CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Tillämpad Mekanik
412 96 Göteborg

Siniša Krajnović 1101217

TME055 Strömningsmekanik

Tentamen tisdagen den 17 december 2011, kl. 14.00-18.00

OBS! A calculator and a mathematical handbook (Beta) can be used.
(En miniräknare och boken Beta är tillåtna hjälpmedel)

T1. a) I härledningen av våra grundekvationer använder vi Reynolds transportteorem. Vad säger det teoremet? Illustrera det med ett exempel. (2p)

b) Antag att vi har hydrostatisk fluid dvs. fluidens hastighet är noll. Man kan då visa att det inte finns någon tryckförändring horisontellt och att den vertikala tryckförändringen är proportionell med $\rho g \Delta z$ där Δz är höjdskillnaden. Visa detta. (4p)

c) Vad är en materiederivata? Vad har den för fysikalisk tolkning? (2p)

d) Betrakta ett fyrkantigt fluidelement med en skjuvspänning τ verkande. Använd ett sådant fluidelement för att härleda ett samband mellan skjuvspänning τ och hastighetsgradienten du/dy som gäller för Newtoniska fluider. (4p)

e) Vad är en strömlinje? Vad är en strömfunktion? Vad har den för geometrisk och fysikalisk tolkning? (4p)

T2. a) Vilka egenskaper har en turbulent strömning? Hur överförs turbulent energi från medelströmningen till små turbulenta skalor? Beskriv den processen. (4p)

b) Tänk dig en anströmmad plan platta. Antag att vi har ett uniformt tryck (antas inte orsaka några krafter på plattan.) Använd rörelsemängdsekvation och masskonservering för att ta fram ett utryck för drag (luftmotstånd) D. I en Kármáns analys av plan platta införde Kármán impulsförlusttjocklek (eng. momentum thickness). Hur definieras den? Dessutom antog han att hastigheten har en viss profil. Vilken? (5p)

c) Antag att det är fullt utvecklat turbulent gränsskikt nära väggen. Då kan man dela upp hastighetsprofilen närmast väggen i tre olika delar. Beskriv de två närmast väggen (det viskösa undersskiktet och log-lagen). (3p)

d) Vad säger oss skalningslagar? Hur används dessa? (1p)

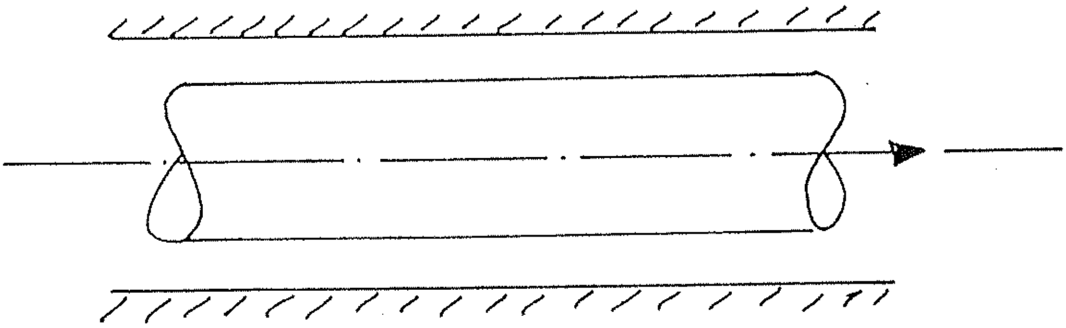
P1. a) Inuti en oljeledning finns en slang (se figur) som används för att värma oljan. Slangen skall nu dras ur oljeledningen, och man önskar beräkna den kraft som krävs för att dra slangen ur ledningen. Oljeledningen är 50 m lång och har diametern 0.10 m. Slangen kan antas befinna sig mitt i oljeledningen och har diametern 0.04 m. Slangen dras med hastigheten 1.0 m/s. Strömningen som uppkommer får antas vara både stationär och laminär. Mediet är olja med dynamiska viscositeten $\mu = 0.4\ Ns/m^2$ och densiteten $\rho = 850\ kg/m^3$, och temperaturen 20°C. (7p)

Navier-Stokes ekvationer i cylindriska koordinater är:

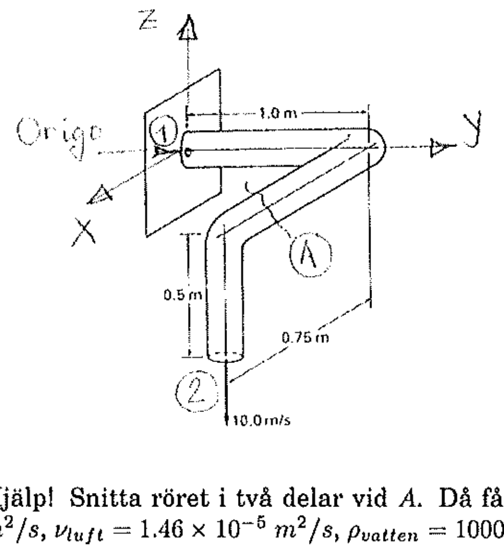
$$\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}-\frac{v_\theta^2}{r}+v_z\frac{\partial v_r}{\partial z} = \nu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r)\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}\right]-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+g_r$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{v_r v_\theta}{r}+v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z} = \nu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_\theta)\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right]-\frac{1}{\rho}\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}+g_\theta$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z} = \nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right]-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+g_z$$



P2. a) Figuren visar ett krökt rör som passerar en vägg. Rördiametern är 200 mm, och båda krökarna är 90°. Vatten (20°C) kommer in i röret vid väggytan och lämnar röret vid den öppna delen av röret med en hastighet av 10 m/s. Beräkna torsions- (kring y-axel) och böjmomenten (kring x-axel) vid rörets infästning. Antag att både rörets och vattnets vikt kan försummas. (7p)

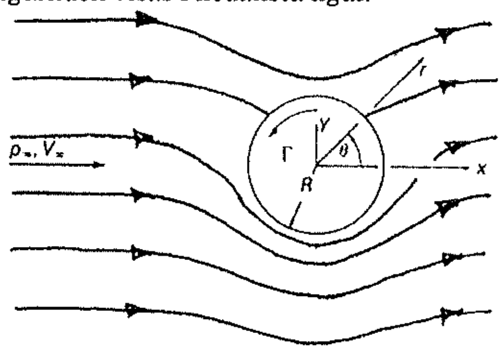


Hjälp! Snitta röret i två delar vid A. Då får du två 90°-delrör. $\nu_{vatten} = 1.02 \times 10^{-6}\ m^2/s$, $\nu_{luft} = 1.46 \times 10^{-5}\ m^2/s$, $\rho_{vatten} = 1000\ kg/m^3$, $\rho_{luft} = 1.189\ kg/m^3$.

P3. Nedanstående strömfunktion gäller för en likformig strömning med cirkulation kring cylinder med radien R. (7p)

$$\Psi = V_\infty r sin\theta - (\mu/2\pi)(sin\theta)/r - (\Gamma/2\pi)ln(r/R)$$

där $\Gamma = 2\pi R V_\infty$ och $\mu = 2\pi R^2 V_\infty$.
Cylindern har en linjevorticitet (linjekälla) i centrum, och den principiella strömningsbilden visas i nedanstå figur.



Bestäm tryckförendringen kring cylindern, samt lyftkraften som verkar på den.
Hjälp! Luft har $\rho = 1.189 kg/m^3$.

Under tentamen kan ansvarig lärare (Jan Östh) nås på telefon: 031-7721390

Maximal poängsumma är 50. För godkänt krävs 20 poäng; för betyg 4: 30 poäng; för betyg 5: 40 poäng.

P1 tenta 2011-12-17

1/

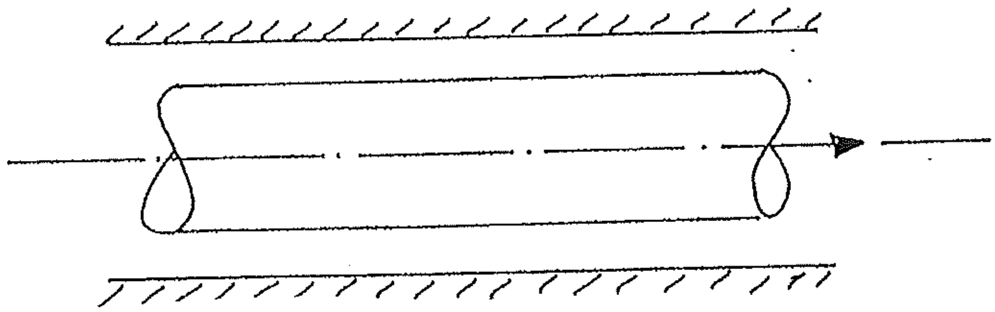
P1. a) Inuti en oljeledning finns en slang (se figur) som används för att värma oljan. Slangen skall nu dras ur oljeledningen, och man önskar beräkna den kraft som krävs för att dra slangen ur ledningen. Oljeledningen är 50 m lång och har diametern 0.10 m. Slangen kan antas befinna sig mitt i oljeledningen och har diametern 0.04 m. Slangen dras med hastigheten 1.0 m/s. Strömningen som uppkommer får antas vara både stationär och laminär. Mediet är olja med dynamiska viscositeten $\mu = 0.4\ Ns/m^2$ och densiteten $\rho = 850\ kg/m^3$, och temperaturen 20°C. (7p)

Navier-Stokes ekvationer i cylindriska koordinater är:

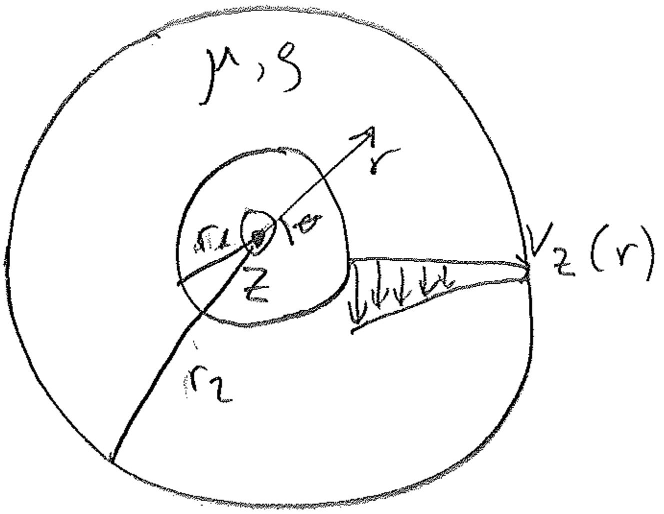
$$\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}-\frac{v_\theta^2}{r}+v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}=\nu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r)\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}\right]-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+g_r$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{v_r v_\theta}{r}+v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z}=\nu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_\theta)\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right]-\frac{1}{\rho}\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}+g_\theta$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}=\nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right]-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+g_z$$



Lösning



$r_1 = 0.02$ m

$r_2 = 0.05$ m

$\mu = 0.4 \; Ws/m^2$

$\rho = 850 \; kg/m^3$

Låt z vara den riktning som slangen dras ut i. När slangen dras ut med hastigheten $V_0 = 1 \; m/s$ kommer det bildas en strömning i röret p.g.a. friktion mellan den inre slangen och fluiden. Vi antar att strömningen är stationär och laminär. Dessutom bortser vi från änd-effekter på slangen. Vi antar även en inkompressibel fluid då $V_0 << c$ (ljudhastigheten i fluiden)

Någon tryckgradient eller gravitation har vi heller inte i z-led.

=>

$$V_\theta = 0$$
$$V_r = 0$$
$$V_z \neq 0$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial r} \neq 0$$
$$\frac{\partial V_z}{\partial \theta} = 0$$
$$\frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \quad \text{(inga ändeffekter)}$$

N-S i z-led $\Rightarrow$

$$\nu \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V_z}{\partial r}\right) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V_z}{\partial r}\right) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$r\frac{\partial V_z}{\partial r} = C_1 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial r} = \frac{C_1}{r} \quad \Rightarrow$$

$$V_z(r) = C_1 \ln r + C_2$$

Randvillkor :

$$V_z(r) = C_1 \ln r + C_2$$

$$V_z(r = 0{,}02) = V_0 \Rightarrow C_1 \ln 0.02 + C_2 = 1$$

$$V_z(r = 0.05) = 0 \Rightarrow C_1 \ln 0.05 + C_2 = 0$$

$$\Rightarrow C_2 = -C_1 \ln 0.05$$

$$\Rightarrow C_1 \ln 0.02 - C_1 0.05 = 1 \Rightarrow$$

$$C_1 \ln \frac{0{,}02}{0{,}05} = 1 \Rightarrow$$

$$C_1 = -1{,}09 \Rightarrow$$

$$C_2 = -3.27 \Rightarrow$$

$$V_z(r) = -1{,}09 \ln r - 3{,}27 \quad m/s$$

Skjuvspänningen på den inre slangen ges av:

$$\tau_w = \mu \frac{\partial v_z}{\partial r}\Big|_{r=r_1}$$

Kraften på slangen ges av

$$F_z = \int \tau_w \, dA \quad , \qquad dA = r\,d\theta\,dz$$

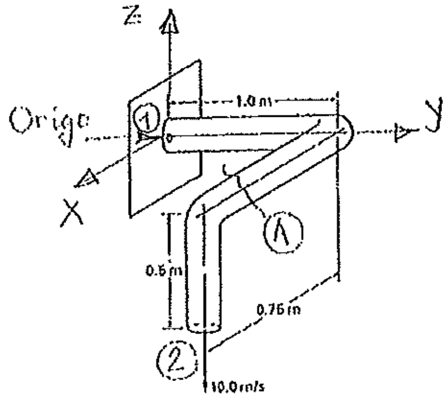
$$\tau_w = -\mu \cdot \frac{1.09}{r_1} \quad \Rightarrow$$

$$F = -\mu \cdot \frac{1.09}{r_1} \cdot 2\pi \cdot r_1 \cdot 50$$

$$\approx 137 \quad N$$

P2 tenta 2011-12-17

P2. a) Figuren visar ett krökt rör som passerar en vägg. Rördiametern är 200 mm, och båda krökarna är 90°. Vatten (20°C) kommer in i röret vid väggytan och lämnar röret vid den öppna delen av röret med en hastighet av 10 m/s. Beräkna torsions- (kring y-axel) och böjmomenten (kring x-axel) vid rörets infästning. Antag att både rörets och vattnets vikt kan försummas. (7p)



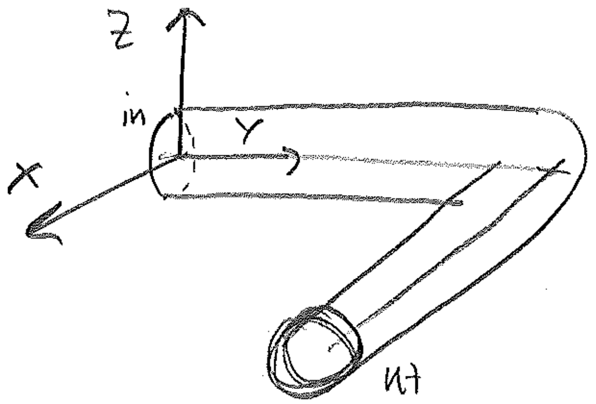
Hjälp! Snitta röret i två delar vid A. Då får du två 90°-delrör. $\nu_{vatten} = 1.02 \times 10^{-6}$ m^2/s, $\nu_{luft} = 1.46 \times 10^{-5}$ m^2/s, $\rho_{vatten} = 1000$ kg/m^3, $\rho_{luft} = 1.189$ kg/m^3.

Lösning:

1/

Snitta röret vid A:

Första delen:



Kraften på vattnet ges av:

$$\mathbb{F}_{vatten} = \dot{m}_{ut} \mathbb{V}_{ut} - \dot{m}_{in} \mathbb{V}_{in}$$

$$\dot{m}_{ut} = \dot{m}_{in} = \rho A V \quad \text{där}$$

$$\rho_{vatten} = 1000 \ kg/m^3$$

$$A = \pi \cdot (0.1)^2 = 0.0314 \ m^2$$

$$V = 10 m/s$$

$$\Rightarrow \dot{m} = 314 \ kg/s$$

$$\mathbb{F}_{vatten} = \dot{m}(\mathbb{V}_{ut} - \mathbb{V}_{in}) \Rightarrow$$

$$\mathbb{V}_{ut} = V\hat{x}$$

$$\mathbb{V}_{in} = V\hat{y} \Rightarrow$$

$$\mathbb{F}_1 = -\dot{m}V(\hat{x} + \hat{y}) \quad (-\mathbb{F}_{vatten})$$

$\mathbb{F}_1$ verkar i $(x, y, z) = (0, 1, 0)$

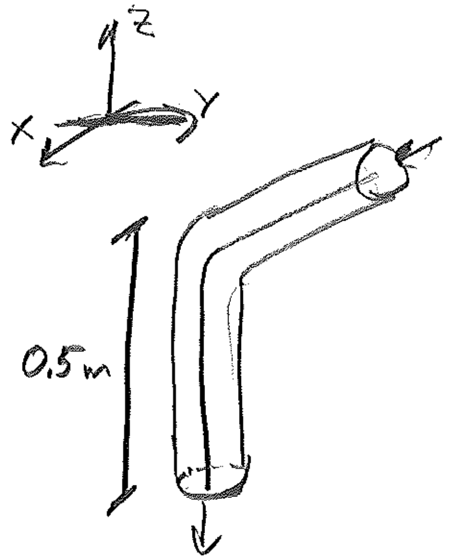
Momentet $\mathbb{M}_1$ blir:

$$\mathbb{M}_1 = \mathbb{r}_1 \times \mathbb{F}_1 \Rightarrow$$

$$\dot{m}V \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$-\dot{m}V \cdot 1\hat{z} = \mathbb{M}_1$$

Andra delen:



$$\mathbb{F}_{vatten} = \dot{m}V(V_{ut} - V_{in})$$

$$V_{ut} = -V\hat{z}$$

$$V_{in} = V\hat{x}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{F}_{vatten} = \dot{m}V(\hat{x} - \hat{z}) = -\mathbb{F}_{rör}$$

Som verkar i $(x, y, z) = (0.75, 1, 0)$

$$\mathbb{M}_z = \dot{m}V \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0.75 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & +1 \end{vmatrix} = \hat{x} - 0.75\hat{y} + \hat{z}$$

$$Ml_2 = \dot{m}V(\hat{x} - 0.75\hat{y} + \hat{z})$$

$$Ml_{tot} = Ml_1 + Ml_2 =$$

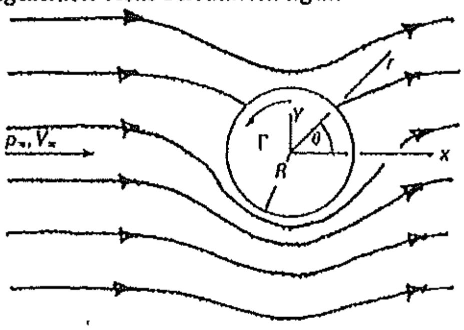
$$\dot{m}V(\hat{x} - 0.75\hat{y} + 2\hat{z})$$

P3 tenta 2011-12-17

P3. Nedanstående strömfunktion gäller för en likformig strömning med cirkulation kring cylinder med radien R. (7p)

$$\Psi = V_\infty r sin\theta - (\mu/2\pi)(sin\theta)/r - (\Gamma/2\pi)ln(r/R)$$

där $\Gamma = 2\pi R V_\infty$ och $\mu = 2\pi R^2 V_\infty$.
Cylindern har en linjevorticitet (linjekälla) i centrum, och den principiella strömningsbilden visas i nedanstå figur.



Bestäm tryckförendringen kring cylindern, samt lyftkraften som verkar på den.
Hjälp! Luft har $\rho = 1.189 kg/m^3$.

Lösning P3.

$$\psi = V_0 r \sin\theta - \left(\frac{\mu}{2\pi}\right) \sin\theta / r - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln\left(\frac{r}{R}\right)$$

$$\Gamma = 2\pi R V_0 \quad , \mu = 2\pi R^2 V_0$$

$$V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$$

$$V_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -V_0 \sin\theta - \frac{R^2 V_0}{r^2} \sin\theta + \frac{R V_0}{r}$$

På cylinderns yta är $V_r = 0$, $V_\theta =$

$$V_\theta(r=R) = -2V_0 \sin\theta + V_0$$

Använd Bernoullis ekv. längs en strömlinje som går längs ~~med~~ ytan!

$$P_\infty + \frac{\rho}{2} V_0^2 = P_S + \frac{\rho}{2}(-2V_0 \sin\theta + V_0)^2$$

$$\Rightarrow \quad P_S - P_\infty = 2\rho V_0^2 (\sin^2\theta - \sin\theta)$$

2/2

Lyftkraften ges av

$$F_L = \oiint_{cyl.} (P_s - P_\infty) n \, dA \Big|_y \quad \Rightarrow \quad \hat{r} =$$

dvs y-komponenten av integralen

$$\hat{n} = \hat{r} = \hat{x}\cos\theta + \hat{y}\sin\theta$$

$\Rightarrow$ $dA = r\,d\theta\,dz$, $r = R$, b = cylinderns bredd

$$F_L = \int_0^{2\pi} (P_s - P_0)\, R \cdot b \cdot \sin(\theta)\, d\theta$$

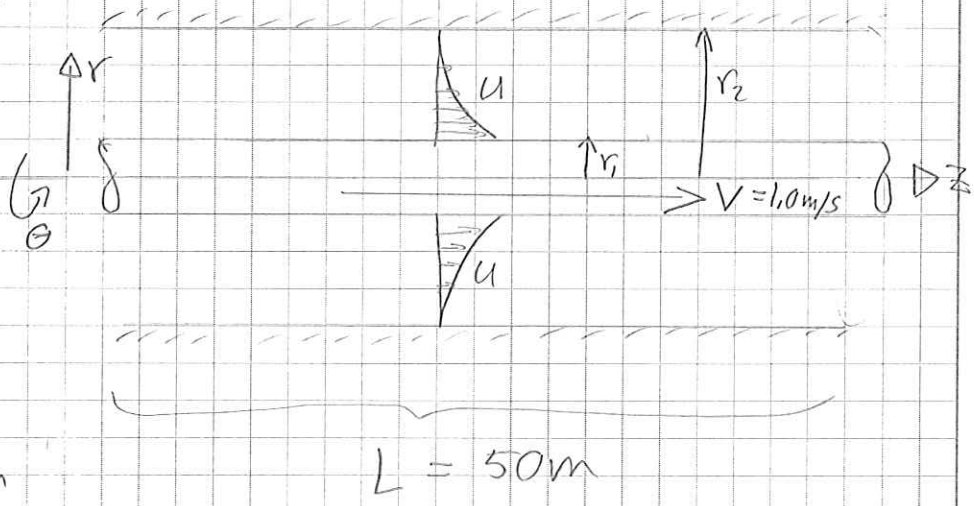
$$= -2\rho R b V_0^2 \int_0^{2\pi} (\sin^2\theta - \sin\theta) \sin\theta \, d\theta$$

$$= 4\pi \rho R b V_0 = F_L$$

5

CHALMERS	Anonymous code / Anonym kod: TME035-13	Points for question (to be filled in by teacher) / Poäng på uppgiften (ifylles av lärare)	Consecutive page no. / Löpande sid nr: 11 — Question no. / Uppgift nr: P1

Betrakta figuren:



Givet:

$r_1 = \frac{0{,}04}{2} m = 0{,}02m$

$r_2 = \frac{0{,}10m}{2} = 0{,}05m$

$L = 50m$

$v = 1{,}0 m/s$

$\mu = 0{,}4 Ns/m^2$, $\rho = 850 kg/m^3$

P.g.a. symmetri beror inte strömningshastigheten u på vinkeln θ, vilket gör att alla $\frac{d}{d\theta} = 0$ i Navier-Stokes. Dessutom ger kontinuitetsekvationen att hastigheten v_r i r-led måste vara noll, eftersom den är noll vid den fixa innerväggen hos oljeledningen. Den enda hastigheten är då längs röret i z-led.

Antag att ledningens längd L är så stor att hastigheten inte beror på z-koordinaten.
Jag antar att oljeledningen ligger horisontellt så att tyngdaccelerationen inte påverkar i z-led, dvs. $g_z = 0$. Försumma även gravitationens inverkan på det korta avståndet i r-led. ✓ Bra!

5

CHALMERS	Anonymous code / Anonym kod: TME055-13	Points for question (to be filled in by teacher) / Poäng på uppgiften (ifylles av lärare)	Consecutive page no. / Löpande sid nr: 12 — Question no. / Uppgift nr: P1, forts

Strömningen anses dessutom vara stationär ($\frac{\partial}{\partial t}=0$), inkompressibel ($\rho$=konst.) och ~~laminär~~ Bokstav ; ! Det enda som blir kvar av Navier-Stokes i z-led blir då

$$\underbrace{\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}}_{=0}=\nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)+\underbrace{\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2}}_{=0}+\underbrace{\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}}_{=0}\right]\underbrace{-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}}_{=0}\underbrace{+g_z}_{=0}$$

OBS! Försumma även tryckförändringen ($\frac{\partial p}{\partial z}=0$).

$$\Rightarrow \frac{\nu}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv_z}{dr}\right)=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{d}{dr}\left(r\frac{dv_z}{dr}\right)=0$$

$$\Rightarrow r\frac{dv_z}{dr}=A \quad\Leftrightarrow\quad \frac{dv_z}{dr}=\frac{A}{r}$$

$$\Rightarrow v_z(r)=A\cdot\ln(r)+B$$

Randvillkor:

$$v_z(r=r_1)=V \quad\Rightarrow\quad A\cdot\ln(r_1)+B=V \qquad (1)$$

$$v_z(r=r_2)=0 \text{ (no-slip)} \quad\Rightarrow\quad A\cdot\ln(r_2)+B=0 \qquad (2)$$

Ekvation (2) ger: $B=-A\cdot\ln(r_2)$

Insättning i ekv. (1) ger

$$A\cdot\ln(r_1)-A\cdot\ln(r_2)=V \quad\Leftrightarrow\quad A\cdot\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)=V$$

$$\Leftrightarrow A=\frac{V}{\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)}=\frac{1,0}{\ln\left(\frac{0,02}{0,05}\right)}\approx\frac{1,0}{-0,916}\approx-1,09$$

$\Rightarrow$

5

CHALMERS	Anonymous code / Anonym kod: TME055-13	Points for question (to be filled in by teacher) / Poäng på uppgiften (ifylles av lärare)	Consecutive page no. / Löpande sid nr: 13 Question no. / Uppgift nr: P1, forts

Då blir $B = -A \cdot \ln(r_2) \approx -(-1{,}09)\ln(0{,}05) \approx -3{,}27$

$\Rightarrow \; v_z(r) \approx -1{,}09 \cdot \ln(r) - 3{,}27. \qquad (= A \cdot \ln(r) + B)$

Skjuvspänningen som verkar på slangen ges

av $\tau_w = \left. \mu \frac{dv_z}{dr} \right|_{r=r_1}$ $[N/m^2]$

som blir $\tau_w = \mu \frac{d}{dr}\left(A \cdot \ln(r) + B\right)_{r=r_1} = \mu \cdot \frac{A}{r_1}$

Den totala kraften som verkar på slangen ges sedan av:

$F = \tau_w \cdot \overset{\text{arean}}{A} = \tau_w \cdot (2\pi r_1 L) = \mu \overset{\text{konstant}}{\frac{A}{r_1}} \cdot 2\pi r_1 L = 2\pi \mu A L$

Med numeriska värden:

$F = 2\pi \mu A L \approx 2\pi \cdot 0{,}4 \cdot (-1{,}09) \cdot 50 \approx -137 [N]$

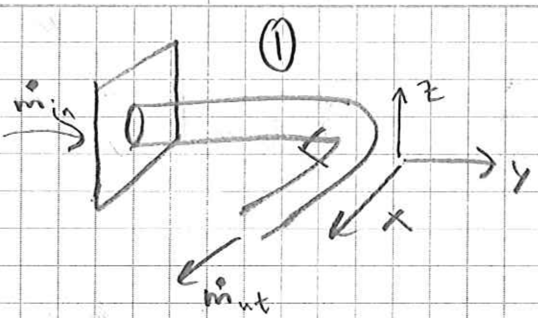
Det krävs alltså en kraft på 137 N för att dra ur slangen rakt ur ledningen.

7p !

5

CHALMERS	Anonymous code / Anonym kod: TME055-17	Points for question (to be filled in by teacher) / Poäng på uppgiften (ifylles av lärare)	Consecutive page no. / Löpande sid nr: 6 — Question no. / Uppgift nr: P2

1



Vi har $\dot{m}_{in} = \rho A v_{in}$, $\dot{m}_{ut} = \rho A v_{ut}$

där $A = \pi \cdot (0,1)^2 = 0,031 \text{ m}^2$, $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, $v_{in} = v_{ut} = 10 \text{ m/s} \equiv v$

Kraften på röret blir −(kraften på vattnet):

$-\mathbb{F} = \dot{m}_{ut} \cdot \mathbb{v}_{ut} - \dot{m}_{in} \cdot \mathbb{v}_{in} = \rho A v^2 (\hat{x} - \hat{y})$

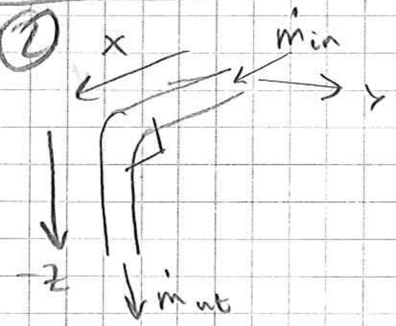
och den verkar i punkten $x = 0$, $y = 1,0 \text{ m}$, $z = 0$

Momentet blir $\mathbb{r} \times \mathbb{F} = 1,0 \hat{y} \times (\rho A v^2)(\hat{x} - \hat{y}) =$

$= +\rho A v^2 \hat{z} \equiv \mathbb{M}_1$

dvs. kring z-axeln.

2



Som innan har vi $\dot{m}_{in} = \dot{m}_{ut} = \rho A v$

$\Rightarrow -\mathbb{F} = \dot{m}(\mathbb{v}_{ut} - \mathbb{v}_{in}) = \rho A v^2 (-\hat{z} - \hat{x})$

Denna verkar i punkten $x = 0,75 \text{ m}$, $y = 1,0 \text{ m}$, $z = 0$

$\Rightarrow \mathbb{M}_2 = \mathbb{r} \times \mathbb{F} = (0,75 \hat{x} + 1,0 \hat{y}) \times (+\rho A v^2 (+\hat{z} + \hat{x})) =$

$= \rho A v^2 (-0,75 \hat{y} + \hat{x} - \hat{z})$

7.

$\Rightarrow \mathbb{M}_{tot} = \mathbb{M}_1 + \mathbb{M}_2 = \rho A v^2 (+\hat{x} - 0,75 \hat{y})$

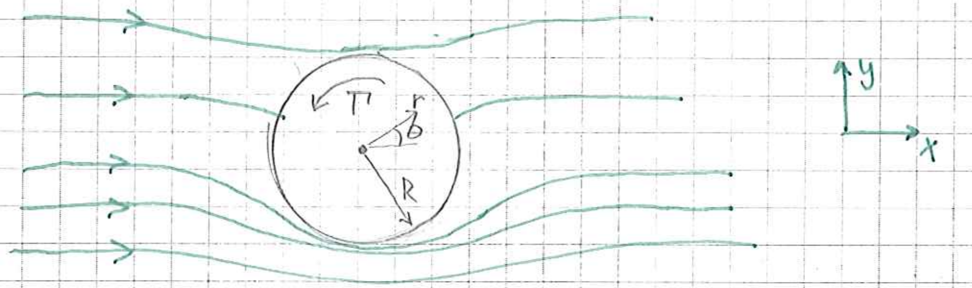
$\Rightarrow$ Torsionsmomentet $= \mathbb{M}_{tot} \cdot \hat{y} = \frac{-3}{4} \rho A v^2 = -2325$ Nm

Böjmomentet $= \mathbb{M}_{tot} \cdot \hat{x} = +\rho A v^2 = +3100$ Nm

Answer only one question on this page. Do not write on the back of this paper
Behandla endast en uppgift på detta blad. Skriv ej på baksidan

5

CHALMERS	Anonymous code / Anonym kod: TME055-16	Points for question (to be filled in by teacher) / Poäng på uppgiften (ifylles av lärare)	Consecutive page no. / Löpande sid nr: 14 — Question no. / Uppgift nr: P3



Strömfunktionen ges av

$$\psi = V_\infty r \cdot \sin(\theta) - \frac{\mu}{2\pi}\frac{\sin(\theta)}{r} - \frac{\Gamma}{2\pi}\ln\left(\frac{r}{R}\right)$$

där $\Gamma = 2\pi R V_\infty$ och $\mu = 2\pi R^2 V_\infty$.

Bestäm trycket kring cylindern samt lyftkraften på den.

<u>Lösning:</u>

Vi har att

$$\begin{cases} V_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = V_\infty\cos(\theta) - \frac{R^2 V_\infty}{r^2}\cos(\theta) = V_\infty\cos(\theta)\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right) \\ V_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial r} = -V_\infty\sin(\theta) - \frac{R^2V_\infty}{r^2}\sin(\theta) + \frac{R\,V_\infty}{r} = -V_\infty\sin(\theta)\left(1+\frac{R^2}{r^2}\right) + \frac{RV_\infty}{r} \end{cases}$$

På cylinderns yta $(r=R)$ får vi

$$\begin{cases} V_r = 0 \\ V_\theta = -2V_\infty\sin(\theta) + V_\infty \end{cases}$$

Bernoullis ekvation för en strömlinje utmed ytan ger då

$$P_\infty + \frac{\rho}{2}V_\infty^2 = \underbrace{P_s}_{\text{tryck vid ytan}} + \frac{\rho}{2}\left(-2V_\infty\sin(\theta)+V_\infty\right)^2 = P_s + \frac{\rho}{2}\left(4V_\infty^2\sin^2(\theta) - 4V_\infty^2\cdot\sin(\theta) + V_\infty^2\right)$$

Så att

$$\boxed{P_s - P_\infty = 2\rho V_\infty^2\left(\sin^2(\theta) - \sin(\theta)\right)}$$

Om cylinderns längd är b ges lyftkraften av

$$L = -\int_0^{2\pi}(P_s - P_\infty)Rb\underbrace{\sin(\theta)}_{\text{ty } \hat{y} = \hat{r}\sin(\theta)}d\theta = -2\rho R b V_\infty^2\int_0^{2\pi}\left(\sin^2(\theta) - \sin(\theta)\right)\sin(\theta)\,d\theta$$

5

CHALMERS	Anonymous code / Anonym kod: TME055-16	Points for question (to be filled in by teacher) / Poäng på uppgiften (ifylles av lärare)	Consecutive page no. / Löpande sid nr: 15
			Question no. / Uppgift nr: P3

Eftersom vi integrerar över en hel period blir integralerna över de udda potenserna av sinus noll, så

$$L = 2\rho R b V_\infty^2 \int_0^{2\pi} \sin^2(\theta)\, d\theta = 2\rho R b V_\infty^2 \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin(2\theta)}{4}\right] = 4\pi\rho R b V_\infty^2$$

Svar: Lyftkraften är $\boxed{L = 4\pi\rho R b V_\infty^2}$

7p