CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Tillämpad mekanik
412 96 Göteborg

TME055 Strömningsmekanik 2013-12-20

Tentamen fredagen den 20 december 2013 kl 14:00-18:00

Ansvarig lärare: Henrik Ström

Ansvarig lärare besöker salen vid ett tillfälle under pågående examination för att svara på eventuella frågor. Under hela tentamen kan han nås på telefon 070 40 25 119.

Maximal poängsumma är 50. För godkänt krävs 20 poäng, för betyg 4 krävs 30 poäng och för betyg 5 krävs 40 poäng.

OBS! Notera att uppgifterna inte är ordnade efter svårighetsgrad.

T1.

a) Vad är kontinuumhypotesen? Hur kan fluidegenskapen densitet definieras som ett fält med hjälp av kontinuumhypotesen? (3 p)

b) Hur definieras materiederivatan? Vad är dess fysikaliska tolkning? (3 p)

c) Hur lyder Bernoullis ekvation? Vad är den fysikaliska tolkningen av de olika termerna? Ge två exempel på när Bernoullis ekvation *inte* kan användas. (5 p)

d) Ett experiment utförs där en vätska strömmar med konstant volymsflöde i ett rör. Genom att påverka vätskans sammansättning kan viskositeten förändras i experimentet, samtidigt som tryckfallet över en sektion av röret registreras. Vid experimentets start avläses ett visst tryckfall för den initiala viskositeten. När viskositeten sedan sänks noterar man att tryckfallet blir lägre. En ytterligare sänkning av viskositeten resulterar dock i att tryckfallet åter stiger. Vilken är den bakomliggande orsaken till dessa observationer? (2 p)

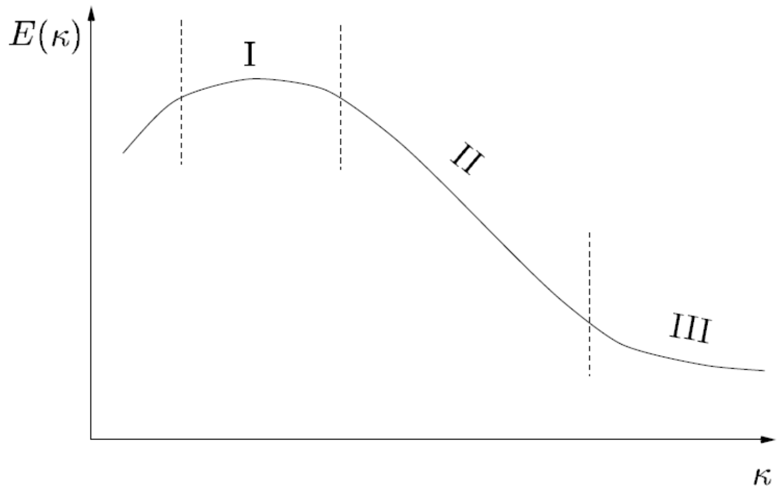
T2.

a) Beskriv med skisser och ord hur en laminär hastighetsprofil utvecklar sig i början av ett rör. Utgå från ett uniformt flöde in i röret. (3 p)

b) Skriv om Navier-Stokes ekvationer på dimensionslös form. Vad är den fysikaliska tolkningen av den dimensionslösa grupp som dyker upp och vad kallas den? Är det möjligt för andra dimensionslösa grupper som inte ingår i den dimensionslösa formen av ekvationen att spela roll för hur strömningen ser ut? Hur? (6 p)

T3.

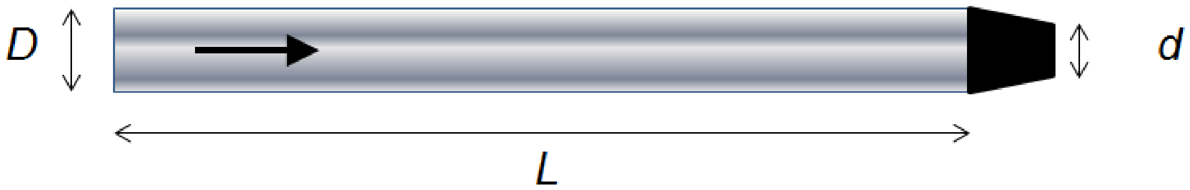
a) Figuren nedan illustrerar ett energispektrum för turbulent strömning. Beskriv egenskaperna hos de turbulenta strukturer som är förknippade med de tre skalorna (*I*, *II* och *III*). (3 p)



b) När man härleder ekvationer för medelhastighetsfältet i turbulent strömning (de så kallade RANS-ekvationerna) dyker det upp nya termer – de turbulenta spänningarna. Hur ser dessa termer ut? Vilken fysikalisk process representerar de? Varför kallas de för spänningar? (4 p)

P1.

Vatten strömmar genom ett långt horisontellt rör med cirkulärt tvärsnitt och slät insida, och sedan genom ett munstycke ut i det fria (se figur nedan). Trycket vid rörets början är 0.1 kPa över atmosfärstryck och volymsflödet är 0.3 dm^3/s. Friktionskrafter i munstycket kan försummas. Visa att tryckfallet i det långa röret är försumbart och beräkna vilken kraft som krävs för att hålla munstycket på plats. (7 p)



Geometriska data (notera att figuren ej är skalenlig):

D = 0.3 m

L = 100 m

d = 0.15 m

Materialdata:

Vatten: ρ = 998 kg/m3 μ = 0.00089 Pa,s

P2.

Hastighetsfältet i en tornado kan beskrivas av en strömfunktion på formen:

$$\psi = m\theta - K \ln r$$

där K = 15 000 m^2/s och m = -2000 m^2/s. Ett föremål rycks med av tornadon vid en radiell position av 100 m från dess centrum. Hur lång tid tar det för föremålet att förflyttas till en radiell position av 20 m från tornadons centrum? Antag att föremålet följer med flödet och att fluiden är luft. (7 p)

Materialdata:

Luft: ρ = 1.2 kg/m3 $\mu = 1.25 \cdot 10^{-5}$ Pa,s

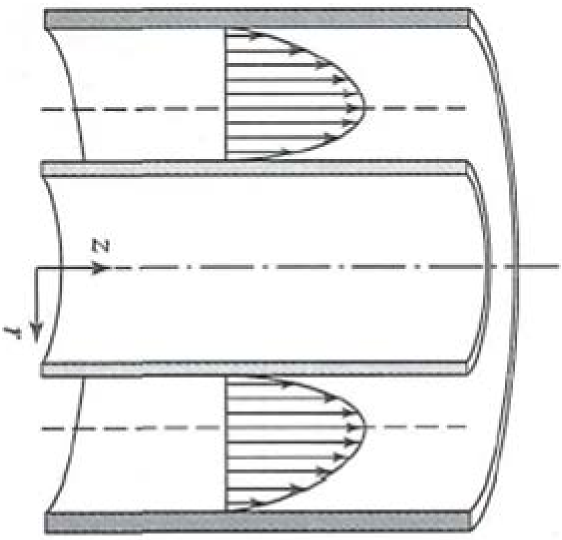
P3.

Ett horisontellt (mycket långt) rör är placerat inuti ett större (lika långt) rör. I mellanrummet mellan de två rören strömmar vatten som drivs av en konstant tryckgradient (se figur för skiss av strömningsprofilen mellan rören). Temperaturen är 5°C och Reynolds tal är sådant att strömningen är laminär. Bestäm storleken på den kraft som strömningen orsakar på det inre röret (per enhetslängd). Tryckgradienten är -30 Pa/m. (7 p)

Materialdata:

Vatten 5°C: ρ = 1000 kg/m3 μ = 0.0015 Pa,s

Geometri:



Radiellt avstånd från centrumlinjen (z) till inre rörets yttersida: 5 mm

Radiellt avstånd från centrumlinjen (z) till yttre rörets innersida: 7 mm

Formelsamling

Mekaniklagar

$$\frac{dm_{syst}}{dt} = 0$$

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{V})$$

$$\boldsymbol{M} = \frac{d\boldsymbol{H}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum (\boldsymbol{r} \times \mathbf{V})\delta m\right)$$

$$\frac{dQ}{dt} - \frac{dW}{dt} = \frac{dE}{dt}$$

Reynolds transportteorem

$$\frac{dB_{syst}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\int_{CV} \beta\rho d\mathcal{V}\right) + \int_{CS} \beta\rho(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n})\, dA$$

Differentiella samband på vektorform

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\, \nabla \cdot \mathbf{V} = 0$$

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho\mathbf{g}$$

$$\rho \frac{D\hat{u}}{Dt} + p(\nabla \cdot \mathbf{V}) = \nabla \cdot [k\nabla T] + \Phi$$

Kontinuitetsekvationen och Navier-Stokes ekvationer i cylindriska koordinater

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(v_z) = 0$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r}(v_r) + \frac{1}{r} v_\theta \frac{\partial}{\partial \theta}(v_r) + v_z \frac{\partial}{\partial z}(v_r) - \frac{1}{r} {v_\theta}^2 =$$
$$= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + g_r + \frac{\mu}{\rho}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_r}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}\right]$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r}(v_\theta) + \frac{1}{r} v_\theta \frac{\partial}{\partial \theta}(v_\theta) + v_z \frac{\partial}{\partial z}(v_\theta) + \frac{1}{r} v_r v_\theta = -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + g_\theta + \frac{\mu}{\rho}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right]$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r}(v_z) + \frac{1}{r} v_\theta \frac{\partial}{\partial \theta}(v_z) + v_z \frac{\partial}{\partial z}(v_z)$$
$$= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + g_z + \frac{\mu}{\rho}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right]$$

Buckinghams π-teorem

$$i = n - r$$

Friction head enligt Weisbach

$$h_f = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g}$$

Engångsförluster

$$h_m = K\frac{V^2}{2g}$$

Darcys friktionsfaktor

Laminär strömning

$$f = \frac{64}{Re_D}$$

Turbulent strömning

$$\frac{1}{\sqrt{f/4}} = 4.0\log_{10}\left\{Re_D\sqrt{f/4}\right\} - 0.4 \text{ för } \varepsilon/D = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{f/4}} = 4.0\log_{10}\frac{D}{\varepsilon} - 0.4 \text{ för } \varepsilon/D \neq 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{f/4}} = 4\log_{10}\frac{D}{\varepsilon} + 2.28 - 4\log_{10}\left\{4.67\frac{D/\varepsilon}{Re_D\sqrt{f/4}} + 1\right\} \text{ för } \frac{D/\varepsilon}{Re_D\sqrt{f/4}} > 0.01$$

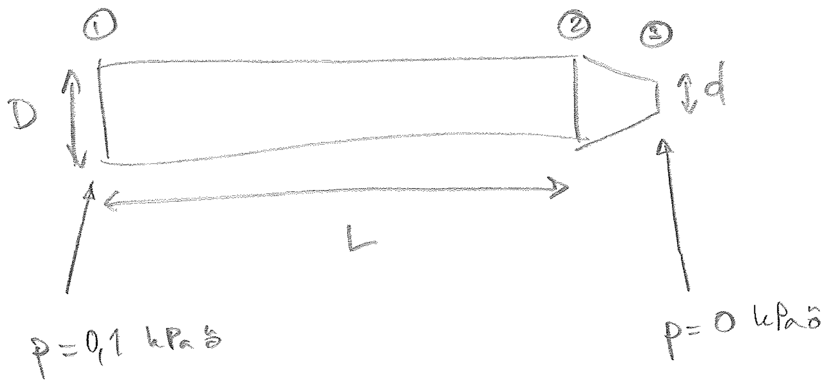
Formmotstånd, lyftkraft och väggfriktionskoefficient

$$F_D = C_D A_p\frac{\rho V^2}{2}$$

$$F_L = C_L A_p\frac{\rho V^2}{2}$$

$$\tau_w = C_f\frac{\rho V^2}{2}$$

P1



① → ② Strömningsförluster ger tryckfall

Bernoullis ekvation med tryckförluster:

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + h_f$$

K.E. $\Rightarrow V_1 = V_2$ $\qquad \left(V_1 = \frac{Q}{A} = \frac{4Q}{\pi D^2} = 0{,}004 \text{ m/s} \right)$

Horisontellt rör $\Rightarrow z_1 = z_2$

$$\Rightarrow \frac{p_1}{\rho g} = \frac{p_2}{\rho g} + h_f \iff p_2 = p_1 - \rho g h_f$$

Bestäm h_f : turbulent eller laminärt?

$$Re_D = \frac{\rho U D}{\mu} = \left\{ Q = \frac{\pi D^2}{4} U \right\} = \frac{4 \rho Q D}{\pi D^2 \mu} = \frac{4 \rho Q}{\pi D \mu} \approx 1428$$

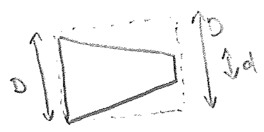
laminärt!
(kritiskt $Re \approx 2300$)

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} \; ; \; f = \frac{64}{Re_D} \approx 0{,}045 \Rightarrow h_f = 1{,}37 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

$$\Rightarrow p_2 = 99{,}9 \text{ Pa ö} \approx p_1$$

V.S.V.

Kraftbalans på munstycket:



$$\sum F_x = \frac{d}{dt}\Big(\underbrace{\cancel{\int_{CV} V \rho \, d\mathcal{V}}}_{\text{stationärt}} \Big)^{=0} + \int_{CS} V \rho (V \cdot n) \, dA = V_2 \rho (-V_2) \frac{\pi D^2}{4} + V_3 \rho (V_3) \frac{\pi d^2}{4}$$

$$\sum F_x = F_{insp} + F_{tryck} = F_{insp} + p_2 \frac{\pi D^2}{4} - p_3 \frac{\pi D^2}{4}$$

$$\rightarrow F_{insp} = (p_3 - p_2) \frac{\pi D^2}{4} - \rho V_2^2 \frac{\pi D^2}{4} + \rho V_3^2 \frac{\pi d^2}{4} \approx \underline{\underline{-7 \text{ N}}}$$

K.E. $\Rightarrow \frac{\pi D^2}{4} V_2 = \frac{\pi d^2}{4} V_3 \Rightarrow V_3 = 0{,}017 \text{ m/s}$

P2

$$\psi = -15000 \ln r - 2000\theta = -K \ln r - m\theta$$

$$v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{1}{r}(-m) = -\frac{m}{r}$$

$$v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -\frac{K}{r}$$

Relation mellan Eulers & Lagranges betraktelsesätt:

$$\frac{\partial \mathbb{x}}{\partial t} = \mathbb{V}$$

fluidens hastighet

förändring av position för ett fluidelement

$$\Rightarrow \quad \frac{d\mathbb{x}}{\mathbb{V}} = dt$$

Vi är här intresserade av den radiella förflyttningen, så vi begränsar oss till $\frac{dr}{v_r} = dt$

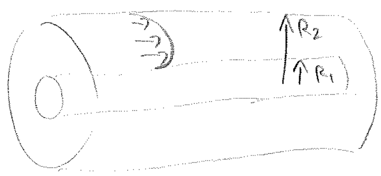
Integrera: $\displaystyle\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{v_r} = \int_{t_1}^{t_2} dt$

$$\Leftrightarrow \quad -\int_{r_1}^{r_2} \frac{r}{m} dr = \int_{t_1}^{t_2} dt$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[-\frac{r^2}{2m}\right]_{r_1}^{r_2} = \left[t\right]_{t_1}^{t_2}$$

$$\Leftrightarrow \quad t_2 - t_1 = -\frac{r_2^2}{2m} + \frac{r_1^2}{2m} = \underline{\underline{2{,}4 \text{ s}}}$$

P3



$R_2 = 7\,mm$

$R_1 = 5\,mm$

$\frac{dp}{dz} = -30\ Pa/m$

Antag: Laminärt
Inkompressibelt
Stationärt
Fullt utvecklad strömning
Axisymmetri
Horisontellt rör

$\Rightarrow v = v_z(r)$

N-S:

$$\cancelto{0}{\frac{\partial v_z}{\partial t}} + v_r \cancelto{0}{\frac{\partial v_z}{\partial r}} + \frac{v_\theta}{r}\cancelto{0}{\frac{\partial v_z}{\partial \theta}} + v_z\cancelto{0}{\frac{\partial v_z}{\partial z}} = \nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\cancelto{0}{\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2}} + \cancelto{0}{\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}}\right] - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz} + \cancelto{0}{g_z}$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{dz} = \frac{\mu}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{dv_z}{dr}\right) \overset{\text{Integrera}}{\Longrightarrow} r\left(\frac{dv_z}{dr}\right) = \frac{dp}{dz}\frac{r^2}{2\mu} + C_1$$

$$\Rightarrow \frac{dv_z}{dr} = \frac{dp}{dz}\frac{r}{2\mu} + \frac{C_1}{r} \overset{\text{Integrera}}{\Longrightarrow} v_z = \frac{dp}{dz}\frac{r^2}{4\mu} + C_1 \ln r + C_2$$

Randvillkor:

$$v_z(r = R_1) = 0 \rightarrow 0 = \frac{dp}{dz}\frac{R_1^2}{4\mu} + C_1 \ln R_1 + C_2$$

$$v_z(r = R_2) = 0 \rightarrow 0 = \frac{dp}{dz}\frac{R_2^2}{4\mu} + C_1 \ln R_2 + C_2$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{dz}\frac{R_1^2}{4\mu} + C_1 \ln R_1 = \frac{dp}{dz}\frac{R_2^2}{4\mu} + C_1 \ln R_2$$

$$\Leftrightarrow C_1 \ln\frac{R_2}{R_1} = \frac{dp}{dz}\frac{1}{4\mu}(R_1^2 - R_2^2) \Leftrightarrow C_1 = \frac{(R_1^2 - R_2^2)}{4\mu \ln R_2/R_1}\frac{dp}{dz}$$

$$\Leftrightarrow C_2 = -\frac{dp}{dz}\frac{R_1^2}{4\mu} - \frac{(R_1^2 - R_2^2)}{4\mu \ln R_2/R_1}\frac{dp}{dz}\ln R_1$$

$$\Rightarrow v_z = \frac{dp}{dz}\left[\frac{(r^2-R_1^2)}{4\mu} + \frac{(R_1^2-R_2^2)}{4\mu \ln R_2/R_1} \ln\frac{r}{R_1}\right]$$

$$F = A\,\tau_{rz} = 2\pi R_1 L\,\mu \left.\frac{dv_z}{dr}\right|_{r=R_1} \Leftrightarrow \frac{F}{L} = 2\pi R_1 \mu \left.\frac{dv_z}{dr}\right|_{r=R_1}$$

$$\Rightarrow \frac{F}{L} = \pi R_1^2 \frac{dp}{dz} + \frac{\pi(R_1^2-R_2^2)}{2\ln R_2/R_1}\frac{dp}{dz} = \underline{\underline{1\ \mathrm{mN/m}}}$$