



CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Tillämpad mekanik
412 96 Göteborg

TME055 Strömningsmekanik

2014-08-19

Tentamen tisdagen den 19 augusti 2014 kl 14:00-18:00

Ansvarig lärare: Henrik Ström

Ansvarig lärare besöker salen vid två tillfällen under pågående examination för att svara på eventuella frågor. Under hela tentamen kan han nås på telefon 070 40 25 119.

Maximal poängsumma är 50. För godkänt krävs 20 poäng, för betyg 4 krävs 30 poäng och för betyg 5 krävs 40 poäng.

Tillåtna hjälpmedel: Miniräknare samt matematisk handbok (t ex BETA och Physics Handbook).

Lösningar anslås på kurshemsidan i PingPong den 20 augusti.

OBS! Notera att uppgifterna inte är ordnade efter svårighetsgrad.

T1.

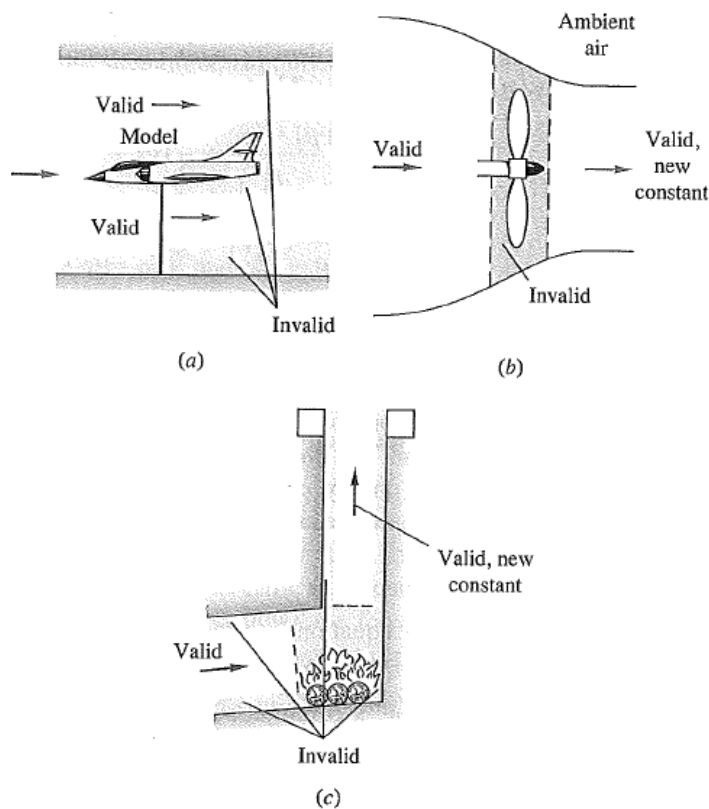
- a) Förklara skillnaden mellan Eulerskt och Lagrangeskt betraktelsesätt. Vad är den matematiska relationen mellan de två? (3 p)
- b) Varför är det inte möjligt för friktionsfri strömning att uppfylla no-slip randvillkoret? (2 p)
- c) Vad menas med att en fluid är Newtonsk? Vad är den inbördes relationen mellan den dynamiska viskositeten och den kinematiska viskositeten? (2 p)
- d) Vad innebär det att två system är dynamiskt lika? Vad krävs för dynamisk likhet mellan två system med turbulent, inkompressibel gasströmning? (3 p)

T2.

- Luft strömmar turbulent i ett rör med diametern 10 cm. Luftens medelhastighet är 50 m/s och dess kinematiska viskositet är $10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$. Ge ungefärliga (ingenjörsmässiga) uppskattningar av följande: i) längdskalan för de största virvlarna som överhuvud taget förekommer i röret, ii) en längdskala som är karaktäristisk för de stora energiinnehållande virvlarna, iii) en hastighetsskala som är karaktäristisk för de turbulenta hastighetsfluktuationerna hos virvlarna av storlek (ii). (3 p)
- Beskriv och förklara skillnaden mellan en fullt utvecklad laminär hastighetsprofil mellan två plana plattor med en fullt utvecklad turbulent hastighetsprofil i samma geometri. (3 p)
- Rörströmning i rör som inte har cirkulära tvärsnitt kan för ingenjörsmässiga problem hanteras med hjälp av den så kallade hydrauliska diametern. Hur definieras den hydrauliska diametern? Vad är den hydrauliska diametern för ett rör med kvadratisk tvärsnitt? Varför är tryckfallsuppskattningar med hjälp av den hydrauliska diametern normalt mer noggranna för turbulent strömning än för laminär? (3 p)

T3.

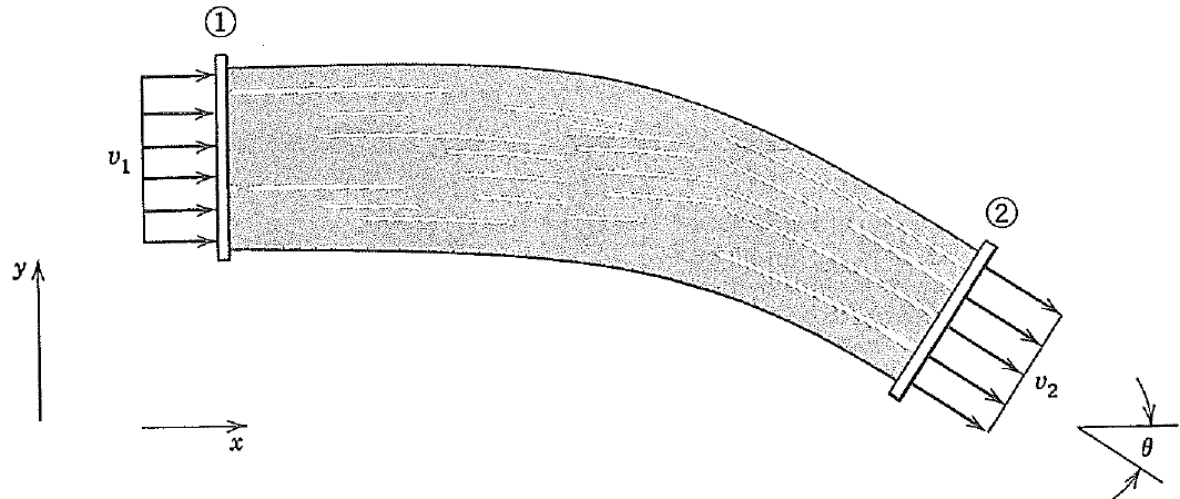
- Figuren nedan illustrerar tre situationer där Bernoullis ekvation av olika anledningar inte kan användas (i regionerna markerade "Invalid"). Förklara varför Bernoullis ekvation inte kan användas i dessa regioner. (4 p)



- Utgå från Navier-Stokes ekvationer och kontinuitetsekvationen för stationär, inkompressibel, tvådimensionell strömning. Härled från dessa ekvationer Prandtls gränsskiktsekvationer. Motivera varje införd förenkling/approximation. (6 p)

P1.

Vatten strömmar genom en kontrakterande rörböj (dvs en rörböj vars diameter minskar), se figur nedan. Bestäm storlek och riktning på den kraft som uppstår på rörböjen till följd av strömningen. Inverkan av viskösa krafter samt gravitation får försummas. (7 p)



Användbara data:

$$D_1 = 0.38 \text{ m}$$

$$D_2 = 0.3 \text{ m}$$

$$P_1 = 145 \text{ kPa övertryck}$$

$$P_2 = 128 \text{ kPa övertryck}$$

$$v_1 = 12 \text{ m/s}$$

$$\theta = 30^\circ$$

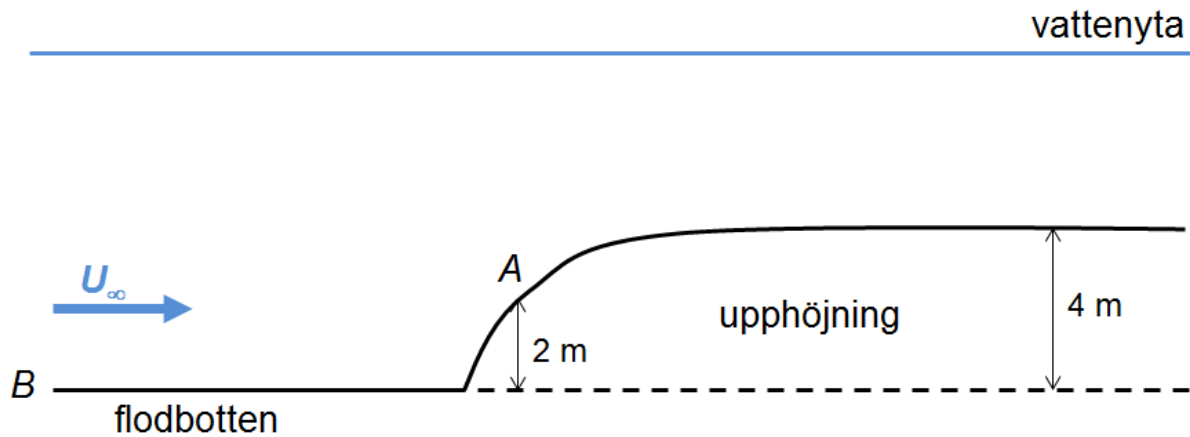
Materialdata:

$$\text{Vatten: } \rho = 1000 \text{ kg/m}^3 \quad \mu = 0.001 \text{ Pa}\cdot\text{s}$$

P2.

En djup flod har på ett ställe en 4 m hög upphöjning (se figur). Trycket vid flodbotten i punkt B är 130 kPa, och vattnets ankommande hastighet U_∞ är 2.5 m/s. Vad är vattentrycket i punkt A på upphöjningen? Punkt A befinner sig 2 m ovanför punkt B . Försumma inverkan av friktion och gränsskikt. (7 p)

Tips: Upphöjningen på flodbotten liknar en Rankine-halvkropp.



Materialdata:

Vatten: $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ $\mu = 0.001 \text{ Pa}\cdot\text{s}$

Elementära planströmningar:

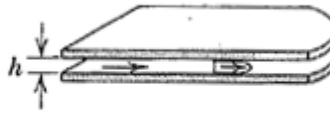
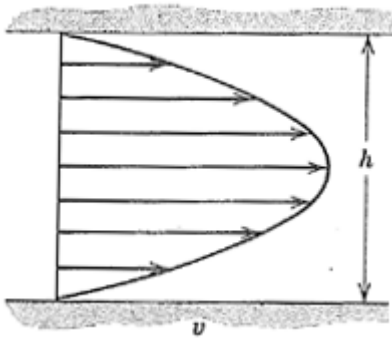
Uniform strömning: $\psi = Ur \sin \theta$

Linjekälla/-sänka: $\psi = m\theta$

Linjevirvel: $\psi = -K \ln r$

P3.

Betrakta strömningen mellan två (mycket stora) parallella plattor med mellanrummet $h = 1$ mm. Om vorticiteten vid väggen är 10 s^{-1} , vad är då den maximala hastigheten mellan plattorna (i m/s)? Strömningen är laminär och inkompressibel och fluiden är Newtonsk. Gravitationens inverkan är försumbar. (7 p)



Materialdata:

Vatten: $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$

$\mu = 0.001 \text{ Pa}\cdot\text{s}$

Formelsamling

Mekaniklagar

$$\frac{dm_{syst}}{dt} = 0$$

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{V})$$

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{H}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum (\mathbf{r} \times \mathbf{V}) \delta m \right)$$

$$\frac{dQ}{dt} - \frac{dW}{dt} = \frac{dE}{dt}$$

Reynolds transportteorem

$$\frac{dB_{syst}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\int_{CV} \beta \rho dV \right) + \int_{CS} \beta \rho (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dA$$

Differentiella samband på vektorform

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} = 0$$

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{g}$$

$$\rho \frac{D\hat{u}}{Dt} + p(\nabla \cdot \mathbf{V}) = \nabla \cdot [k\nabla T] + \Phi$$

Kontinuitetsekvationen och Navier-Stokes ekvationer i cylindriska koordinater

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (v_z) = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r} (v_r) + \frac{1}{r} v_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} (v_r) + v_z \frac{\partial}{\partial z} (v_r) - \frac{1}{r} v_\theta^2 = \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + g_r + \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r} (v_\theta) + \frac{1}{r} v_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta) + v_z \frac{\partial}{\partial z} (v_\theta) + \frac{1}{r} v_r v_\theta = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + g_\theta + \\ + \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r} (v_z) + \frac{1}{r} v_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} (v_z) + v_z \frac{\partial}{\partial z} (v_z) \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g_z + \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] \end{aligned}$$

Buckingham's π -theorem

$$i = n - r$$

Friction head enligt Weisbach

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g}$$

Engångsförluster

$$h_m = K \frac{V^2}{2g}$$

Darcys friktionsfaktor

Laminär strömning

$$f = \frac{64}{Re_D}$$

Turbulent strömning

$$\frac{1}{\sqrt{f/4}} = 4.0 \log_{10} \{Re_D \sqrt{f/4}\} - 0.4 \text{ för } \varepsilon/D = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{f/4}} = 4.0 \log_{10} \frac{D}{\varepsilon} - 0.4 \text{ för } \varepsilon/D \neq 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{f/4}} = 4 \log_{10} \frac{D}{\varepsilon} + 2.28 - 4 \log_{10} \left\{ 4.67 \frac{D/\varepsilon}{Re_D \sqrt{f/4}} + 1 \right\} \text{ för } \frac{D/\varepsilon}{Re_D \sqrt{f/4}} > 0.01$$

Formmotstånd, lyftkraft och väggfriktionskoefficient

$$F_D = C_D A_p \frac{\rho V^2}{2}$$

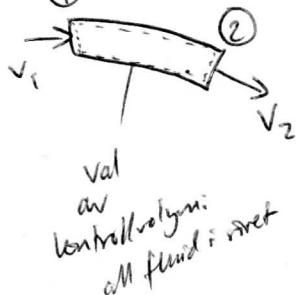
$$F_L = C_L A_p \frac{\rho V^2}{2}$$

$$\tau_w = C_f \frac{\rho V^2}{2}$$

Tentamen Strömningsmekanik TME055 2014-08-19

- T1.**
- a) Föreläsning 1 / White kap. 1.7
 - b) Föreläsning 6 / White kap. 4.6
 - c) Föreläsning 1 / White kap. 1.9
 - d) Föreläsning 8 / White kap. 5.5
- T2.**
- a) Föreläsning 12 / White kap. 6.5
 - b) Föreläsning 9 / White kap. 6.2 & 6.6
 - c) Föreläsning 9 / White kap. 6.8
- T3.**
- a) Föreläsning 3 / White kap. 3.5
 - b) Föreläsning 13 / White kap. 7.3

11



$$D_2 = 0,3 \text{ m}$$

$$P_1 = 145 \text{ kPa}$$

$$P_2 = 128 \text{ kPa}$$

$$V_1 = 12 \text{ m/s}$$

$$\theta = 30^\circ$$

$$\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$$

Solut: $\sum F$ på värbogen
pga strömning

K.E.: $\dot{m}_1 = \dot{m}_2 \Leftrightarrow \rho V_1 \frac{\pi D_1^2}{4} = \rho V_2 \frac{\pi D_2^2}{4} \Leftrightarrow V_2 \approx 19,25 \text{ m/s}$

riktelsesmängds-
balans för

$$\sum \vec{F} = \frac{d}{dt} \left(\int_{CV} \vec{V} \rho dV \right) + \dot{m}_2 \vec{V}_2 - \dot{m}_1 \vec{V}_1$$

består av:

tryckkrafter
gravitationskrafter
viskösa krafter

} för försummas!

spänningskrafter

← detta är den sista kraften (fast med
omvänt tecken!)

x-led: $F_x + F_{p,x} = \dot{m}_2 V_2 \cos \theta - \dot{m}_1 V_1$

y-led: $F_y + F_{p,y} = -\dot{m}_2 V_2 \sin \theta$

$$F_p = \int_{CS} p_g (-m) dA \Rightarrow F_{p,x} = p_1 \frac{\pi D_1^2}{4} - p_2 \frac{\pi D_2^2}{4} \cos \theta$$

$$F_{p,y} = p_2 \frac{\pi D_2^2}{4} \sin \theta$$

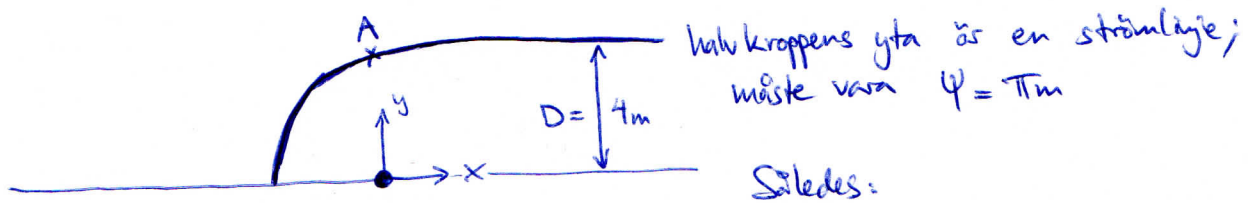
dvs $F_x = \dot{m}_2 V_2 \cos \theta - \dot{m}_1 V_1 - F_{p,x}$

$F_y = -\dot{m}_2 V_2 \sin \theta - F_{p,y}$

och slut svar: $\vec{F} = \begin{bmatrix} \dot{m}_1 V_1 + F_{p,x} - \dot{m}_2 V_2 \cos \theta \\ \dot{m}_2 V_2 \sin \theta + F_{p,y} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 2,25 \\ 17,6 \end{bmatrix} \text{ kN}$

Rankine-halvkropp = uniform strömning + källa

$$\Rightarrow \psi = U r \sin \theta + m \theta$$



masskonservering då $x \rightarrow \infty$ (och $u \rightarrow U$) ger att $D = \frac{\pi m}{U}$

$$\Rightarrow m = \frac{DU}{\pi} = \frac{4 \text{ m} \cdot 2.5 \text{ m/s}}{\pi} = 3.18 \text{ m}^2/\text{s}$$

Vi söker r som motsvarar höjden 2 m :

$$\pi m = U r \sin \theta + m \theta$$

$$\Leftrightarrow U r \sin \theta = m(\pi - \theta)$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{m(\pi - \theta)}{U \sin \theta}$$

Detta är ekvationen för upphöjningens kontur!

$$\text{alt. } y = r \sin \theta = \frac{m(\pi - \theta)}{U}$$

$$y = 2 \text{ m} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow r = 2 \text{ m}$$

dvs origo måste ligga rakt under A!

Vi söker trycket i A $\rightarrow$ erhålles w Bernoulli om vi vet hastigheten

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \Rightarrow |\mathbf{V}_A| = \sqrt{u^2 + v^2} = U \sqrt{1 + \frac{a^2}{r^2} + \frac{2a}{r} \cos \theta} \quad \left(\begin{array}{l} a = \frac{m}{U} \\ \cos \theta = 0 \end{array} \right)$$

$$\text{Insättning ger } |\mathbf{V}_A| \approx 2.96 \text{ m/s}$$

Bernoulli ekvation:

$$p_\infty + \frac{\rho U_\infty^2}{2} + \rho g z_\infty = p_A + \frac{\rho |\mathbf{V}_A|^2}{2} + \rho g z_A$$

$$p_\infty = 136 \text{ kPa}$$

$$z_\infty = 0 \text{ m}$$

$$U_\infty = 2.5 \text{ m/s}$$

$$\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$$

$$g = 9.81 \text{ m/s}^2$$

$$|\mathbf{V}_A| \approx 2.96 \text{ m/s}$$

$$z_A = 2 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{p_A \approx 109 \text{ kPa}}}$$

Strömning mellan parallella plattor

Strömningen orsakas inte av att en av plattorna rör sig (ses av hastighetsprofilen) utan måste vara orsakad av en tryckgradient i huvudströmriktningen

Laminärt, inkompressibelt, Newtonsk fluid

Mycket stora plattor

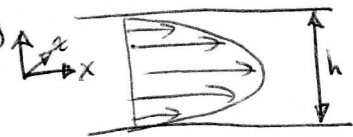
Gravitationens inverkan försumbar

Finns inget tryck som orsakar transienta fenomen $\rightarrow$ stationärt ocklasi

$$\text{K.E.: } \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

mycket stora plattor
 $v=w=0$
 $\frac{\partial}{\partial z}=0$

fullt utvecklade strömning ok



$$u = u(y)$$

$$\text{N.S.: } \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \rho g_x$$

stationär K.E. mycket stora plattor K.E. inget stora plattor ingen grav

$$\Rightarrow \frac{dp}{dx} = \mu \frac{d^2 u}{dy^2} ; \quad \text{här} \quad \frac{dp}{dx} = \mu \frac{d^2 u}{dy^2}$$

$$\text{Integrera: } \frac{du}{dy} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} y + C_1$$

$$u = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2$$

$$u(y = +\frac{h}{2}) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \frac{h^2}{8} + C_1 \frac{h}{2} + C_2$$

$$u(y = -\frac{h}{2}) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \frac{h^2}{8} - C_1 \frac{h}{2} + C_2$$

$$\therefore C_1 = 0$$

$$C_2 = -\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \frac{h^2}{8}$$

$$\Rightarrow u = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \left(\frac{y^2}{2} - \frac{h^2}{8} \right)$$

$$u_{\max} = u(y=0) = -\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \frac{h^2}{8}$$

forts.

Vortizitäten zur Hand

$$\vec{\zeta} = \nabla \times \vec{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix}$$

dvs $-\frac{du}{dy} = 10 \text{ s}^{-1}$ vid $y = \frac{h}{2}$

$$\Rightarrow \frac{du}{dy} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \frac{h}{2} = -10 \text{ s}^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dp}{dx} = -\frac{2\mu \cdot 10 \text{ s}^{-1}}{h} = -20 \text{ Pa/m}$$

Insättning i $u_{\max}$ ger:

$$u_{\max} = -\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \frac{h^2}{8} = \underline{\underline{0,0025 \text{ m/s}}}$$

($Re \approx 1,67$ dvs
laminärt antagande)