



CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Tillämpad mekanik
412 96 Göteborg

TME055 Strömningsmekanik

2015-01-16

Tentamen fredagen den 16 januari 2015 kl 14:00-18:00

Ansvarig lärare: Henrik Ström

Ansvarig lärare besöker salen vid två tillfällen under pågående examination för att svara på eventuella frågor. Under hela tentamen kan han nås på telefon 070 40 25 119.

Maximal poängsumma är 50. För godkänt krävs 20 poäng, för betyg 4 krävs 30 poäng och för betyg 5 krävs 40 poäng.

Tillåtna hjälpmedel: Miniräknare samt matematisk handbok (t ex BETA och Physics Handbook).

Lösningar anslås på kurshemsidan i PingPong den 19 januari.

OBS! Notera att uppgifterna inte är ordnade efter svårighetsgrad. Notera även att formelsamlingen som medföljer tentatesen är utökad jämfört med tidigare år.

T1.

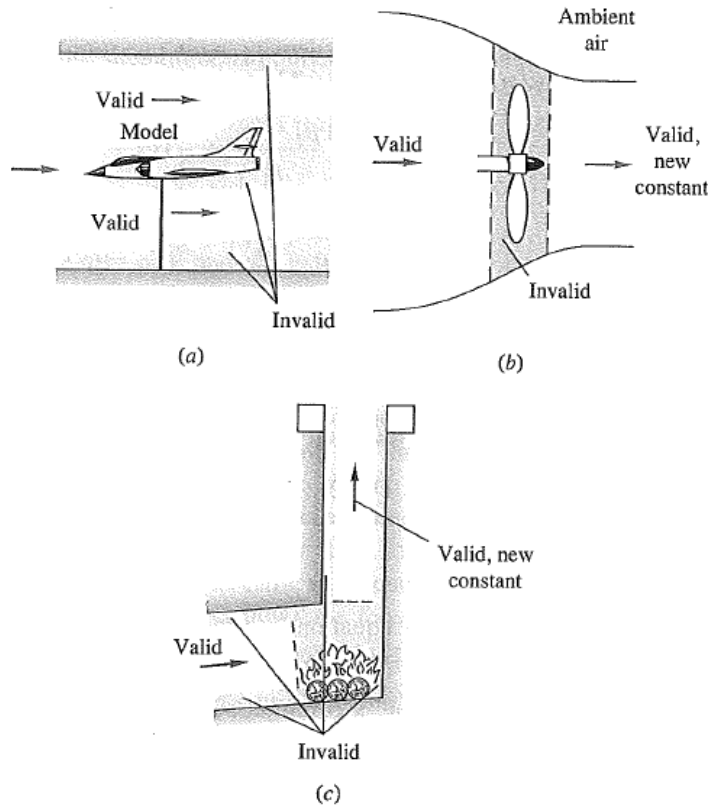
- a) Vad är kontinuumhypotesen? Ange hur fluidegenskapen densitet kan definieras som ett fält med hjälp av kontinuumhypotesen! (3 p)
- b) Förklara skillnaden mellan Eulerskt och Lagrangeskt betraktelsesätt. Vad är den matematiska relationen mellan de två? (3 p)
- c) Varför är det inte möjligt för friktionsfri strömning att uppfylla no-slip randvillkoret? (1 p)
- d) Vad innebär det att två system är dynamiskt lika? Vad krävs för dynamisk likhet mellan två system med turbulent, inkompressibel gasströmning? (3 p)

T2.

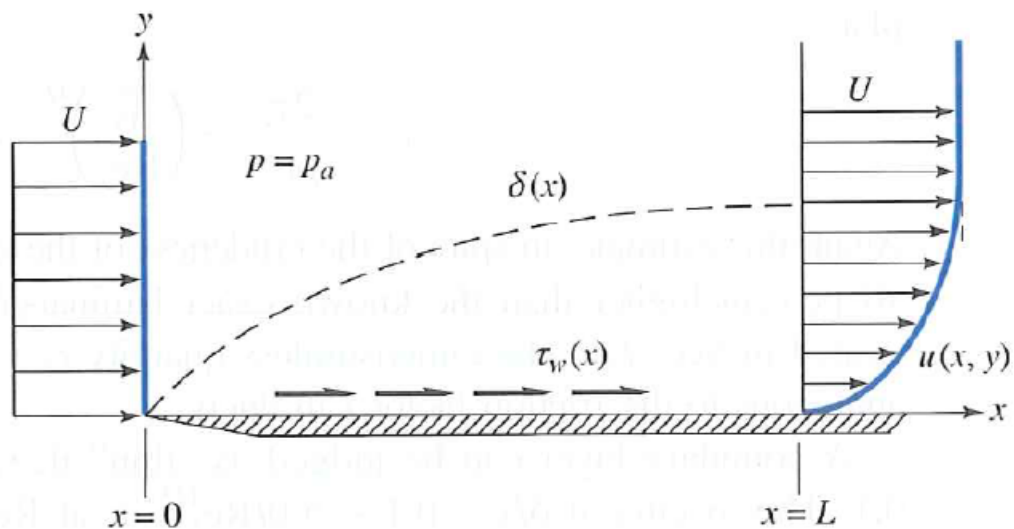
- a) Man brukar säga att det inte finns någon strikt definition av turbulens, utan att turbulens har ett antal karaktäristiska egenskaper. Ange och förklara kort innebörden av dessa egenskaper! (4 p)
- b) Utgå från en rörelsemängdsbalans i x -led från Navier-Stokes ekvationer (uttryckt för ett kartesiskt koordinatsystem). Inför Reynoldsdekomponering av de okända variablerna och härled den Reynoldsmedelvärderade rörelsemängdsbalansen (RANS) i x -led. Vilka är de nya termerna som dyker upp? Vad kallas de? (5 p)

T3.

- a) Figuren nedan illustrerar situationer där Bernoullis ekvation av olika anledningar inte kan användas (i regionerna markerade "Invalid"). Förklara varför Bernoullis ekvation inte kan användas i dessa regioner. (4 p)

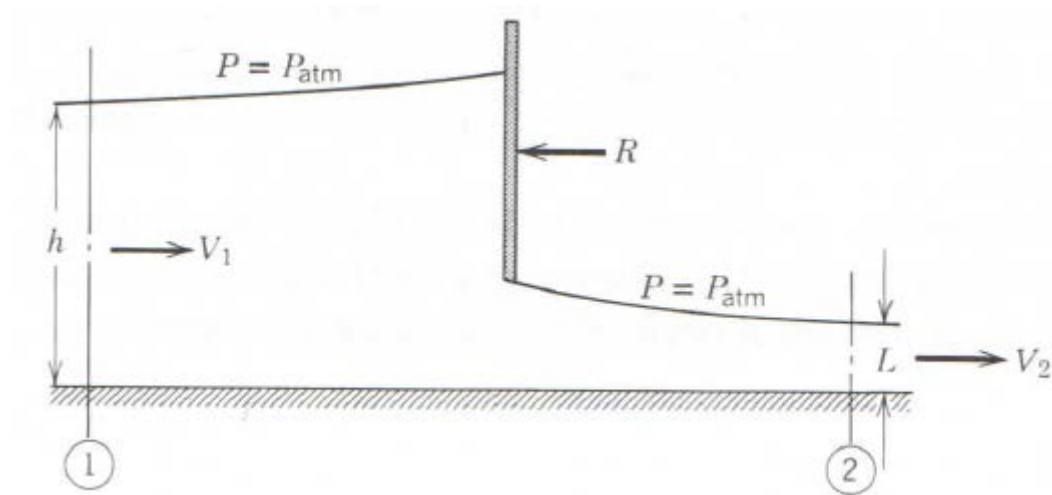


- b) Betrakta utvecklingen av ett laminärt gränsskikt såsom illustrerat i figuren nedan. Använd kontrollvolymstekniken för att ta fram ett uttryck för hur den dimensionslösa gränsskiktstjockleken, δ/x , varierar med Reynolds tal baserat på x -position ($Re_x = Ux/\nu$). Motivera varje införd förenkling/approximation. (6 p)



P1.

Vatten av känd densitet (1000 kg/m^3) strömmar genom en dammlucka såsom illustrerat i figuren nedan. Strömningen uppströms och nedströms är i princip uniform och parallell med botten, så att tryckvariationen vid 1 och 2 kan antas vara samma som i en stillastående vätska. Bestäm den kraft per enhetslängd R (se figur) som krävs för att hålla dammluckan på plats. Effekten av skjuvkrafter får försummas. (7 p)



Användbara data:

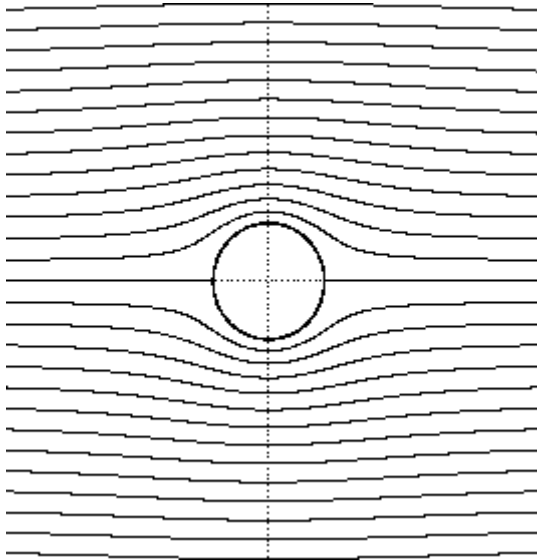
$$h = 2.5 \text{ m}$$

$$L = 1 \text{ m}$$

$$V_1 = 2 \text{ m/s}$$

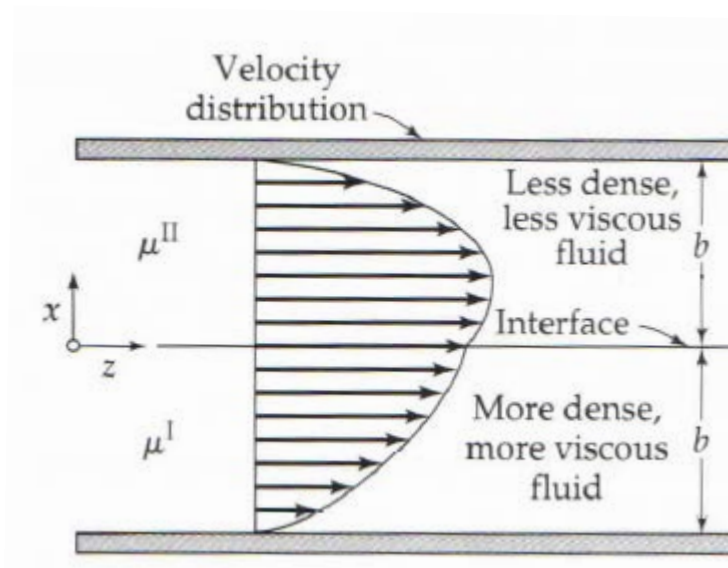
P2.

En bropelare kan liknas vid en mycket lång cylinder. Inför en ombyggnation vill man uppskatta tryckfördelningen runt en existerande bropelare med diametern 1 m. Fluiden som strömmar runt pelaren är vatten ($\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, $\mu = 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$), den ankommande uniforma hastigheten långt uppströms är 5 m/s och trycket är där 100 kPa. Uppskatta det högsta och lägsta trycken på bropelarens yta, samt ange var man finner dessa tryck! Försumma inverkan av friktion och gränsskikt. (7 p)



P3.

Två oblandbara, inkompressibla vätskor strömmar i z -riktning mellan två (mycket stora) horisontella plattor, drivna av en känd tryckgradient. Flödeshastigheterna är justerade så att utrymmet mellan plattorna är precis till hälften fyllt med fluid I (den tätare fluiden) och till resterande hälft fyllt med fluid II (den mindre täta fluiden). Strömningen är tillräckligt laminär och långsam så att inga störningar uppstår; med andra ord förblir gränssytan mellan de två vätskorna hela tiden helt plan. Båda fluiderna är Newtonska men har olika viskositet (μ_I respektive μ_{II}). Härled hur hastigheten i z -riktningen varierar med positionen x (se figur) över hela höjden mellan plattorna (dvs från $x = -b$ till $x = +b$). (7 p)



Formelsamling

Mekaniklagar

$$\frac{dm_{syst}}{dt} = 0$$

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{V})$$

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{H}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum (\mathbf{r} \times \mathbf{V}) \delta m \right)$$

$$\frac{dQ}{dt} - \frac{dW}{dt} = \frac{dE}{dt}$$

Reynolds transportteorem

$$\frac{dB_{syst}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\int_{CV} \beta \rho dV \right) + \int_{CS} \beta \rho (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dA$$

Differentiella samband på vektorform

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} = 0$$

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{g}$$

$$\rho \frac{D\hat{u}}{Dt} + p(\nabla \cdot \mathbf{V}) = \nabla \cdot [k\nabla T] + \Phi$$

Kontinuitetsekvationen och Navier-Stokes ekvationer i cylindriska koordinater

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (v_z) = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r} (v_r) + \frac{1}{r} v_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} (v_r) + v_z \frac{\partial}{\partial z} (v_r) - \frac{1}{r} v_\theta^2 = \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + g_r + \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r} (v_\theta) + \frac{1}{r} v_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta) + v_z \frac{\partial}{\partial z} (v_\theta) + \frac{1}{r} v_r v_\theta = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + g_\theta + \\ + \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r} (v_z) + \frac{1}{r} v_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} (v_z) + v_z \frac{\partial}{\partial z} (v_z) \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g_z + \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] \end{aligned}$$

Buckingham's π -theorem

$$i = n - r$$

Friction head enligt Weisbach

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g}$$

Engångsförluster

$$h_m = K \frac{V^2}{2g}$$

Darcys friktionsfaktor

Laminär strömning

$$f = \frac{64}{Re_D}$$

Turbulent strömning

$$\frac{1}{\sqrt{f/4}} = 4.0 \log_{10} \{ Re_D \sqrt{f/4} \} - 0.4 \text{ för } \varepsilon/D = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{f/4}} = 4.0 \log_{10} \frac{D}{\varepsilon} - 0.4 \text{ för } \varepsilon/D \neq 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{f/4}} = 4 \log_{10} \frac{D}{\varepsilon} + 2.28 - 4 \log_{10} \left\{ 4.67 \frac{D/\varepsilon}{Re_D \sqrt{f/4}} + 1 \right\} \text{ för } \frac{D/\varepsilon}{Re_D \sqrt{f/4}} > 0.01$$

Formmotstånd, lyftkraft och väggfriktionskoefficient

$$F_D = C_D A_p \frac{\rho V^2}{2}$$

$$F_L = C_L A_p \frac{\rho V^2}{2}$$

$$\tau_w = C_f \frac{\rho V^2}{2}$$

Elementära planströmningar

Uniform strömning: $\psi = Uy = Ur \sin \theta$, samt $\phi = Ux = Ur \cos \theta$

Linjekälla/-sänka: $\psi = m\theta$, samt $\phi = m \ln r$

Linjevirlar: $\psi = -K \ln r$, samt $\phi = K\theta$

Dubblätt: $\psi = -\lambda \sin \theta / r$, samt $\phi = \lambda \cos \theta / r$

Tentamen Strömningsmekanik TME055 2015-01-16

- T1.**
- a) Föreläsning 1 / White kap. 1.5
 - b) Föreläsning 1 / White kap. 1.7
 - c) Föreläsning 6 / White kap. 4.6
 - d) Föreläsning 8 / White kap. 5.5
- T2.**
- a) Föreläsning 11 / Davidson kap. 1.1
 - b) Föreläsning 11 / White kap. 6.5
- T3.**
- a) Föreläsning 3 / White kap. 3.5
 - b) Föreläsning 12 / White kap. 7.2

P1

Vi söker en kraft i en situation där vi inte enkelt kan ta reda på strömningsmönstret $\rightarrow$ använd kontrollvolymsmekaniken! Rörelsemängdsbalans:

$$\Sigma \mathbf{F} = \iint_{CS} \rho \mathbf{V} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dA + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{CV} \rho \mathbf{V} dV$$

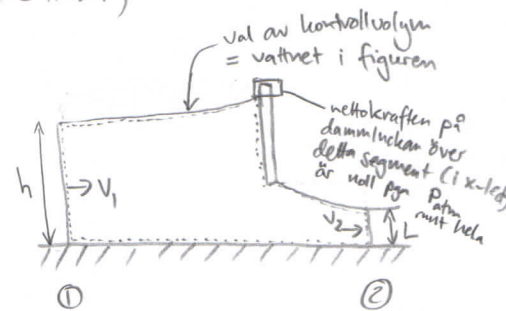
Vi söker en kraft R i x-led, så vi är intresserade av x-komponenten

Antag: inkompressibelt (vatten)
stationärt (finns ingen uppgift om tidsberoende)
gravitationen verkar endast i y-led (vertikalt)

Detta ger ist:

$$\Sigma F_x = \Sigma F_{p,x} + \Sigma F_{\rho, x} + (-F_R)$$

tryckkrafter skjivkrafter för föremållar sikt kraft på fluiden vid dammluckan



$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{CV} \rho \mathbf{V} dV = 0$$

$$\iint_{CS} \rho \mathbf{V} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dA = v_1 \rho (-v_1) h b + v_2 \rho v_2 L b = \rho b (v_2^2 L - v_1^2 h)$$

Kraftbalansen: Subtrahera bort P_{atm} och räkna med övertryck $\Rightarrow$ endast bidrag från ① och ② över h och L

$$\Sigma F_{p,x} = b \int_0^h p_1^o(y) dy - b \int_0^L p_2^o(y) dy$$

$$\text{där } p_1^o(y) = \rho g h (1 - \frac{y}{h})$$

$$\text{och } p_2^o(y) = \rho g L (1 - \frac{y}{L})$$

$$\text{så att } \Sigma F_{p,x} = \rho g h b \left[y - \frac{y^2}{2h} \right]_0^h - \rho g L b \left[y - \frac{y^2}{2L} \right]_0^L =$$

$$= \rho g h b \left(h - \frac{h}{2} \right) - \rho g L b \left(L - \frac{L}{2} \right) = \frac{1}{2} \rho g b (h^2 - L^2)$$

Lös ut F_R :

$$F_R = \frac{1}{2} \rho g b (h^2 - L^2) - \rho b (v_2^2 L - v_1^2 h)$$

Vi söker $R = \frac{F_R}{b} = \frac{1}{2} \rho g (h^2 - L^2) - \rho (v_2^2 L - v_1^2 h)$

Vi har allt utom $v_2 \rightarrow$ använd kontinuitetsrelationen för kontrollvolymen:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{CV} \rho dV + \iint_{CS} \rho (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dA = 0$$

$$\Rightarrow -\rho v_1 h b + \rho v_2 L b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v_2 = v_1 \frac{h}{L}$$

Sätt in:

$$R = \frac{1}{2} \rho g (h^2 - L^2) - \rho v_1^2 h \left(\frac{h}{L} - 1 \right) = \underline{\underline{10,8 \text{ kN/m}}}$$

(riktad som i figuren,
dvs åt vänster)

Vi söker trycket i specifika positioner i ett strömningsmönster där vi får försumma inverkan av friktion och gränsskikt $\rightarrow$ använd potentialteori!

(Dvs antag stationärt, 2D och $\nabla \times \mathbf{V} = 0$)

↙ källa-sänka-par

Strömning runt cylinder = uniform strömning + dubblett

Dvs situationen beskrivs av följande strömfunktion:

$$\psi = U r \sin \theta - \lambda \frac{\sin \theta}{r} (+ \text{konstant})$$



U = ankommande hastighet (5 m/s)

λ = dubblettens styrka

$$\boxed{\begin{aligned} v_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ v_\theta &= -\frac{\partial \psi}{\partial r} \end{aligned}}$$

Skiv ihop: $\psi = U \sin \theta \left(r - \frac{\lambda}{Ur} \right)$

Vi vet att på cylinderns yta gäller $v_r = 0$ dvs $\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0$ då $r = R$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = U \cos \theta \left(r - \frac{\lambda}{Ur} \right) \Rightarrow 0 = U \cos \theta \left(R - \frac{\lambda}{UR} \right)$$

↗ ska gälla $\forall \theta$ dvs $R - \frac{\lambda}{UR} = 0$

$$\Leftrightarrow \lambda = UR^2$$

$$\therefore \psi = U \sin \theta \left(r - \frac{R^2}{r} \right)$$

Vi är intresserade av tryckfördelningen i ett horisontalplan, där Bernoullis ekvation blir då:

$$\begin{cases} v_r = 0 \\ v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \end{cases}$$

$$p_\infty + \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 = p_s + \frac{1}{2} \rho \left(-\frac{\partial \psi}{\partial r} \right)^2 \Big|_{r=R}$$

$$\Leftrightarrow p_\infty + \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 = p_s + \frac{1}{2} \rho \left(U_\infty^2 \sin^2 \theta \left[\frac{R^2}{R^2} - 1 \right] \right) = p_s + \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 \sin^2 \theta (-2)^2 = p_s + 2 \rho U_\infty^2 \sin^2 \theta$$

$$\Leftrightarrow p_s = p_\infty - 2 \rho U_\infty^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 = p_\infty + \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 (1 - 4 \sin^2 \theta)$$

Vi söker högsta & lägsta p_s :

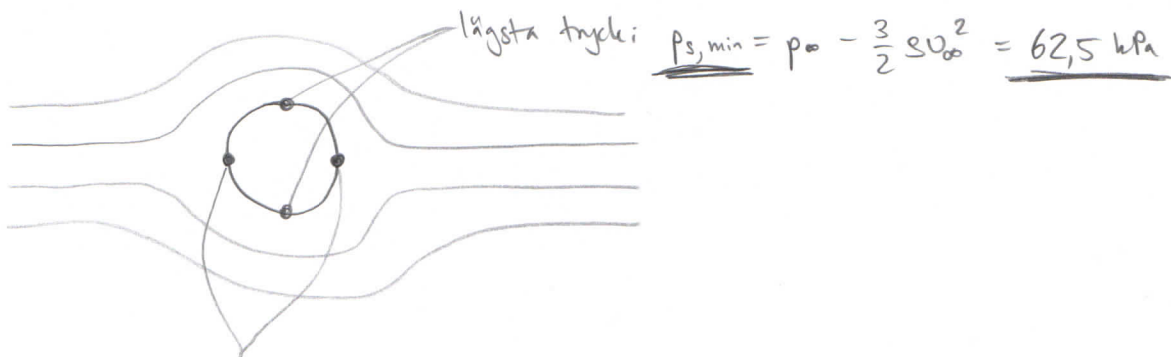
$$\frac{dp_s}{d\theta} = -\frac{4}{2} \rho U_\infty^2 (2 \sin\theta \cos\theta) = -2 \rho U_\infty^2 \sin 2\theta$$

$$\frac{dp_s}{d\theta} = 0 \quad \text{för} \quad \theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, \dots$$

$$\text{För } \theta = 0 \text{ (alt. } \theta = \pi) : p_s = p_\infty + \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 \quad (\text{stagnationspunkten}) \\ = \text{högst tryck}$$

$$\text{För } \theta = \frac{\pi}{2} \text{ (alt. } \theta = \frac{3\pi}{2}) : p_s = p_\infty + \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 (1 - 4) = p_\infty - \frac{3}{2} \rho U_\infty^2$$

lägsta trycket pga högst hastighet



högsta tryck: $\underline{p_{s,\max} = p_\infty + \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 = 112,5 \text{ kPa}}$

Laminär strömning mellan två mycket stora plattor $\rightarrow$ utgår från N-S i z-rikt.

$$\cancel{\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)} = - \cancel{\frac{\partial p}{\partial z}} + \cancel{\rho g_z} + \mu \left(\cancel{\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2}} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \quad \text{①} \quad \text{⑤} \quad \text{④} \quad \text{②} \quad \text{③} \quad \text{④} \quad \text{②}$$

Antag: stationärt ①

fullt utvecklad strömning ②

ingen gravitationsacceleration i z-led ③

mycket stora plattor $\rightarrow$ inga gradienter i y-led ④

$\rightarrow$ inga hastighetskomponenter i x- el. y-led ⑤

Vi erhåller:

$$-\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} = 0 \quad (*)$$

Denna rörelsemängdskalan är giltig från $x = -b$ till $x = b$

Randvillkor: $v_z(x = -b) = v_z(x = b) = 0$ (no slip) ①

$$\mu_I \frac{\partial v_{z,I}}{\partial x} \Big|_{x=0} = \mu_{II} \frac{\partial v_{z,II}}{\partial x} \Big|_{x=0} \quad (\text{gränssyta mellan två fluider}) \quad \text{②}$$

($\tau_{xz,I} = \tau_{xz,II}$)

Integrera upp (*):

$$\text{samtidigt } v_{z,I}(x=0) = v_{z,II}(x=0) \quad \text{③}$$

$$\frac{d^2 v_z}{dx^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz}$$

$$\frac{dv_z}{dx} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz} x + C_1$$

$$v_z(x) = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz} \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

Notera att C_1 och C_2 kan vara olika på de två sidorna av gränssytan pga olika μ

Randvillkor ② ger att: $(x=0) \mu_I C_1 = \mu_{II} C_1 = D$

Randvillkor ① ger att: $\frac{1}{\mu_I} \frac{dp}{dz} \frac{(-b)^2}{2} + C_1(-b) + C_2 = 0$

$$\frac{1}{\mu_{II}} \frac{dp}{dz} \frac{b^2}{2} + C_1 b + C_2 = 0$$

Randvillkor ③ ger att ($x=0$): $C_2^I = C_2^{II}$

dvs att vår C_2 är en
och samma konstant på
bågge sidor

Från R.V. ① igen:

$$\begin{cases} \frac{1}{\mu_I} \frac{dp}{dz} \frac{b^2}{2} - C_1^I b + C_2 = 0 \\ \frac{1}{\mu_{II}} \frac{dp}{dz} \frac{b^2}{2} + C_1^I b + C_2 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{\mu_I} \frac{dp}{dz} \frac{b^2}{2} - \frac{D}{\mu_I} b + C_2 = \frac{1}{\mu_{II}} \frac{dp}{dz} \frac{b^2}{2} + \frac{D}{\mu_{II}} b + C_2$$

$$D b \left(\frac{1}{\mu_{II}} + \frac{1}{\mu_I} \right) = \frac{1}{\mu_I} \frac{dp}{dz} \frac{b^2}{2} - \frac{1}{\mu_{II}} \frac{dp}{dz} \frac{b^2}{2} = \frac{dp}{dz} \frac{b^2}{2} \left(\frac{1}{\mu_I} - \frac{1}{\mu_{II}} \right)$$

$$D = \frac{dp}{dz} \frac{b}{2} \frac{\frac{1}{\mu_I} - \frac{1}{\mu_{II}}}{\frac{1}{\mu_I} + \frac{1}{\mu_{II}}} = \frac{dp}{dz} \frac{b}{2} \frac{\mu_{II} - \mu_I}{\mu_{II} + \mu_I}$$

$$\frac{1}{\mu_I} \frac{dp}{dz} \frac{b^2}{2} - \frac{b}{\mu_I} \left(\frac{dp}{dz} \frac{b}{2} \frac{\mu_{II} - \mu_I}{\mu_{II} + \mu_I} \right) + C_2 = 0$$

$$C_2 = \frac{b}{\mu_I} \frac{dp}{dz} \frac{b}{2} \frac{\mu_{II} - \mu_I}{\mu_{II} + \mu_I} - \frac{1}{\mu_I} \frac{dp}{dz} \frac{b^2}{2} =$$

$$= \frac{dp}{dz} \frac{b^2}{2} \frac{1}{\mu_I} \left(\frac{\mu_{II} - \mu_I}{\mu_{II} + \mu_I} - 1 \right) = -\frac{dp}{dz} \frac{b^2}{2} \frac{1}{\mu_I} \left(\frac{2\mu_I}{\mu_{II} + \mu_I} \right) = -\frac{dp}{dz} \frac{b^2}{\mu_I + \mu_{II}}$$

Sätt ihop:

Svar:
$$\begin{cases} V_{z,I}(x) = \frac{1}{\mu_I} \frac{dp}{dz} \frac{x^2}{2} + \frac{1}{\mu_I} \frac{dp}{dz} \frac{b}{2} x \frac{\mu_{II} - \mu_I}{\mu_{II} + \mu_I} - \frac{dp}{dz} \frac{b^2}{\mu_I + \mu_{II}} = \\ = \frac{1}{\mu_I} \frac{dp}{dz} \frac{b^2}{2} \left[\left(\frac{x}{b} \right) \left(\frac{\mu_{II} - \mu_I}{\mu_{II} + \mu_I} \right) - \frac{2\mu_I}{\mu_{II} + \mu_I} + \left(\frac{x}{b} \right)^2 \right] \\ V_{z,II}(x) = \frac{1}{\mu_{II}} \frac{dp}{dz} \frac{b^2}{2} \left[\left(\frac{x}{b} \right) \left(\frac{\mu_{II} - \mu_I}{\mu_{II} + \mu_I} \right) - \frac{2\mu_{II}}{\mu_{II} + \mu_I} + \left(\frac{x}{b} \right)^2 \right] \end{cases}$$