärt antagande ok)

P3



Vi söker ett uttryck för $z(r)$

Gränsytans form beror av strömningen i vätskan

→ utgå från Navier-Stokes

Cylindriska koordinater lämpligt

Vi har redan fått veta att:

$$v_r = v_z = 0$$

$$v_\theta = \Omega r$$

Samt att $p = p(z, r)$.

N-S i cylindriska koordinater i z- och r-led:

$$z: \quad \underbrace{\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{1}{r} v_\theta \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}}_{=0} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + g_z + \frac{\mu}{\rho}\underbrace{\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial v_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right]}_{=0}$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g$$

$$r: \quad \underbrace{\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} v_\theta \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z}}_{=0} - \frac{1}{r} v_\theta^2 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \underbrace{g_r}_{=0} + \frac{\mu}{\rho}\underbrace{\left[\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial v_r}{\partial r}\right)\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}\right]}_{=0}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\rho}{r} v_\theta^2 = \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\rho}{r}\Omega^2 r^2 = \rho \Omega^2 r$$

Vi har nu gradienterna $\frac{\partial p}{\partial r}$ och $\frac{\partial p}{\partial z}$. Integrera!

$$p = \frac{1}{2}\rho \Omega^2 r^2 + f(\theta, z)$$

$$p = -\rho g z + g(r, \theta)$$

Eftersom p ej beror av θ kan vi ansätta:

$$f = -\rho g z + C$$

$$g = \frac{1}{2}\rho \Omega^2 r^2 + C$$

Så att $p(z,r) = -\rho g z + \frac{1}{2}\rho \Omega^2 r^2 + C$

För att bestämma C behöver vi ett randvillkor.

Trycket vid gränsytan är överallt p_{atm} – välj en godtydlig punkt!

För att göra det enkelt för oss väljer vi $r=0$. Höjden z vid $r=0$ kan vi kalla z_0:

$$p_{atm} = -\rho g z_0 + C \iff C = p_{atm} + \rho g z_0$$

Insättning:

$$p(z,r) = -\rho g z + \frac{1}{2}\rho \Omega^2 r^2 + p_{atm} + \rho g z_0$$

I gränsytan gäller som sagt $p = p_{atm}$ och vi erhåller:

$$p_{atm} = \rho g (z_0 - z) + \frac{1}{2}\rho \Omega^2 r^2 + p_{atm}$$

$$\iff \quad \underline{\underline{z - z_0 = \frac{\Omega^2 r^2}{2g}}}$$