

Tentamen i TME010 Mekanik TD/TM, 2025-04-16 kl. 8.30–12.30

Jourhavande: Anand Joseph Michael (sal), Peter Folkow tel. 1521 alt. 0729-617241 (salarna besöks 9.30 och 11.00)

Lösningar anslås på kurshemsidan senast den 17/4.

Preliminärt rättningsresultat anslås på M2 senast den 6/5.

Rättningsgranskning och utlämning av tentor sker på M2, avd. Dynamik, 19/5 samt 20/5 kl. 12.00–13.00.

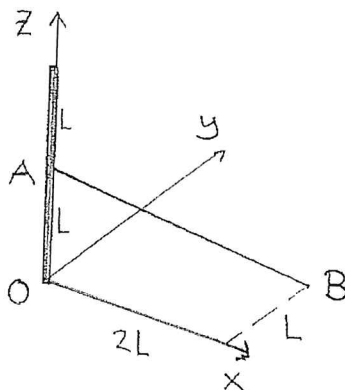
Tillåtna hjälpmedel: Formelsamling i mekanik av M.M. Japp (delas ut på skrivningen), Matematiska handböcker t ex Beta, Matte 4 (delas ut på skrivningen), Chalmersgodkänd räknare är tillåten.

Betygsgränser: Uppgift 1-5 ger maximalt 3 poäng vardera. Uppgift 6-8 ger maximalt 5 poäng vardera. Betyget på tentamen ges enligt följande tabell:

		Poäng på uppgift 1–5 (inkl. bonuspoäng)							
		0–7	8	9	10	11	12	13–15	16–19
Poäng på uppgift 6–8	0–3	U	U	U	U	U	3	3	3
	4–7	U	U	U	U	3	3	4	4
	8–9	U	U	U	3	3	4	4	5
	10–11	U	U	3	3	4	4	5	5
	12–15	U	3	3	4	4	5	5	5

UPPSTÄLLDA EKVATIONER SKALL MOTIVERAS.

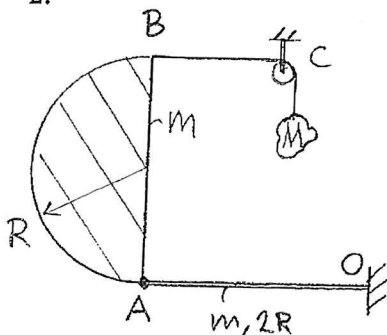
1.



En smal mast, längd $2L$, är förankrad i O och riktad längs z -axeln, se figur. Mitt på masten i A fäster en lina, som i sin andra ände fäster i marken (xy -planet) i B. Linkraftens belopp är given såsom S .

- Uttryck linkraften som verkar på stängen i A som en vektor. (1 poäng)
- Bestäm denna linkrafts moment med avseende på O. (1 poäng)
- Bestäm *linkraftens* komposant längs linjen OA. (1 poäng)

2.

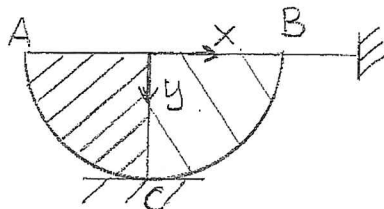


En struktur är sammansatt av en stång OA, massa m och längd $2R$, friktionsfritt förenad med en halvcirkulär yta, massa m och radie R . En massa M är fäst i ena änden av en lina som löper över en trissa i C och fäster i B. Stången OA och lina BC är horisontella, medan sida AB är vertikal.

- Frilägg stången och halvcirkelytan var för sig. (1 poäng)
- Ställ upp de jämviktsekvationer som erfordras för att bestämma massan M och stödreaktioner i O uttryckta i m , g och R . (2 poäng)

(För korrekt svar krävs att samtliga införda krafter ges konsekventa beteckningar, så att det i princip är möjligt att m.h.a. jämviktsekvationerna bestämma de sökta obekanta. Observera att ekvationerna till b) *inte* behöver lösas)

3.



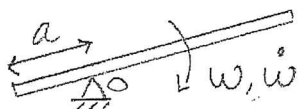
En halvcirkelyta med massa m och radie r består av två delar där den vänstra kvartcirkelytan har dubbelt så stor massa per ytenhet jämfört med den högra kvartcirkelytan. Kroppen är placerad på ett strävt underlag i C. En lina är fäst i B varvid kroppen är i jämvikt med AB horisontell.

a) Bestäm systemet gemensamma tyngdpunkt $(\bar{x}, \bar{y})$. (2 poäng)

b) Bestäm ett uttryck för den minsta möjliga statiska friktionskoefficienten μ_s mellan kroppen och planet, som möjliggör jämvikt.

(1 poäng)

4.

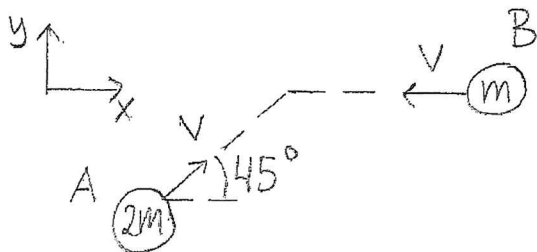


En smal stång, massa m och längd $4a$, roterar vid ett visst ögonblick kring punkten O med känd vinkelhastighet ω och känd vinkelaccelerationen $\dot{\omega}$. Bestäm vid detta läge

a) stångens rörelseenergi, (2 poäng)

b) beloppet av tyngdpunktens acceleration. (1 poäng)

5.

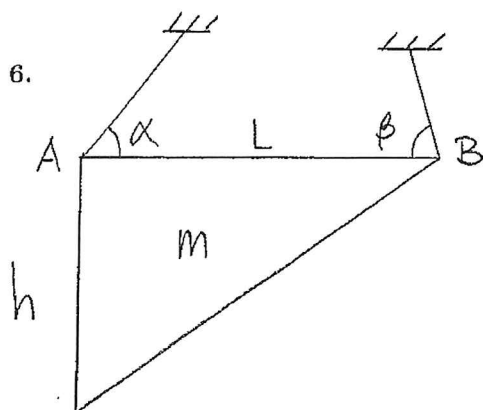


Två kroppar, kropp A med massa $2m$ och kropp B med massa m , glider friktionsfritt på ett underlag med farten v vardera enligt figur. Kropparna kolliderar och fäster därefter i varandra. Bestäm

a) systemets fart i x - respektive y -led efter kollisionen, (2 poäng)

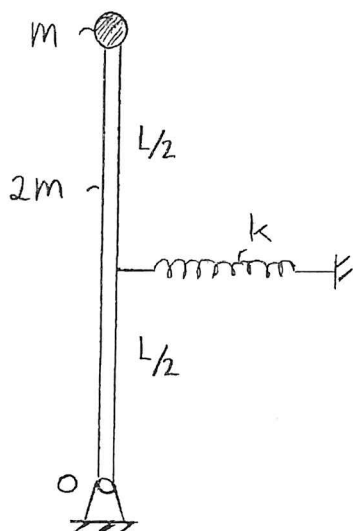
b) den mekaniska energin som går förlorad i kollisionen. (1 poäng)

6.



En triangulär skiva, massa m och sidor L och h , är fäst i två sneda linor i A och B enligt figur. Bestäm ett förhållande mellan vinklarna α och β så att skivans övre sida AB är horisontell vid jämvikt.

7.



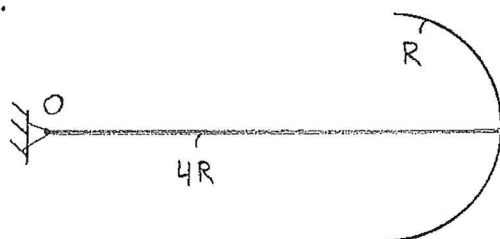
En bättre flaggstång har en tung knopp gjord i guld. Toppens massa är m med försumbar radie, medan själva stängen har massa $2m$ och längd L . För att stabilisera stängen har en horisontell fjäder, styvhet $k = 20mg/L$, fästs på mitten. Fjäders är ospänd då stängen är vertikal.

a) Bestäm flaggstängens vinkelfrekvens vid små svängningar. (3 poäng)

b) Antag att knoppen har farten v åt höger då den vid ett tillfälle passerar det vertikala läget under svängningen. Bestäm vid detta tillfälle stödkrafterna som verkar på flaggstängen i O. (2 poäng)

Ledning: Använd $\sin(\phi) \approx \phi$ och $\cos(\phi) \approx 1$ för små ϕ .

8.



Ett ankare består av en smal rak del, längd $4R$, och en halvcirkulär del med radie R enligt figur. Ankaret fäster vid leden i O och har massa per längdenhet λ . Ankaret släpps från vila då den raka delen är horisontell. Bestäm kraften på ankaret i O då den passerar läget där den raka delen är vertikal.

① a/ $\hat{s} = \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} \quad (1) \quad \vec{AB} = \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} = \frac{(2L, L, -L)}{\sqrt{6}L}$

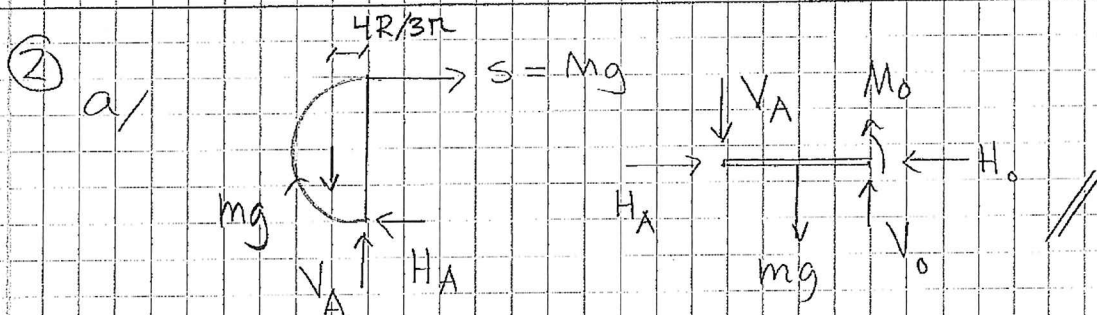
In (1) $\Rightarrow \hat{s} = \frac{1}{\sqrt{6}} (2, 1, -1) //$

b/ $M_O = r \times \hat{s} \quad r = \vec{OA} = (0, 0, L)$

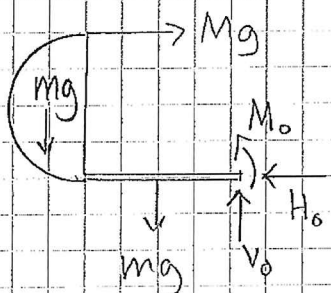
$r \times \hat{s} = \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ 0 & 0 & L \\ \frac{2s}{\sqrt{6}} & \frac{s}{\sqrt{6}} & -\frac{s}{\sqrt{6}} \end{vmatrix} = \frac{SL}{\sqrt{6}} (-1, 2, 0) //$

c/ $S_{OA} = \hat{s} \cdot \hat{e}_{OA} \quad (2) \quad \hat{e}_{OA} = \hat{e}_z = (0, 0, 1)$

$\hat{s}$ från a/ i (2) $\Rightarrow S_{OA} = \frac{s}{\sqrt{6}} (2, 1, -1) \cdot (0, 0, 1) = -\frac{s}{\sqrt{6}} //$



b/ Frilägg hela systemet



$\rightarrow: Mg + H_O = 0 \quad (1)$

$\uparrow: V_O - 2mg = 0 \quad (2)$

$\circlearrowright: Mg \cdot 2R - mg(4R/3\pi + 2R) + M_O = 0 \quad (3)$

Vänster del: $\hat{A}: Mg \cdot 2R - mg \cdot 4R/3\pi = 0 \quad (4)$

4 ekv., 4 obekanta $[M, H_O, V_O, M_O]$

$[M = m \cdot 2/3\pi; H_O = 2mg/3\pi; V_O = 2mg; M_O = -3mgR] //$

③ a/ Antag massa/ytenhet:

σ för höger del; 2σ för vänster del.

Höger del: $m_H = \sigma A_H = \sigma r^2 \pi / 2$

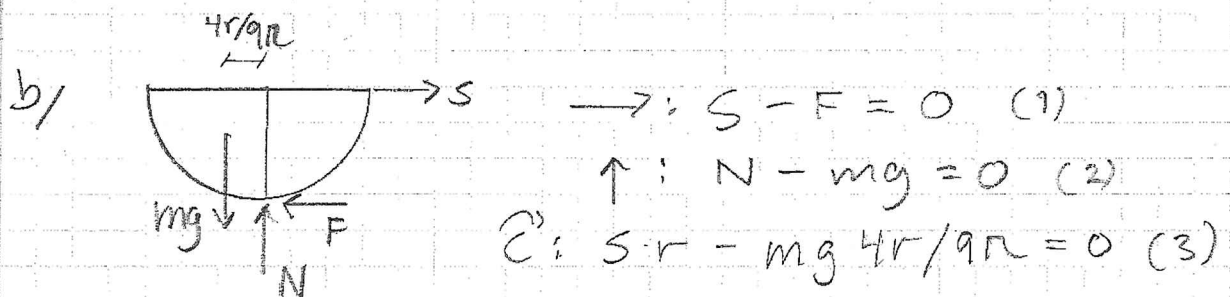
$\bar{x}_H = 4r/3\pi$ $\bar{y}_H = 4r/3\pi$

Vänster del: $m_V = 2\sigma A_V = \sigma r^2 \pi$

$\bar{x}_V = -4r/3\pi$ $\bar{y}_V = 4r/3\pi$

$\bar{x} = \frac{m_H \cdot \bar{x}_H + m_V \bar{x}_V}{m_H + m_V} = -\frac{4r}{9\pi} //$

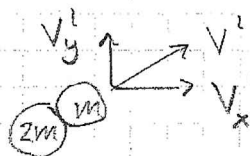
$\bar{y} = \frac{m_H \cdot \bar{y}_H + m_V \bar{y}_V}{m_H + m_V} = \frac{4r}{3\pi} //$



$(1) - (3) \Rightarrow N = mg; F = S = mg \cdot 4/9\pi$

$|F|/|N| \leq \mu_s \Rightarrow \mu_{s,min} = F/N = 4/(9\pi) //$

⑤ Antag efter stöt



a/ Inga yttre krafter på systemet $\Rightarrow p$ bevaras

$P_x: 2m \cdot V/\sqrt{2} - mV = 3m V'_x$

$P_y: 2m V/\sqrt{2} = 3m V'_y$

$\Rightarrow V'_x = \frac{V(\sqrt{2}-1)}{3} ; V'_y = \frac{V\sqrt{2}}{3}$

$$b/ \quad T_1 + V_1 + W^{(ik)} = T_2 + V_2 \quad (1) \quad V_1 = V_2 = 0,$$

$$T_1 = \frac{1}{2} 2m v^2 + \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} 3m v^2$$

$$T_2 = \frac{1}{2} 3m (v')^2 = \frac{1}{2} 3m [(v'_x)^2 + (v'_y)^2] =$$

$$= \frac{1}{2} 3m \left[\frac{1}{9} (2+1-2\sqrt{2}) + \frac{1}{9} 2 \right] v^2 =$$

$$\frac{1}{2} 3m \left[\frac{5-2\sqrt{2}}{9} \right] v^2$$

$$W^{(ik)} = T_2 - T_1 = -\frac{1}{2} 3m \left[\frac{4+2\sqrt{2}}{9} \right] v^2 = -\left[\frac{2+\sqrt{2}}{3} \right] m v^2 //$$

$$\textcircled{4} \quad a/ \quad T = \frac{1}{2} I_0 \omega^2; \quad I_0 = \bar{I} + m a^2 =$$

$$= \frac{1}{12} m (4a)^2 + m a^2 = 7m a^2 / 3$$

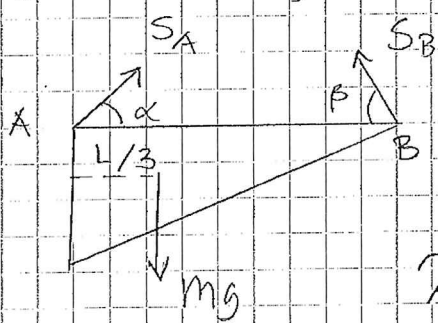
$$T = 7m a^2 \omega^2 / 6 //$$



$$\bar{a}_s = a \dot{\omega} \quad \bar{a}_n = a \omega^2$$

$$|\bar{a}| = \sqrt{\bar{a}_s^2 + \bar{a}_n^2} = a \sqrt{\dot{\omega}^2 + \omega^4} //$$

⑥ Fri lagg skivan



$$\rightarrow: S_A \cos \alpha - S_B \cos \beta = 0 \quad (1)$$

$$\uparrow: S_A \sin \alpha + S_B \sin \beta - mg = 0 \quad (2)$$

$$\curvearrow A: mg \cdot L/3 - S_B \sin \beta \cdot L = 0 \quad (3)$$

$$(3) \Rightarrow S_B \sin \beta = mg/3 \quad (4)$$

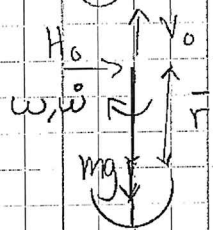
$$(2) \Rightarrow S_A \sin \alpha = 2mg/3 \quad (5)$$

$$(4) \text{ och } (5) \quad | \quad (1) \Rightarrow$$

$$2mg/3 \cdot \cot \alpha - mg/3 \cot \beta = 0 \Rightarrow$$

$$2 \cot \alpha = \cot \beta \Rightarrow \tan \alpha = 2 \tan \beta //$$

⑧ Då ankaret är vertikalt:



$$\uparrow: V_0 - mg = m\bar{r}\omega^2 \quad (1)$$

$$\leftarrow: -H_0 = m\bar{r}\dot{\omega} \quad (2)$$

ω max vid detta läge, så $\dot{\omega} = 0$.

[$\Sigma M_0 = I_0 \dot{\omega}$ ger också $\dot{\omega} = 0$ då $\Sigma M_0 = 0$]

$$(1) \Rightarrow V_0 = m(g + \bar{r}\omega^2) \quad (3) \text{ Bestäm } m, \bar{r}, \omega.$$

$$m = \lambda L_{\text{tot}} = \lambda \cdot 4R + \lambda R\pi = \lambda R(4 + \pi) \quad (4)$$

$$\bar{r} = \frac{\lambda 4R \cdot 2R + \lambda R\pi \cdot (3R + 2R/\pi)}{\lambda R(4 + \pi)} = \frac{(10 + 3\pi)R}{(4 + \pi)} \quad (5)$$

där FS s. 17 fall 4 används för halvringen.

$$\omega \text{ ur energilagen: } T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \quad (6)$$

$$T_1 = 0 \quad (\text{vila}) \quad \bar{V}_1 = 0 \quad (\text{nollläge})$$

$$T_2 = \frac{1}{2} I_0 \omega^2 \quad \bar{V}_2 = -mg\bar{r}$$

$$(6) \Rightarrow \omega^2 = 2mg\bar{r} / I_0 \quad (7)$$

m ur (4), $\bar{r}$ ur (5).

$$I_0 = \frac{1}{12} \cdot (\lambda 4R) (4R)^2 + I_{0, \text{cyl}} \quad (8)$$

$$I_{0, \text{cyl}} = \underbrace{\left(1 - 4/\pi^2\right) \lambda R\pi R^2}_{\bar{I}_{\text{cyl}}} + \underbrace{\lambda R\pi \left(2R/\pi + R\right)^2}_{\text{Stjärna}}$$

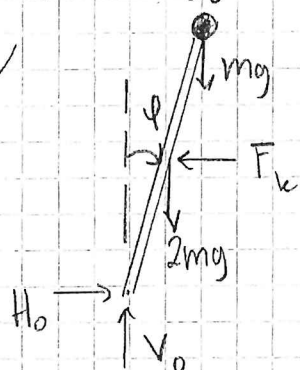
$$= \lambda R^3 \pi \left(10 + 12/\pi\right), \quad (8) \Rightarrow I_0 = \lambda R^3 \left(10\pi + 52/3\right) \quad (9)$$

$$(3) \text{ and } (7) \Rightarrow V_0 = mg \left[1 + 2m\bar{r}^2 / I_0\right] \text{ using (4), (5), (9)} //$$

⑦

Frilägg:

a/



$$M_o = I_o \dot{\omega}$$

$$\approx: 2mg \frac{L}{2} \sin \varphi + mg L \sin \varphi$$

$$- F_k \frac{L}{2} \cos \varphi = I_o \dot{\omega} = I_o \ddot{\varphi} \quad (1)$$

$$F_k = k \frac{L}{2} \sin \varphi$$

Insatt ovan, med $\sin \varphi \approx \varphi$ & $\cos \varphi \approx 1$:

$$2mgL \cdot \varphi - k \frac{L^2}{4} \cdot \varphi = I_o \ddot{\varphi} \Rightarrow [k = 20mg/L] \Rightarrow$$

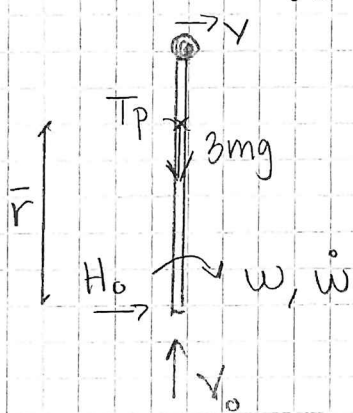
$$\ddot{\varphi} + \underbrace{3mgL/I_o}_{\omega_f^2} \cdot \varphi = 0 \quad (2)$$

$$I_o = I_{o,2m} + I_{o,m} = \frac{1}{3} 2mL^2 + mL^2 = \frac{5}{3} mL^2$$

$$\text{Insatt i (2)} \Rightarrow \omega_f^2 = 9g/5L \Rightarrow \omega_f = 3\sqrt{9/5L} //$$

b/ Frilägg:

$$v = L\omega$$



$$\rightarrow: H_o = 3m\bar{a}_s = 3m\bar{r}\dot{\omega} \quad (3)$$

$$\downarrow: 3mg - V_o = 3m\bar{a}_n = 3m\bar{r}\omega^2 \quad (4)$$

Vi' har $\dot{\omega} = 0$, t.ex. ur

$M_o = I_o \dot{\omega}$ där $M_o = 0$, eller

ur (2) där $\ddot{\varphi} = 0$ då $\varphi = 0$.

$$H_o = 0 \text{ ur (3)} // V_o = 3m(g - \bar{r}v^2/L^2) \text{ ur (4)}$$

$$\bar{r} = (2m \frac{L}{2} + mL)/3m = 2L/3 \Rightarrow V_o = 3mg - 2m v^2/L //$$