



CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Tillämpad mekanik
412 96 Göteborg

TME055 Strömningsmekanik

2015-08-19

Tentamen onsdagen den 19 augusti 2015 kl 14:00-18:00

Ansvarig lärare: Henrik Ström

Ansvarig lärare (eller någon som företräder honom) besöker salen vid två tillfällen under pågående examination för att svara på eventuella frågor. Under hela tentamen kan han nås på telefon 070 40 25 119.

Maximal poängsumma är 50. För godkänt krävs 20 poäng, för betyg 4 krävs 30 poäng och för betyg 5 krävs 40 poäng.

Tillåtna hjälpmedel: Miniräknare samt matematisk handbok (t ex BETA och Physics Handbook).

Lösningar anslås på kurshemsidan i PingPong den 20 augusti. Även information om möjligheter till tentamensgranskning annonseras på kurshemsidan.

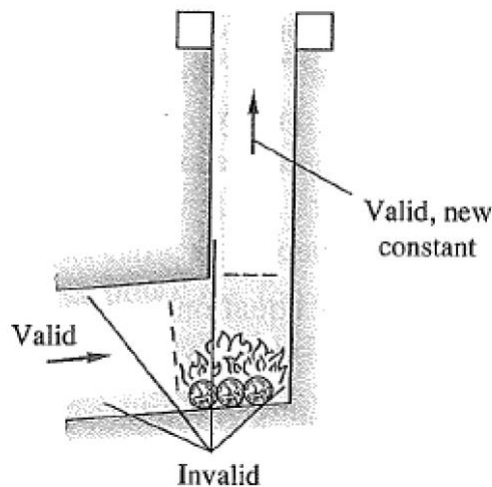
OBS! Notera att uppgifterna inte är ordnade efter svårighetsgrad.

T1.

- a) En liten kontrollvolym inuti en stor gasbehållare innehåller vid varje givet tillfälle ett visst antal gasmolekyler. En uppskattning av gasens densitet kan då erhållas som den sammanlagda massan av dessa gasmolekyler, Δm , dividerad med kontrollvolymens volym, ΔV . Skissa hur $\Delta m/\Delta V$ ser ut som funktion av ΔV . Rita in var gränsen mellan den molekylära domänen och kontinuumdomänen går. Hur ska densitet definieras för att man ska kunna bestämma densiteten i en punkt? (4 p)
- b) Skissera hur ett tvådimensionellt fludelement i xy -planet translateras och deformeras då det föreligger hastighetsgradienter i såväl x - som y -riktning. Antag att hastigheterna och hastighetsgradienterna är positiva och att tidssteget Δt är relativt litet. Hur kan man bestämma deformationshastigheten för denna situation? (3 p)
- c) Hur beror hastighetsprofilen för stationär, laminär strömning i ett horisontellt rör med cirkulärt tvärsnitt av fluidens densitet, om strömningen orsakas av en tryckgradient? Motivera ditt svar! (2 p)

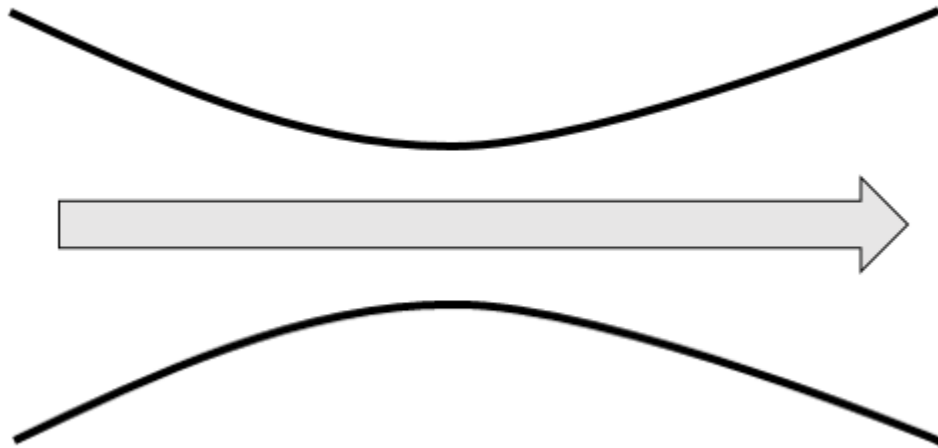
T2.

- a) En fluid strömmar turbulent i ett långt rör. Vilka egenskaper hos fluiden och/eller systemet behöver du känna till för att kunna uppskatta hur små de minsta turbulenta virvlarna är? (2 p)
- b) Den turbulenta kinetiska energin är ett mått på rörelseenergin hos virvlarna i ett turbulent flöde. Rita ett turbulent energispektrum för fullt utvecklad turbulent strömning vid högt Reynoldstal. Visa hur detta spektrum kan delas in i tre regioner och förklara vad som särskiljer regionerna. Varifrån kommer energin hos de stora virvlarna och vart tar energin vägen som lämnar de små virvlarna? (6 p)
- c) Bilden nedan visar ett exempel där vissa begränsningar finns för användandet av Bernoullis ekvation. Varför är Bernoullis ekvation inte tillämpbar i regionerna märkta "Invalid"? Och vad innebär det att Bernoullis ekvation är giltig såväl före som efter den brinnande veden, men med olika konstanter? (2 p)



T3.

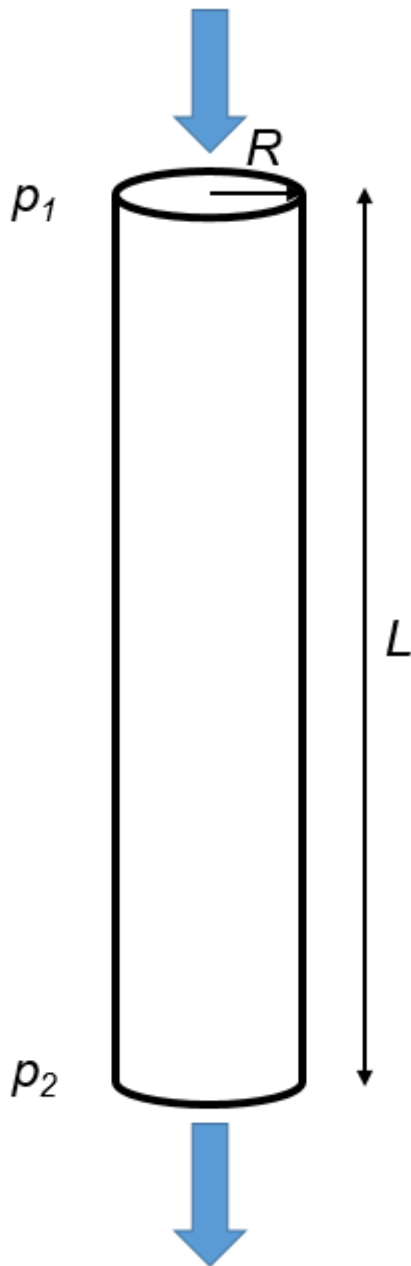
- a) Skriv om Navier-Stokes ekvationer på dimensionslös form. Vad är den fysikaliska tolkningen av den dimensionslösa grupp som dyker upp och vad kallas den? Visa hur ekvationen kan förenklas om denna dimensionslösa grupp är mycket liten respektive mycket stor. (5 p)
- b) Betrakta strömning i en geometri vars tvärsnittsarea först minskar och sedan ökar igen (se bild nedan). Vad innebär det att ett gränsskikt separerar från en yta? Var är risken för separation störst i denna geometri? Varför? (5 p)



P1.

En vätska strömmar laminärt nedåt i ett vertikalt rör med cirkulärt tvärsnitt (se figur) under det att man mäter dess hastighetsprofil. Det visar sig att vid de valda betingelserna är nettotryckkraften på fluiden i röret dubbelt så stor som kraften från gravitationsaccelerationen. Om samma experiment skulle upprepas på månen, där gravitationsaccelerationen bara är $1/6$ av den på jorden, skulle balansen mellan dessa krafter förändras. Hur mycket större eller mindre blir då hastighetsgradienten precis vid rörväggens insida? Antag att fluidens materialdata inte förändras mellan de två experimenten och att storleken på nettotryckkraften är densamma.

(7 p)



P2.

En man på en båt tappar en blykula i vattnet. Det är 200 m djupt på platsen och det tar en minut för kulan att nå botten.

- a) Ställ upp de två differentialekvationer som behövs för att kunna beräkna blykylans diameter. (OBS! Ekvationerna behöver inte lösas, du behöver bara visa hur du får fram dem!)
- b) Uppskatta diametern genom att anta att blykulan faller med konstant hastighet och att formmotståndskoefficienten (C_D) för kulan i vattnet vid givna betingelser är 0.5.

$$\rho_{kula} = 11340 \text{ kg/m}^3$$

$$\rho_{H_2O} = 1000 \text{ kg/m}^3$$

$$\mu_{H_2O} = 0.001 \text{ Pa}\cdot\text{s}$$

(7 p)

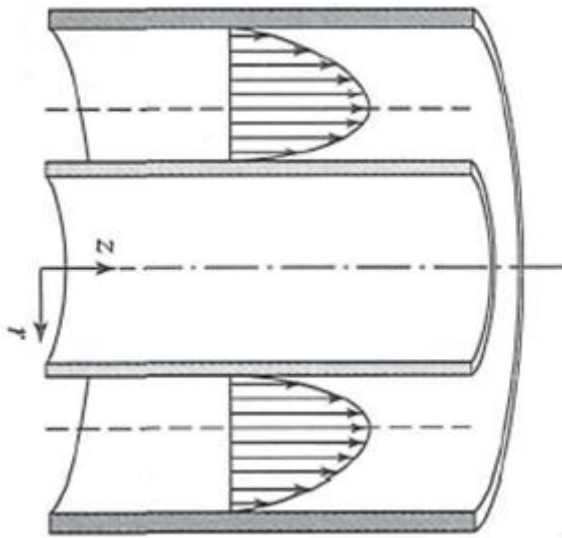
P3.

Ett horisontellt (mycket långt) rör är placerat inuti ett större (lika långt) rör. I mellanrummet mellan de två rören strömmar vatten som drivs av en konstant tryckgradient (se figur för skiss av strömningsprofilen mellan rören). Temperaturen är 5°C och Reynolds tal är sådant att strömningen är laminär. Bestäm storleken på den kraft som strömningen orsakar på det inre röret (per enhetslängd). Tryckgradienten är -30 Pa/m. (7 p)

Materialdata:

Vatten 5°C: $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ $\mu = 0.0015 \text{ Pa}\cdot\text{s}$

Geometri:



Radiellt avstånd från centrumlinjen (z) till inre rörets yttersida: 5 mm

Radiellt avstånd från centrumlinjen (z) till yttre rörets innersida: 7 mm

Formelsamling

Mekaniklagar

$$\frac{dm_{syst}}{dt} = 0$$

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{V})$$

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{H}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum (\mathbf{r} \times \mathbf{V}) \delta m \right)$$

$$\frac{dQ}{dt} - \frac{dW}{dt} = \frac{dE}{dt}$$

Reynolds transportteorem

$$\frac{dB_{syst}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\int_{CV} \beta \rho dV \right) + \int_{CS} \beta \rho (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dA$$

Differentiella samband på vektorform

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} = 0$$

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{g}$$

$$\rho \frac{D\hat{u}}{Dt} + p(\nabla \cdot \mathbf{V}) = \nabla \cdot [k\nabla T] + \Phi$$

Kontinuitetsekvationen och Navier-Stokes ekvationer i cylindriska koordinater

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (v_z) = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r} (v_r) + \frac{1}{r} v_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} (v_r) + v_z \frac{\partial}{\partial z} (v_r) - \frac{1}{r} v_\theta^2 = \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + g_r + \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r} (v_\theta) + \frac{1}{r} v_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta) + v_z \frac{\partial}{\partial z} (v_\theta) + \frac{1}{r} v_r v_\theta = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + g_\theta + \\ + \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r} (v_z) + \frac{1}{r} v_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} (v_z) + v_z \frac{\partial}{\partial z} (v_z) \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g_z + \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] \end{aligned}$$

Buckingham's π -theorem

$$i = n - r$$

Friction head enligt Weisbach

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g}$$

Engångsförluster

$$h_m = K \frac{V^2}{2g}$$

Darcys friktionsfaktor

Laminär strömning

$$f = \frac{64}{Re_D}$$

Turbulent strömning

$$\frac{1}{\sqrt{f/4}} = 4.0 \log_{10} \{Re_D \sqrt{f/4}\} - 0.4 \text{ för } \varepsilon/D = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{f/4}} = 4.0 \log_{10} \frac{D}{\varepsilon} - 0.4 \text{ för } \varepsilon/D \neq 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{f/4}} = 4 \log_{10} \frac{D}{\varepsilon} + 2.28 - 4 \log_{10} \left\{ 4.67 \frac{D/\varepsilon}{Re_D \sqrt{f/4}} + 1 \right\} \text{ för } \frac{D/\varepsilon}{Re_D \sqrt{f/4}} > 0.01$$

Formmotstånd, lyftkraft och väggfriktionskoefficient

$$F_D = C_D A_p \frac{\rho V^2}{2}$$

$$F_L = C_L A_p \frac{\rho V^2}{2}$$

$$\tau_w = C_f \frac{\rho V^2}{2}$$

Elementära planströmningar

Uniform strömning: $\psi = Uy = Ur \sin \theta$, samt $\phi = Ux = Ur \cos \theta$

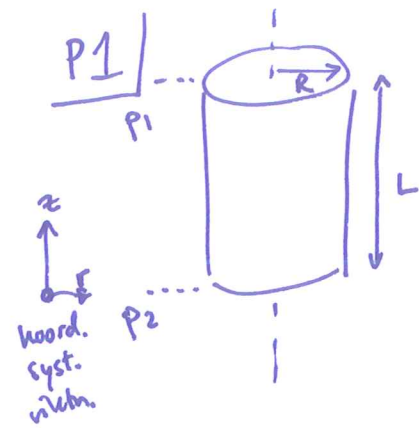
Linjekälla/-sänka: $\psi = m\theta$, samt $\phi = m \ln r$

Linjevirlar: $\psi = -K \ln r$, samt $\phi = K\theta$

Dubblätt: $\psi = -\lambda \sin \theta / r$, samt $\phi = \lambda \cos \theta / r$

Tentamen Strömningsmekanik TME055 2015-08-19

- T1.**
- a) Föreläsning 1 / White kap. 1.5
 - b) Föreläsning 5 / White kap. 1.9 & 4.8
 - c) Föreläsning 7 / White kap. 4.10
- T2.**
- a) Föreläsning 11 / Davidson kap. 1.1
 - b) Föreläsning 11 / Davidson kap. 1.1
 - c) Föreläsning 3 / White kap. 3.5
- T3.**
- a) Föreläsning 8 / White kap. 5.4
 - b) Föreläsning 12 / White kap. 7.5



Vi är intresserade av en kraftbalans $\rightarrow$ ställ upp en kontrollvolymanalys

Fluiden i röret är kontrollvolymen

$$\sum F = \frac{d}{dt} \left(\int_{CV} \rho \mathbf{v} dV \right) + \int_{CS} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA$$

$\xrightarrow{\text{antag stationärt}} \quad \xrightarrow{\text{antag fullt utvecklade laminär strömning, } R \text{ konstant} \rightarrow \text{nettoförändring} = 0}$

dvs $\sum F = 0$

Vilka krafter ingår i $\sum F$?

- * Tryckkrafter
- * Tyngdkrafter
- * Friktionskrafter

$$\sum F_z = \pi R^2 p_2 - \pi R^2 p_1 - \pi R^2 L \rho g + 2\pi R L \tau_w = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\pi R L \tau_w = \pi R^2 (p_1 - p_2) + \pi R^2 L \rho g$$

dessas bidrag är initialt olika stora enligt uppgiftstexten, i förhållande 2:1

$$\Leftrightarrow \tau_w = \mu \left. \frac{dv}{dr} \right|_{r=R} \Rightarrow \left. \frac{dv}{dr} \right|_{r=R} = \frac{R}{2L\mu} ([p_1 - p_2] + L \rho g)$$

Den här situation ska jämföras med den då $g \rightarrow \frac{1}{6}g$

För detta fall:

$$\left. \frac{dv}{dr} \right|_{r=R} = \frac{R}{2L\mu} ([p_1 - p_2] + \frac{1}{6} L \rho g)$$

dvs förändringen ges av:

$$\frac{\frac{dv}{dr} \Big|_{r=R, "g \rightarrow \frac{1}{6}g"}}{\frac{dv}{dr} \Big|_{r=R}} = \frac{\frac{R}{24\mu} (\Delta p + \frac{1}{6}Lsg)}{\frac{R}{24\mu} (\Delta p + Lsg)} = \frac{\Delta p + \frac{1}{6}Lsg}{\Delta p + Lsg}$$

Dessutom visste vi att $\pi R^2 \Delta p = 2\pi R^2 Lsg$
 $\Leftrightarrow \Delta p = 2Lsg$

dvs

$$\frac{\frac{dv}{dr} \Big|_{r=R, "g \rightarrow \frac{1}{6}g"}}{\frac{dv}{dr} \Big|_{r=R}} = \frac{2Lsg + \frac{1}{6}Lsg}{2Lsg + Lsg} = \frac{\frac{13}{6}Lsg}{3Lsg} = \frac{13}{18}$$

Svar: P_0 minnen blir hastighetsgradienten
bara ca ~~72%~~ av den på jorden
72%

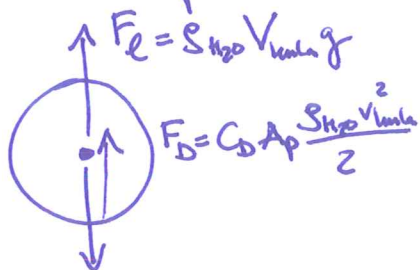
P2 | En blykula är ett system med fix, identifierbar massa $\Rightarrow$
a) Newtons andra lag kan tillämpas direkt:

$$m_{\text{kula}} \frac{dv_{\text{kula}}}{dt} = \sum F$$

Denna differentialekvation ger hur kulans hastighet förändras pga nettokraften på kulan. Då kulan faller 200 m behöver den kopplas till den differentialekvation som relaterar hastighet till position, dvs:

$$\frac{dx_{\text{kula}}}{dt} = v_{\text{kula}}$$

Nu återstår endast att specificera $\sum F$. Vilka krafter verkar på kulan?



* Gravitationsaccelerationen

* Lyftkraften från vattnet

* Formmotståndskraften pga rörelsen i vattnet

$$\sum F = F_g - F_L - F_D$$

(hastigheten är positiv nedåt)

$$F_g = m_{\text{kula}} g$$

Sätt ihop:

$$\begin{cases} m_{\text{kula}} \frac{dv_{\text{kula}}}{dt} = m_{\text{kula}} g - \frac{4\pi r_{\text{kula}}^3}{3} S_{H_2O} g - \frac{\pi r_{\text{kula}}^2 C_D S_{H_2O} v_{\text{kula}}^2}{2} \\ \frac{dx_{\text{kula}}}{dt} = v_{\text{kula}} \end{cases} \quad \left(m_{\text{kula}} = \frac{4\pi r_{\text{kula}}^3}{3} S_{\text{bly}} \right)$$

b)

$$C_D = 0,5$$

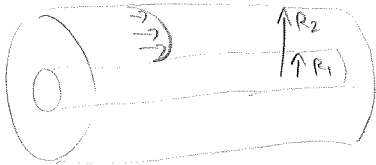
$$\frac{dV_{\text{bubla}}}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad \text{Antag } V_{\text{bubla}} \approx \frac{200\text{m}}{60\text{s}} \approx 3,33 \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow \frac{4\pi r_{\text{bubla}}^3}{3} \rho_{\text{bly}} g - \frac{4\pi r_{\text{bubla}}^3}{3} \rho_{\text{H}_2\text{O}} g - \frac{\pi r_{\text{bubla}}^2 C_D \rho_{\text{H}_2\text{O}} V_{\text{bubla}}^2}{2} = 0$$

Allt är givet i uppgiften $\rightarrow$ Lös ut $r_{\text{bubla}} \approx 0,0205 \text{ m}$

Svar: Diametern är ca 4 cm.

P3



$$R_2 = 7 \text{ mm}$$

$$R_1 = 5 \text{ mm}$$

$$\frac{dp}{dz} = -30 \text{ Pa/m}$$

Antag.

Laminar

Inkompressibel

Stationär

Füllt unendlich dünnwandig

Axialsymmetrie

Horizontales Rohr

$$\Rightarrow v = v_z(r)$$

N-S:

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = \nu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz}$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{dz} = \mu \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{dv_z}{dr} \right) \quad \text{Integriere} \Rightarrow r \left(\frac{dv_z}{dr} \right) = \frac{dp}{dz} \frac{r^2}{2\mu} + C_1$$

$$\Rightarrow \frac{dv_z}{dr} = \frac{dp}{dz} \frac{r}{2\mu} + \frac{C_1}{r} \quad \text{Integriere} \Rightarrow v_z = \frac{dp}{dz} \frac{r^2}{4\mu} + C_1 \ln r + C_2$$

Randkond.

$$v_z(r=R_1) = 0 \rightarrow 0 = \frac{dp}{dz} \frac{R_1^2}{4\mu} + C_1 \ln R_1 + C_2$$

$$v_z(r=R_2) = 0 \rightarrow 0 = \frac{dp}{dz} \frac{R_2^2}{4\mu} + C_1 \ln R_2 + C_2$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{dz} \frac{R_1^2}{4\mu} + C_1 \ln R_1 = \frac{dp}{dz} \frac{R_2^2}{4\mu} + C_1 \ln R_2$$

$$\Leftrightarrow C_1 \ln \frac{R_2}{R_1} = \frac{dp}{dz} \frac{1}{4\mu} (R_1^2 - R_2^2) \Leftrightarrow C_1 = \frac{(R_1^2 - R_2^2)}{4\mu \ln \frac{R_2}{R_1}} \frac{dp}{dz}$$

$$\Leftrightarrow C_2 = -\frac{dp}{dz} \frac{R_1^2}{4\mu} - \frac{(R_1^2 - R_2^2)}{4\mu \ln \frac{R_2}{R_1}} \frac{dp}{dz} \ln R_1$$

$$\Rightarrow v_z = \frac{dp}{dz} \left[\frac{(r^2 - R_1^2)}{4\mu} + \frac{(R_1^2 - R_2^2)}{4\mu \ln R_2/R_1} \ln \frac{r}{R_1} \right]$$

$$F = A \tau_{rz} = 2\pi R_1 L \mu \left. \frac{dv_z}{dr} \right|_{r=R_1} \Leftrightarrow \frac{F}{L} = 2\pi R_1 \mu \left. \frac{dv_z}{dr} \right|_{r=R_1}$$

$$\Rightarrow \frac{F}{L} = \pi R_1^2 \frac{dp}{dz} + \frac{\pi(R_1^2 - R_2^2)}{2 \ln R_2/R_1} \frac{dp}{dz} = \underline{\underline{1 \text{ mN/m}}}$$