CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Tillämpad mekanik
412 96 Göteborg

TME055 Strömningsmekanik 2015-04-14

Tentamen tisdagen den 14 april 2015 kl 08:30-12:30

Ansvarig lärare: Henrik Ström

Ansvarig lärare (eller någon som företräder honom) besöker salen vid två tillfällen under pågående examination för att svara på eventuella frågor. Under hela tentamen kan han nås på telefon 070 40 25 119.

Maximal poängsumma är 50. För godkänt krävs 20 poäng, för betyg 4 krävs 30 poäng och för betyg 5 krävs 40 poäng.

Tillåtna hjälpmedel: Miniräknare samt matematisk handbok (t ex BETA och Physics Handbook).

Lösningar anslås på kurshemsidan i PingPong den 15 april. Även information om möjligheter till tentamensgranskning annonseras på kurshemsidan.

OBS! Notera att uppgifterna inte är ordnade efter svårighetsgrad.

T1.

a) Vad är kontinuumhypotesen? Varför upphör den att gälla om geometrin som begränsar strömningen är tillräckligt liten? (3 p)

b) Skissera hur ett tvådimensionellt fluidelement deformeras då det föreligger en hastighetsgradient i systemet. Utgå från att skjuvspänningen är proportionell mot deformationshastigheten och visa hur spänningen beror av hastighetsgradienten! (3 p)

c) Ett experiment utförs där en vätska strömmar med konstant volymsflöde i ett rör. Genom att påverka vätskans sammansättning kan viskositeten förändras i experimentet, samtidigt som tryckfallet över en sektion av röret registreras. Vid experimentets start avläses ett visst tryckfall för den initiala viskositeten. När viskositeten sedan sänks noterar man att tryckfallet blir lägre. En ytterligare sänkning av viskositeten resulterar dock i att tryckfallet åter stiger. Vilken är den bakomliggande orsaken till dessa observationer? (2 p)

d) Skriv ned en differentiell rörelsemängdsbalans för en Newtonsk fluid. Vilka typer av krafter representerar de ingående termerna? (2 p)

T2.

a) Beskriv och förklara skillnaden mellan en fullt utvecklad laminär hastighetsprofil mellan två plana plattor med en fullt utvecklad turbulent hastighetsprofil i samma geometri. Varför är de olika? (3 p)

b) Rita ett turbulent energispektrum för fullt utvecklad turbulent strömning vid högt Reynoldstal. Visa hur detta spektrum kan delas in i tre regioner och ange vilka egenskaper som utmärker de turbulenta virvlarna i respektive region. Vad kallas de minsta skalorna och vilka variabler behövs för att bestämma dem? (4 p)

c) I härledningen av Bernoullis ekvation görs ett antagande om stationär strömning. Trots att turbulent strömning till sin karaktär alltid är tidsberoende går det bra att tillämpa Bernoullis ekvation oberoende av strömningsregim (turbulent eller laminärt). Hur kommer detta sig? (1 p)

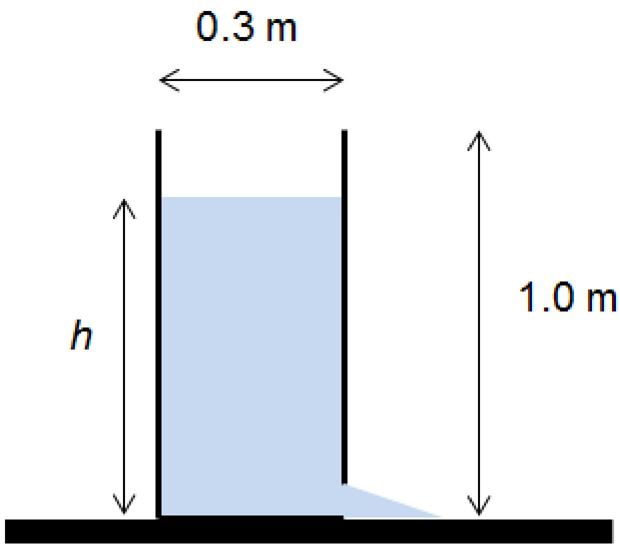
T3.

a) Skriv om Navier-Stokes ekvationer på dimensionslös form. Vad är den fysikaliska tolkningen av den dimensionslösa grupp som dyker upp och vad kallas den? På vilket sätt är det möjligt för andra dimensionslösa tal att spela roll för hur strömningen ser ut? (5 p)

b) Vad innebär det att ett gränsskikt separerar från en yta? Varför är en positiv tryckgradient ett krav för att detta ska ske? Motivera ditt svar matematiskt (utgå t ex från gränsskiktsekvationerna) och illustrera även grafiskt vad som händer med hastighetsprofilen när den kritiska ogynnsamma tryckgradienten överskrids och separation inträffar. (6 p)

P1.

Vatten av känd densitet (1000 kg/m^3) rinner ut från en tank utan lock med diametern 0.3 m och höjden 1.0 m enligt figuren nedan. Strålens diameter är 10 cm. Kan hastigheten i strålen bli så stor att tanken flyttar sig? Bestäm i så fall det minsta värdet av vätskehöjden h för att så ska ske! Tanken är tillverkad av stål (ρ = 8000 kg/m^3) av 3 mm tjocklek. Friktionskraften mellan tank och golv kan beräknas enligt $F = \eta \cdot M \cdot g$, där η = 0.15 är friktionskoefficienten, M är tankens totala massa och g är gravitationsaccelerationen. (7 p)



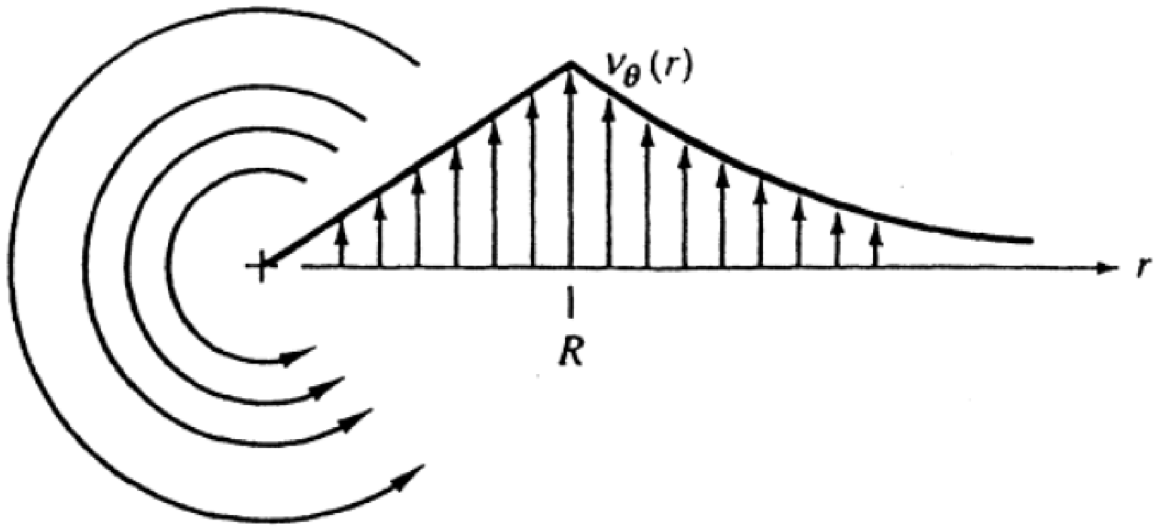
P2.

Ett sätt att beskriva en tornado i cylindriska koordinater är som ett cirkulerande flöde enligt nedanstående:

$$v_r = 0$$

$$v_z = 0$$

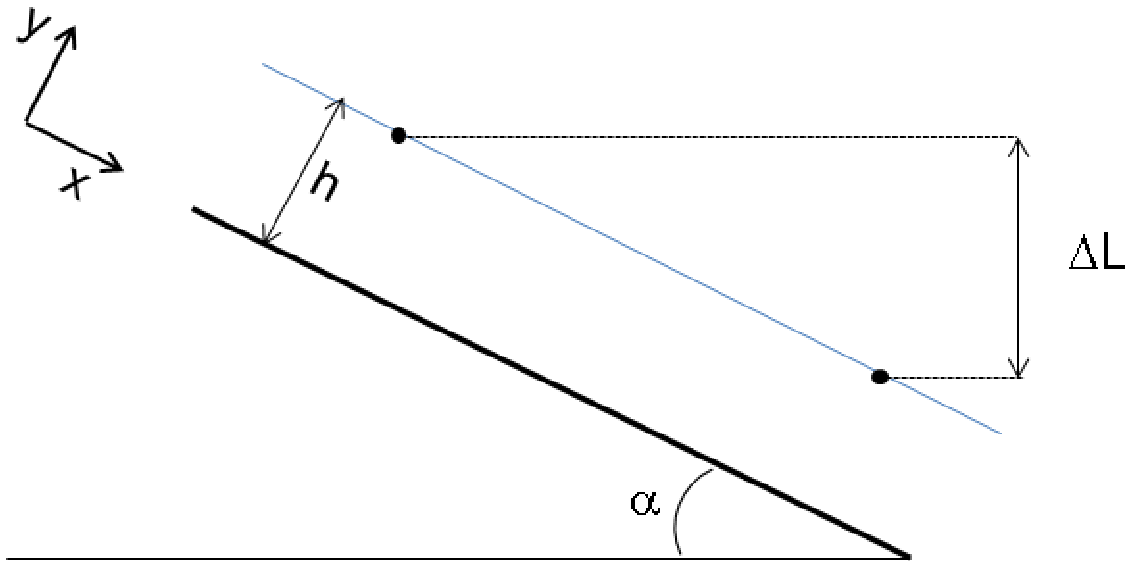
$$v_\theta = \begin{cases} \omega r, & r \leq R \\ \dfrac{\omega R^2}{r}, & r > R \end{cases}$$



I denna formulering betecknar ω rotationshastigheten. Om trycket är p_∞ vid $r \to \infty$, vad är då det lägsta trycket och var finner man detta? (7 p)

P3.

En vätska strömmar nedför ett sluttande plan på ett sådant sätt att strömningen hela tiden förblir laminär. Fluiden är Newtonsk. Härled ett uttryck för den tid det tar för ett fluidelement precis i gränsytan (dvs i $y = h$) att förflytta sig ett avstånd ΔL i höjdled (se figur). (7 p)



Formelsamling

<u>Mekaniklagar</u>

$$\frac{dm_{syst}}{dt} = 0$$

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{V})$$

$$\boldsymbol{M} = \frac{d\boldsymbol{H}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum(\boldsymbol{r} \times \mathbf{V})\delta m\right)$$

$$\frac{dQ}{dt} - \frac{dW}{dt} = \frac{dE}{dt}$$

<u>Reynolds transportteorem</u>

$$\frac{dB_{syst}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\int_{CV} \beta\rho d\mathcal{V}\right) + \int_{CS} \beta\rho(\mathbf{V}\cdot\mathbf{n})\, dA$$

<u>Differentiella samband på vektorform</u>

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\, \nabla\cdot\mathbf{V} = 0$$

$$\rho\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla p + \nabla\cdot\boldsymbol{\tau} + \rho\mathbf{g}$$

$$\rho\frac{D\hat{u}}{Dt} + p(\nabla\cdot\mathbf{V}) = \nabla\cdot[k\nabla T] + \Phi$$

<u>Kontinuitetsekvationen och Navier-Stokes ekvationer i cylindriska koordinater</u>

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(v_z) = 0$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial}{\partial r}(v_r) + \frac{1}{r}v_\theta\frac{\partial}{\partial\theta}(v_r) + v_z\frac{\partial}{\partial z}(v_r) - \frac{1}{r}{v_\theta}^2 =$$
$$= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + g_r + \frac{\mu}{\rho}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_r}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}\right]$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r\frac{\partial}{\partial r}(v_\theta) + \frac{1}{r}v_\theta\frac{\partial}{\partial\theta}(v_\theta) + v_z\frac{\partial}{\partial z}(v_\theta) + \frac{1}{r}v_r v_\theta = -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial\theta} + g_\theta +$$
$$\frac{\mu}{\rho}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right]$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r\frac{\partial}{\partial r}(v_z) + \frac{1}{r}v_\theta\frac{\partial}{\partial\theta}(v_z) + v_z\frac{\partial}{\partial z}(v_z)$$
$$= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + g_z + \frac{\mu}{\rho}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right]$$

Buckinghams π-teorem

$$i = n - r$$

Friction head enligt Weisbach

$$h_f = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g}$$

Engångsförluster

$$h_m = K\frac{V^2}{2g}$$

Darcys friktionsfaktor

Laminär strömning

$$f = \frac{64}{Re_D}$$

Turbulent strömning

$$\frac{1}{\sqrt{f/4}} = 4.0\log_{10}\left\{Re_D\sqrt{f/4}\right\} - 0.4 \text{ för } \varepsilon/D = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{f/4}} = 4.0\log_{10}\frac{D}{\varepsilon} - 0.4 \text{ för } \varepsilon/D \neq 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{f/4}} = 4\log_{10}\frac{D}{\varepsilon} + 2.28 - 4\log_{10}\left\{4.67\frac{D/\varepsilon}{Re_D\sqrt{f/4}} + 1\right\} \text{ för } \frac{D/\varepsilon}{Re_D\sqrt{f/4}} > 0.01$$

Formmotstånd, lyftkraft och väggfriktionskoefficient

$$F_D = C_D A_p \frac{\rho V^2}{2}$$

$$F_L = C_L A_p \frac{\rho V^2}{2}$$

$$\tau_w = C_f \frac{\rho V^2}{2}$$

Elementära planströmningar

Uniform strömning: $\psi = Uy = Ur\sin\theta$, samt $\phi = Ux = Ur\cos\theta$

Linjekälla/-sänka: $\psi = m\theta$, samt $\phi = m\ln r$

Linjevirvel: $\psi = -K\ln r$, samt $\phi = K\theta$

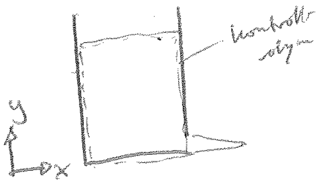
Dubblett: $\psi = -\lambda\sin\theta/r$, samt $\phi = \lambda\cos\theta/r$

Tentamen Strömningsmekanik TME055 2015-04-14

T1.	a)	Föreläsning 1 / White kap. 1.5
	b)	Föreläsning 1 / White kap. 1.9
	c)	Föreläsning 9 / White kap. 6.1
	d)	Föreläsning 5 / White kap. 4.3
T2.	a)	Föreläsning 9 / White kap. 6.2 & 6.6
	b)	Föreläsning 11 / Davidson kap. 1.1
	c)	Föreläsning 3 / White kap. 3.5
T3.	a)	Föreläsning 8 / White kap. 5.4
	b)	Föreläsning 12 / White kap. 7.5

P1 Vad krävs för att tanken ska flytta sig?

Vi behöver bestämma detta ur en kraftbalans. Låt oss fokusera på det ögonblick då tanken precis flyttar sig. Rörelsemängdsbalans för vår kontrollvolym ger då:



$$\frac{d}{dt}\iiint \rho \mathbf{v}\, dV + \iint \rho \mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\, dA = \sum \mathbf{F}$$

Studera x-ledet:

$$\frac{d}{dt}\iiint \rho \cancelto{0}{v_x}\, dV + \iint \rho v_x (\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\, dA = \sum F_x = \cancelto{0}{F_{gravitation}} + \cancelto{0}{F_{tryck}} + \cancelto{0}{F_{friktion}} + F_{övrigt}$$

antag stationärt (litet hål → vätskenivån sjunker långsamt → quasi-steady-state)

verkar ej i x-led

atmosfärstryck runt hela KV

inga stora viskösa effekter om 1D utflöde

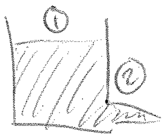
detta är friktionskraften från golvet

dvs vi erhåller

$$\rho v_{ut}^2 A_{hål} = \eta M g \qquad \text{där } M = \pi (d/2)^2 h \rho_{H_2O} + (\pi (d/2)^2 + \pi d H)\cdot t \cdot \rho_{stål}$$

Vi behöver hastigheten ut också (allt annat utom h känt):

Bernoullis ekvation



$$p_2 - p_1 + \frac{1}{2}\rho (v_2^2 - v_1^2) + \rho g (z_2 - z_1) = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} p_2 = p_1 = p_{atm} \\ v_1 \approx 0 \\ z_2 - z_1 = -h \end{array}\right\} \rightarrow \frac{1}{2}\rho v_2^2 - \rho g h = 0 \iff v_{ut}^2 = 2gh$$

Insättning ger $h = 0{,}71$ m

<u>Svar:</u> Ja, tanken flyttar sig om $h > 0{,}71$ m $(< H)$

P2 Vi söker $p(r)$ och vi känner hastighetsfältet.
Sambandet som relaterar dessa fält är den differentiella rörelsemängdsbalansen i r-led:

$$\cancelto{=0}{\frac{\partial v_r}{\partial t}} + v_r \cancelto{=0}{\frac{\partial v_r}{\partial r}} + \frac{1}{r} v_\theta \cancelto{=0}{\frac{\partial v_r}{\partial \theta}} + v_z \cancelto{=0}{\frac{\partial v_r}{\partial z}} - \frac{1}{r} v_\theta^2 =$$

$$= -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dr} + \cancelto{=0}{g_r} + \frac{\mu}{\rho}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \cancelto{=0}{\frac{\partial v_r}{\partial r}}\right) + \frac{1}{r^2}\cancelto{=0}{\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2}} + \cancelto{=0}{\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}} - \cancelto{=0}{\frac{v_r}{r^2}} - \frac{2}{r^2}\cancelto{=0}{\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}}\right]$$

* $v_r = 0$
* $v_\theta = f(r)$
* g verkar ej i r-led

$$\Rightarrow \quad \frac{dp}{dr} = \frac{\rho v_\theta^2}{r}$$

För den inre regionen: $p(r) = \int \frac{\rho}{r}\omega^2 r^2\,dr = \rho\omega^2 \int r\,dr = \rho\omega^2 r^2/2 + C_1$

För den yttre regionen: $p(r) = \int \frac{\rho}{r}\frac{\omega^2 R^4}{r^2}\,dr = \rho\omega^2 R^4 \int \frac{dr}{r^3} = -\rho\omega^2 R^4/2r^2 + C_2$

Vi vet att $p(r \to \infty) = p_\infty \Rightarrow C_2 = p_\infty$

Vi vet att de två uttrycken måste matcha i $r = R \Rightarrow$

$$\rho\omega^2 R^2/2 + C_1 = -\rho\omega^2 R^2/2 + p_\infty$$

$$\Leftrightarrow \quad C_1 = p_\infty - \rho\omega^2 R^2$$

Vi söker lägsta trycket. Trycket minskar från $r \to \infty$ in mot $r = R$ i den yttre regionen $\Rightarrow$ undersök inre regionen.

$$p(r) = p_\infty - \rho\omega^2 R^2 + \rho\omega^2 r^2/2 = p_\infty + \rho\omega^2 \underbrace{\left(\frac{r^2}{2} - R^2\right)}$$

denna term är hela tiden negativ i intervallet $0 \leq r \leq R$

Svar: Lägsta trycket återfinns alltså i $\underline{\underline{r = 0}}$,

och det är $\underline{\underline{p_{min} = p_\infty - \rho\omega^2 R^2}}$

P3 Laminär strömning för Newtonsk fluid i relativt enkel geometri $\Rightarrow$ utgå från N-S och förenkla

$$\rho\left(\cancel{\frac{\partial u}{\partial t}}^{=0} + u\cancel{\frac{\partial u}{\partial x}}^{=0} + v\cancel{\frac{\partial u}{\partial y}}^{=0} + w\cancel{\frac{\partial u}{\partial z}}^{=0}\right) = -\cancel{\frac{\partial p}{\partial x}}^{=0} + \rho g_x + \mu\left(\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}^{=0} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}^{=0}\right)$$

antag: stationärt; fullt utvecklad strömning; $v = w = 0$; trycket måste vara atmosfärstryck längs hela gränsytan och således konstant i x-led; fullt utvecklad strömning; bred platta utan ändeffekter

dvs vi har $\rho g_x + \mu \frac{d^2u}{dy^2} = 0$ där $g_x = g\sin\alpha$

Randvillkor: $u(y=0) = 0$ (no-slip vid plattan)

$\mu \frac{du}{dy}\Big|_{y=h} = 0$ (free-slip vid gränsytan)

Integrera: $$\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{-\rho g\sin\alpha}{\mu}$$

$$\frac{du}{dy} = -\frac{\rho g\sin\alpha}{\mu}y + C_1$$

$$u(y) = -\frac{\rho g\sin\alpha}{2\mu}y^2 + C_1 y + C_2$$

R.V.1 $\Rightarrow$ $C_2 = 0$

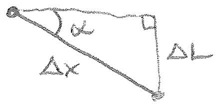
R.V.2 $\Rightarrow$ $C_1 = \frac{\rho g\sin\alpha}{\mu}h$

$$\Rightarrow u(y) = \frac{\rho g\sin\alpha}{2\mu}y(2h-y)$$

Ett fluidelement precis i gränsytan rör sig således med hastigheten

$$u(y=h) = \frac{\rho g\sin\alpha}{2\mu}h^2$$

Hur lång förflyttning motsvarar ΔL?



$$\sin\alpha = \frac{\Delta L}{\Delta x}$$

Fluidelementets position beskrivs av $\frac{dx}{dt} = u \Rightarrow x = ut + x_0$

$$\Leftrightarrow \Delta x = ut \Leftrightarrow t = \frac{\Delta x}{u}$$

$$\Rightarrow t = \frac{\Delta L / \sin\alpha}{\rho g \sin\alpha\, h^2/2\mu} = \frac{2\mu \Delta L}{\rho g h^2 \sin^2\alpha}$$

Svar: