

Tentamen i TME010 Mekanik TD/TM, 2025-08-27 kl. 14.00–18.00

Jourhavande: Linnéa Jern tel. 0706-560943 (salarna besöks 15.00 och 16.30)

Lösningar anslås på kurshemsidan senast den 28/8.

Preliminärt rättningsresultat anslås på M2 senast den 19/9.

Rättningsgranskning och utlämning av tentor sker på M2, avd. Dynamik, 25/9 samt 29/9 kl. 12.00–13.00.

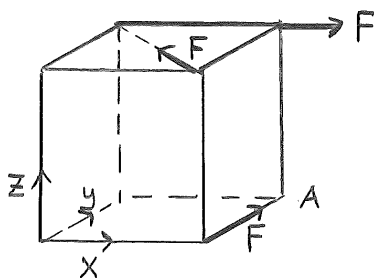
Tillåtna hjälpmedel: Formelsamling i mekanik av M.M. Japp (delas ut vid tentan),
Matematiska handböcker t ex Beta, Matte 4 (delas ut vid tentan),
Chalmersgodkänd räknare är tillåten.

Betygsgränser: Uppgift 1-5 ger maximalt 3 poäng vardera. Uppgift 6-8 ger maximalt 5 poäng vardera. Betyget på tentamen ges enligt följande tabell:

		Poäng på uppgift 1–5 (inkl. bonuspoäng)							
		0–7	8	9	10	11	12	13–15	16–19
Poäng på uppgift 6–8	0–3	U	U	U	U	U	3	3	3
	4–7	U	U	U	U	3	3	4	4
	8–9	U	U	U	3	3	4	4	5
	10–11	U	U	3	3	4	4	5	5
	12–15	U	3	3	4	4	5	5	5

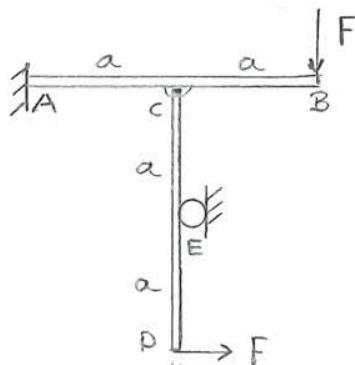
UPPSTÄLLDA EKVATIONER SKALL MOTIVERAS.

1.



Tre stycken krafter, vardera med belopp F , verkar på ett kubiskt rätblock med kantlängder a enligt figur. Bestäm systemets
a) kraftsumma, (1 poäng)
b) momentsumma med avseende på punkten A. (2 poäng)

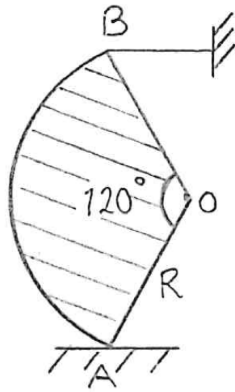
2.



En struktur är sammansatt av två *masslösa* stänger, AB och CD, med längder $2a$. Stängerna är förbundna med en friktionsfri led C.

a) Frilägg AB och CD var för sig. (1 poäng)
b) Ställ upp de jämviktsekvationer som behövs för att kunna bestämma alla stödreaktionerna i A och E samt inre krafterna i leden C. (2 poäng)
(Observera att ekvationerna till b) *inte* behöver lösas.)

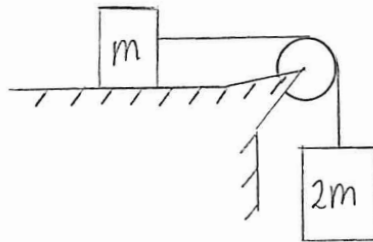
3.



En skiva med massa m har formen av en cirkelsektor med radie R och tjocklek b . Skivans medelpunktsvinkel är 120° enligt figur. Skivan vilar på ett strävt underlag vid A medan det fäster en horisontell lina i B. B är rakt ovanför A.

- Bestäm horisontella avståndet till skivans tyngdpunkt mätt från spetsen O. (1 poäng)
- Frilägg skivan och ställ upp de ekvationer ur vilka minsta tillåtna friktionskoefficient för möjlig jämvikt kan bestämmas. (2 poäng)
(Observera att ekvationerna *inte* behöver lösas, men det skall vara möjligt att bestämma den sökta storheten uttryckt i kända storheter.)

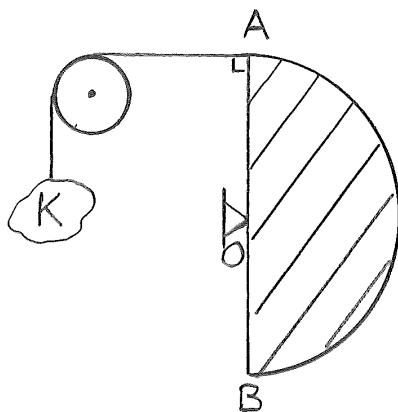
4.



En hängande kropp, massa $2m$, är förbunden med en låda, massa m . Lådan är på ett strävt underlag, friktionskoefficient $\mu = 0.5$ ($\mu = \mu_s = \mu_k$). Systemet släpps från vila. Bestäm för den hängande massan

- accelerationen, (2 poäng)
- farten då den fallit sträckan L . (1 poäng)

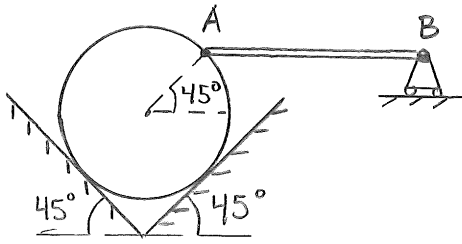
5.



Figuren visar en homogen halvsfär, massa m och radie R , som är friktionsfritt vridbar kring O. En kropp K hänger i en lina som löper över en trissa, radie r . Linan fäster i halvsfären vid A.

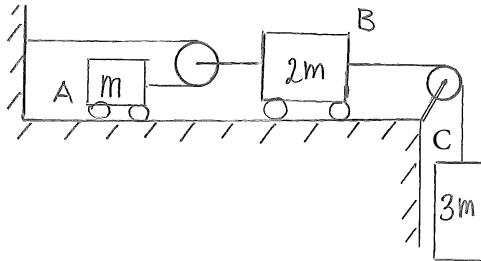
- Bestäm massan hos K om systemet är i jämvikt. (1 poäng)
- Om linan plötsligt klipps, bestäm omedelbart därefter halvsfärens vinkelacceleration. (1 poäng)
- Bestäm i läget enligt b) accelerationen hos punkt B (storlek och riktning). (1 poäng)

6.



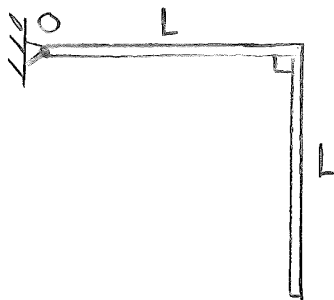
En homogen cylinder (massa m) stöder mot två sträva lutande plan, båda med lutningsvinkeln 45° . Friktionskoefficienten är $\mu_s = 0,50$ vid båda kontaktställena. En smal stång AB är fäst vid cylindern med hjälp av en friktionsfri led i A. Stången är dessutom lagrad i ett rullager i B. Hur stor får stångens massa högst vara för att jämvikt skall vara möjlig i det läge som visas i figuren (stång horisontell)? (5 poäng)

7.



Tre kroppar A, B och C med massor enligt figur är förenade via lätta otänjbara linor och trissor. Kropparna A och B kan röra sig friktionsfritt utmed ett horisontalplan. Bestäm kraften i linan mellan B och C. (5 poäng)

8.



En kropp har massa m och består av två lika stänger, vardera med längd L , ihopsatta i rät vinkel enligt figuren. Kroppen kan rotera friktionsfritt runt en horisontell axel i O och släpps från vila i det visade läget. Hur stort är beloppet av kraften i upphängningspunkten O när kroppen roterat ett kvarts varv? (5 poäng)

1.) a/ $\mathbb{F}_1 = F\mathbf{e}_x$ $\mathbb{F}_2 = F\mathbf{e}_y$ $\mathbb{F}_3 = (-F/\sqrt{2}, F/\sqrt{2}, 0)$

$$\Sigma \mathbb{F} = F(1 - 1/\sqrt{2}, 1 + 1/\sqrt{2}, 0) //$$

b/ $\Sigma M_A = M_{A,1} + M_{A,2} + M_{A,3}$ (från 3 krafter)

$$M_{A,1} = Fa\mathbf{e}_y \text{ (ses i figur)}$$

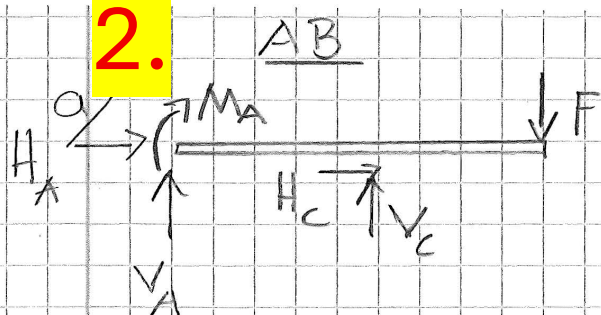
$$M_{A,2} = 0 \text{ (}\mathbb{F}_2 \text{ går genom A)}$$

$$M_{A,3} = \mathbf{r} \times \mathbb{F}_3 \text{ där } \mathbf{r} = (0, -a, a)$$

$$M_{A,3} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 0 & -a & a \\ -F/\sqrt{2} & F/\sqrt{2} & 0 \end{vmatrix} = Fa(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$$

$$\Sigma M_A = Fa(-1/\sqrt{2}, 1 - 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}) //$$

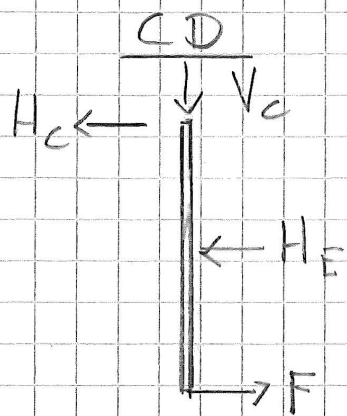
2.



$$\rightarrow : H_A + H_C = 0 \quad (1)$$

$$\uparrow : V_A + V_C - F = 0 \quad (2)$$

$$\curvearrowleft : F \cdot 2a - V_C a + M_A = 0 \quad (3)$$



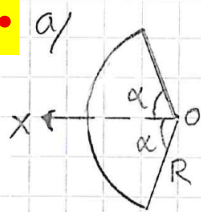
$$\rightarrow : F - H_C - H_E = 0 \quad (4)$$

$$\uparrow : -V_C = 0 \quad (5)$$

$$\curvearrowleft : H_E a - F \cdot 2a = 0 \quad (6)$$

$$[H_A = F; V_A = F; M_A = -2Fa; H_E = 2F; H_C = -F; V_C = 0]$$

3.

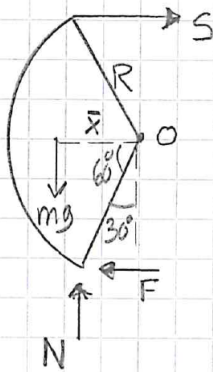


Vi har $\alpha = 60^\circ = \pi/3$ rad. FS s.15 fall:

$$\bar{x} = \frac{2R \sin \alpha}{3\alpha} \quad (1) \text{ där } \alpha \text{ i radianer,}$$

$$(1) \text{ ger } \bar{x} = \frac{2R \cdot \sqrt{3}/2}{3 \cdot \pi/3} = R \frac{\sqrt{3}}{\pi} \approx 0,55R$$

b)



$$\rightarrow: S - F = 0 \quad (1)$$

$$\uparrow: N - mg = 0 \quad (2)$$

$$\circlearrowleft: N \cdot R \sin 30^\circ + F R \cos 30^\circ + S R \cos 30^\circ - mg \bar{x} = 0 \quad (3)$$

$$F/N \leq \mu_s \quad (4)$$

$$[(2) \Rightarrow N = mg; (1) \text{ och } (3) \Rightarrow S = F = mg(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2\sqrt{3}})];$$

$$(4) \Rightarrow \mu_s \geq (\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2\sqrt{3}}) \approx 0,03]$$

4.

a/ $\frac{m}{2}$ $\uparrow: N - mg = 0 \Rightarrow N = mg \quad (1)$

$$\rightarrow: S - F = ma \quad (2)$$

$\frac{2m}{2}$ $\downarrow: 2mg - S = 2ma \quad (3)$

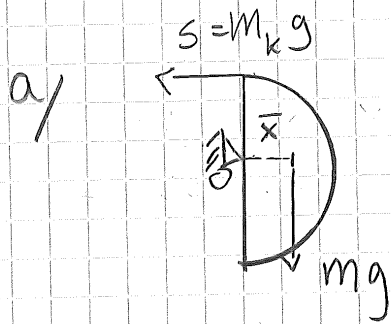
$$(2) + (3) \Rightarrow 2mg - F = 3ma. \quad F = \mu N \text{ då glid,}$$

$$\text{så } (1) \Rightarrow 2mg - \mu mg = 3ma \Rightarrow a = g/2 //$$

b/ $\underline{a} = dv/dt = \underline{v dv/ds} \Rightarrow a ds = v dv \Rightarrow$

$$\int_0^L g/2 ds = \int_0^v v dv \Leftrightarrow gL/2 = v^2/2 \rightarrow v = \sqrt{gL} // \text{ (Energiekv. också möjlig.)}$$

5.



$$\vec{O}: mg \cdot \bar{x} - m_k g \cdot R = 0 \quad (1)$$

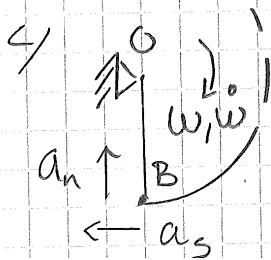
$$\bar{x} = 3R/8 \quad [FS \leq 18 \text{ fall 2}]$$

$$(1) \Rightarrow m_k = 3m/8 //$$

b/ Linan klippas $\Rightarrow S = 0$.

$$\vec{O}: mg \bar{x} = I_o \dot{\omega} \quad (2) \quad I_o = \frac{9}{5} m R^2 \quad [FS \leq 18]$$

$$(2) \Rightarrow \dot{\omega} = mg \bar{x} / I_o = 15g / (16R) //$$

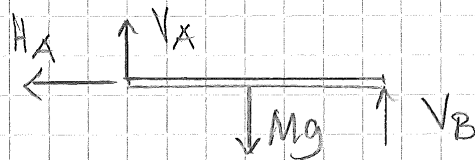
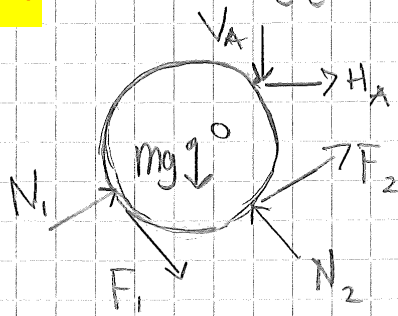


$$a_n = R \omega^2 = 0 \quad (\omega = 0)$$

$$a_s = R \dot{\omega} = 15g / 16 //$$

6.

Förlägg cylinder och stängen separat.



$$\leftarrow : H_A = 0$$

$$\uparrow : V_A + V_B - Mg = 0$$

$$\curvearrowleft : V_B \cdot L - Mg \cdot L/2 = 0$$

$$H_A = 0 // \quad V_A = V_B = Mg/2 //$$

Cylindern (utnyttja att $H_A = 0$)

$$\nearrow : N_1 + F_2 - V_A / \sqrt{2} - mg / \sqrt{2} = 0 \quad (2)$$

$$\nwarrow : N_2 - F_1 - V_A / \sqrt{2} - mg / \sqrt{2} = 0 \quad (3)$$

$$\curvearrowright : F_1 \cdot r + F_2 \cdot r - V_A / \sqrt{2} \cdot r = 0 \quad (4)$$

Vid risk för glidning: $F_1 = \mu_s N_1$ och $F_2 = \mu_s N_2$

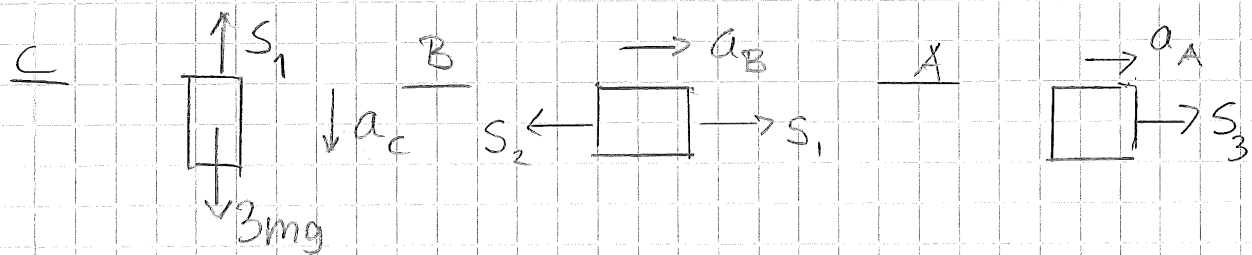
$$\text{Ekv. (3)} - \text{ekv. (2)} \Rightarrow 3N_1 = N_2 \quad (5)$$

$$(4) \Rightarrow V_A = 2\sqrt{2} N_1 \quad (6)$$

$$\text{Insatt i (2) och (3)} \Rightarrow V_A = 4mg$$

$$\text{Ekv. (1)} \Rightarrow M = 8m //$$

7. Fritlägg delarna separat:



$$\downarrow: 3mg - S_1 = 3ma_c \quad \rightarrow: S_1 - S_2 = 2ma_B \quad \rightarrow: S_3 = ma_A$$

(1) (2) (3)

Kinematiskt har man $a_c = a_B$ $a_A = 2a_c$

Trissan $\rightarrow: S_2 - 2S_3 = 0 \Rightarrow$
 $S_2 = 2S_3$

Sätt $a_c = a$ och $S_1 = S$:

$$(1) \Rightarrow 3mg - S = 3ma \quad (4)$$

$$(2) \Rightarrow S - S_2 = 2ma \quad (5)$$

$$(3) \Rightarrow S_2/2 = m \cdot 2a \quad (6)$$

$$\left. \begin{array}{l} (4) \\ (5) \\ (6) \end{array} \right\} \begin{array}{l} S - S_2 = S_2/2 \Rightarrow \\ S_2 = 2S/3 // \end{array}$$

$$(6) \Rightarrow S/3 = 2ma \quad \left. \begin{array}{l} (4) \\ (5) \end{array} \right\} \begin{array}{l} S/3 = 2mg - 2S/3 \Rightarrow \\ S = 2mg // \end{array}$$

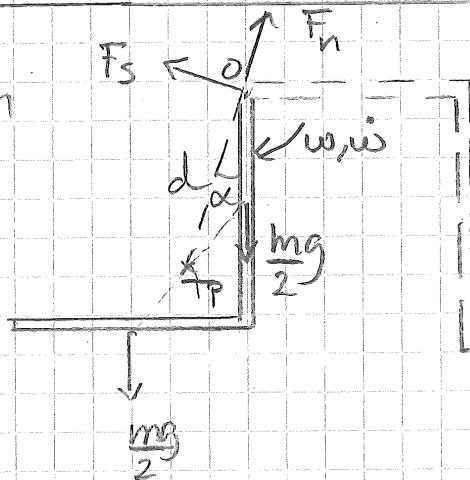
$$(4) \Rightarrow 2mg - 2S/3 = 2ma$$

Linkraften mellan B och C är $2mg //$

8.

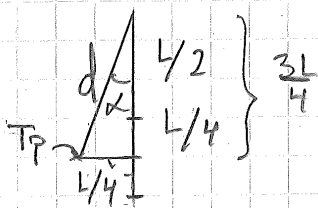
vid rotation

har vi:



$$\uparrow: F_n - mg \cos \alpha = m a_n = m d \omega^2 \quad (1)$$

$$\leftarrow: F_s - mg \sin \alpha = m a_s = m d \dot{\omega} \quad (2)$$

Vad är d och α ?

$$d^2 = \frac{L^2}{16} + \frac{9L^2}{16} = \frac{10L^2}{16} \Rightarrow d = \frac{\sqrt{10}L}{4}$$

$$\tan \alpha = \frac{L/4}{3L/4} = \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha \approx 18.4^\circ$$

$\ddot{\omega}$ ur rotationslagen:

$$\vec{\tau} = -mg/2 \cdot L/2 = I_0 \dot{\omega} \Rightarrow \dot{\omega} = \frac{-mgL/4}{I_0} \quad (3)$$

ω^2 ur energilagen: (Nollnivå vid 0)

$$T_1 = 0 \quad V_1 = -mg/2 \cdot L/2 = -mgL/4$$

$$T_2 = \frac{1}{2} I_0 \omega^2 \quad V_2 = -mg/2 \cdot L/2 - mg/2 \cdot L \\ = -3mgL/4$$

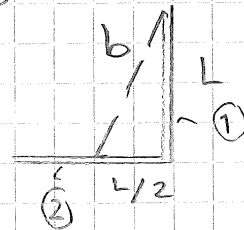
$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \Rightarrow -mgL/4 = \frac{1}{2} I_0 \omega^2 - 3mgL/4$$

$$\Rightarrow \omega^2 = mgL/I_0 \quad (4)$$

Vad är I_0 ? Tag delstänger för sig:

$$I_0 = \underbrace{\frac{1}{3} \left(\frac{m}{2} \right) L^2}_{(1)} + \underbrace{\frac{1}{12} \left(\frac{m}{2} \right) L^2}_{(2)} + \frac{m}{2} b^2 \quad (5)$$

$$\text{där } b^2 = 5L^2/4$$



$$(5) \Rightarrow I_0 = mL^2 5/6$$

$$(3) \Rightarrow \dot{\omega} = -3g/10L \quad (4) \Rightarrow \omega^2 = 6g/5L$$

$$\left. \begin{aligned} (1) &\Rightarrow F_n = mg \cos \alpha + m d \omega^2 \\ (2) &\Rightarrow F_s = mg \sin \alpha + m d \dot{\omega} \end{aligned} \right\} |F| = \sqrt{F_n^2 + F_s^2}$$

där nu α , d , ω^2 och $\dot{\omega}$ kända.