Tentamen i TME010 Mekanik TD/TM, 2025-01-16 kl. 8.30–12.30
Jourhavande: Peter Folkow tel. 1521 alt. 0729-617241 (salarna besöks 9.30 och 11.00)
Lösningar anslås på kurshemsidan senast den 17/1.
Preliminärt rättningsresultat anslås på M2 senast den 6/2.
Rättningsgranskning och utlämning av tentor sker på M2, avd. Dynamik, 19/2 samt 20/2 kl. 12.00–13.00.

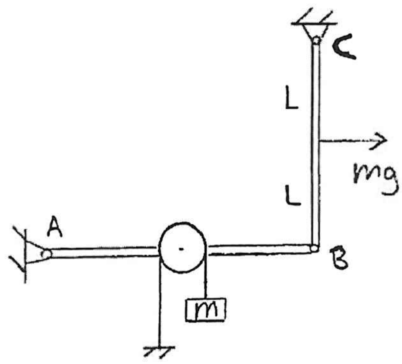
Tillåtna hjälpmedel: Formelsamling i mekanik av M.M. Japp (delas ut på skrivningen), Matematiska handböcker t ex Beta, Matte 4 (delas ut på skrivningen), Chalmersgodkänd räknare är tillåten.

Betygsgränser: Uppgift 1-5 ger maximalt 3 poäng vardera. Uppgift 6-8 ger maximalt 5 poäng vardera. Betyget på tentamen ges enligt följande tabell:

		Poäng på uppgift 1–5 (inkl. bonuspoäng)							
		0–7	8	9	10	11	12	13–15	16–19
Poäng pa uppgift 6–8	0–3	U	U	U	U	U	3	3	3
	4–7	U	U	U	U	3	3	4	4
	8–9	U	U	U	3	3	4	4	5
	10–11	U	U	3	3	4	4	5	5
	12–15	U	3	3	4	4	5	5	5

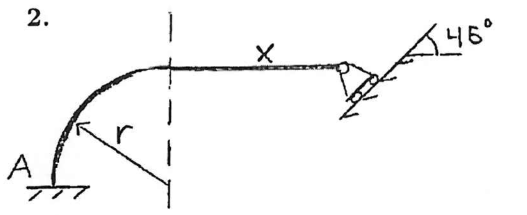
UPPSTÄLLDA EKVATIONER SKALL MOTIVERAS.

1.



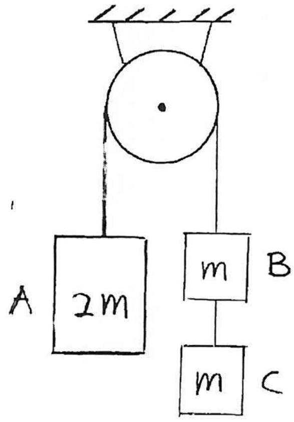
En struktur är sammansatt av två *masslösa* stänger, AB och BC, med längder $2L$. Mitt på stång AB är en masslös trissa fäst. En lina löper över trissan, där ena änden uppbär en massa m. Stängerna är förbundna med friktionsfria leder i A, B och C.
a) Frilägg AB+trissan och BC var för sig. (1 poäng)
b) Ställ upp de jämviktsekvationer som behövs för att kunna bestämma alla obekanta krafter, d.v.s. stödkrafterna i A och C samt inre krafterna i leden B. (2 poäng)
(Observera att ekvationerna till b) *inte* behöver lösas)

2.



En kropp, massa m, består av en kvartscirkelbåge med radie r och en smal rak stång. Friktion råder mellan kroppen och underlaget i stödet vid A.
a) Bestäm den raka stångens längd x (uttryckt i r) så att kroppens tyngdpunkt hamnar på den streckade linjen. (1 poäng)
Ledning: Inför massa per längdenhet λ.
b) Ställ upp de ekvationer som erfordras för att bestämma den minsta friktionskoefficienten μ för jämvikt. (2 poäng)
(Observera att ekvationerna till b) *inte* behöver lösas)

3.

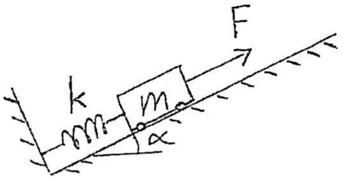


Tre kroppar A, B och C är sammanbundna med linor enligt figur. Linan mellan A ocb B löper över en lätt, friktionsfri trissa. Delkropparna rör sig från början med konstant fart v: A nedåt, B och C uppåt (situation 1). Plötsligt brister linan mellan B och C, och A accelererar nedåt (situation 2). Bestäm linkraften verkande på A enligt

a) situation 1 (linkraften S_1), (1 poäng)

b) situation 2 (linkraften S_2). (2 poäng)

4.

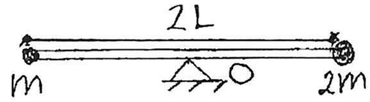


En kropp, massa m, är förbunden med en fjäder, styvhet $k = mg/L$. Kroppen kan rulla förlustfritt längs ett lutande plan, vinkel α. En konstant kraft $F = 4mg$ börjar verka då kroppen är i vila och fjädern är ospänd. Bestäm då kroppen förflyttats sträckan L uppför planet

a) kroppens fart, (2 poäng)

b) kroppens acceleration. (1 poäng)

5.

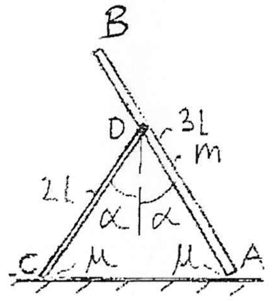


En stel kropp består av två punktmassor, m och $2m$, fästade i vardera änden av en *masslös* stång med längd $2L$ enligt figur. Stangen är på mitten fäst i en friktionsfri led som är vridbar kring en horisontell axel O. Systemet släpps från vila då stången är horisontell. Bestäm vid detta läge

a) systemets vinkelacceleration, (2 poäng)

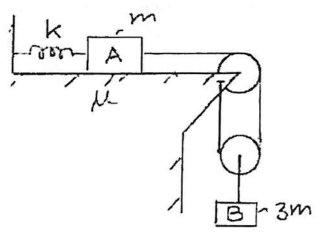
b) accelerationen för massan $2m$. (1 poäng)

6.



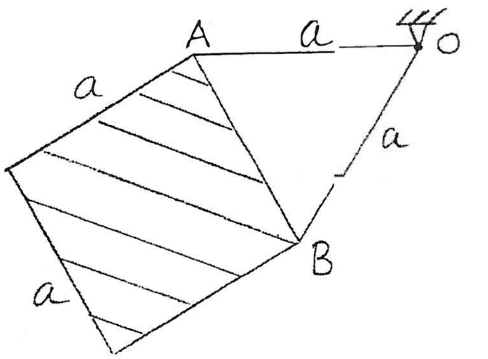
En balk AB med massa m och längd $3L$ står på ett strävt horisontellt underlag. Balken stöds av en masslös stång CD med längd $2L$. Stången fäster i balken i D via en friktionsfri led. Vad är största möjliga vinkel α för jämvikt om den statiska friktionskoefficienten $\mu = 0.5$ vid golvkontakterna i A och C? (5 poäng)

7.



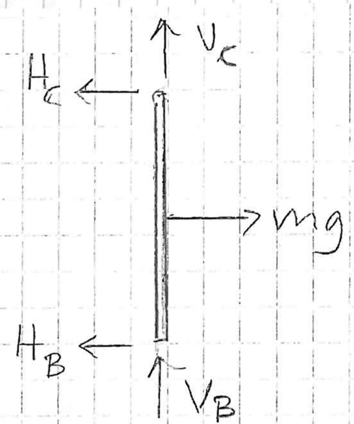
Systemet i figuren består av två kroppar A och B med massor m och $3m$ förenade via lätta linor och trissor. En fjäder k fäster i A enligt figur. Det råder friktion, μ, mellan A och underlaget. Systemet släpps från vila då fjädern är ospänd. Bestäm A:s största hastighet därefter (påbörjad rörelse förutsätts). (5 poäng)

8.



En kvadratisk skiva med sidan a har massan m. I skivan fäster två linor, AO och BO, båda med längden a. Linorna fäster i sin tur i en fix punkt O. Systemet, som kan pendla friktionsfritt i ett vertikalplan, släpps från vila i det läge som visas i figuren (AO horisontell). Bestäm dragkrafterna i respektive lina i det ögonblick då BO är vertikal. (5 poäng)

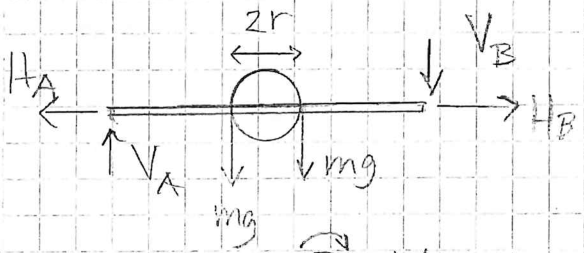
1



$\longrightarrow: mg - H_C - H_B = 0 \quad (1)$

$\uparrow: V_C + V_B = 0 \quad (2)$

$\overset{\curvearrowright}{B}: mgL - H_C\,2L = 0 \quad (3)$



$\longrightarrow: H_B - H_A = 0 \quad (4)$

$\uparrow: V_A - V_B - 2mg = 0 \quad (5)$

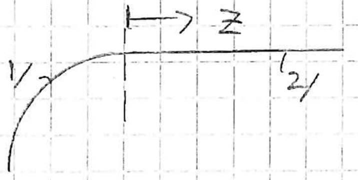
$\overset{\curvearrowright}{B}: V_A \cdot 2L - mg(L+r) - mg(L-r) = 0 \quad (6)$

[$(6) \Rightarrow V_A = mg$; $(5) \Rightarrow V_B = -mg$; $(2) \Rightarrow V_C = mg$;

$(3) \Rightarrow H_C = mg/2$; $(1) \Rightarrow H_B = mg/2$; $(4) \Rightarrow H_A = mg/2$]

2

a/



$m_1 = \lambda L_1 = \lambda r \pi/2$;

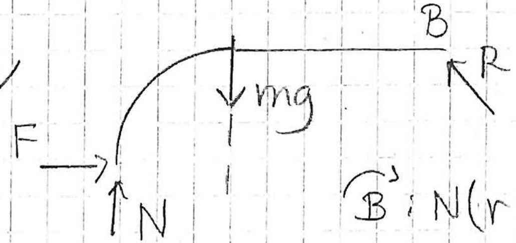
$\bar{z}_1 = -2r/\pi$ [FS s, 15; z]

$m_2 = \lambda L_2 = \lambda x$; $\bar{z}_2 = x/2$

$$\bar{z} = \frac{m_1 \bar{z}_1 + m_2 \bar{z}_2}{(m_1 + m_2)} = \frac{\lambda r \pi/2 \cdot (-2r/\pi) + \lambda x \cdot x/2}{m_1 + m_2} =$$

$$= \lambda\left[-r^2 + x^2/2\right] / (m_1 + m_2) = 0 \Rightarrow x = \sqrt{2}\, r$$

b/



$\longrightarrow: F - R/\sqrt{2} = 0 \quad (1)$

$\uparrow: N - mg + R/\sqrt{2} = 0 \quad (2)$

$\overset{\curvearrowright}{B}: N(r + \sqrt{2}\, r) - F \cdot r - mg\sqrt{2}\, r = 0 \quad (3)$

$F/N \le \mu \Rightarrow \mu_{min} = F/N$ (4)

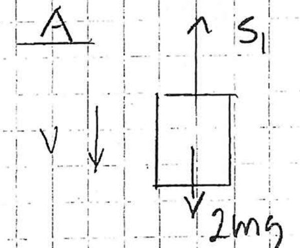
4 ekv. och 4 obekanta [μ_{min}, N, F, R]

[Ekv. (1)-(4) $\Rightarrow \mu_{min} = 1/(1+\sqrt{2})$; $F = mg/(2+\sqrt{2})$

$N = mg(1+\sqrt{2})/(2+\sqrt{2})$; $R = mg/(1+\sqrt{2})$]

---

(3) a/ Frilägg

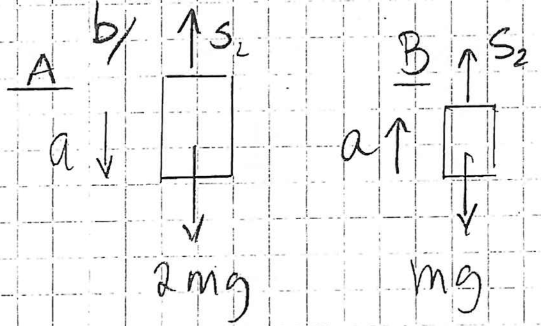


$\downarrow$: $2mg - S_1 = 2m \cdot 0 = 0$

(v konstant) $\Rightarrow S_1 = 2mg$ //

[Precis som statik där v = 0]

b/



A $\downarrow$: $2mg - S_2 = 2ma$ (1)

B $\uparrow$: $S_2 - mg = ma$ (2)

(1) och (2) $\Rightarrow S_2 = 4mg/3$ //

---

(4) a/ Inga förluster p.g.a. friktionsfritt

Energiekv. ger $T_1 + V_1 + W^{(ik)} = T_2 + V_2$ (1)

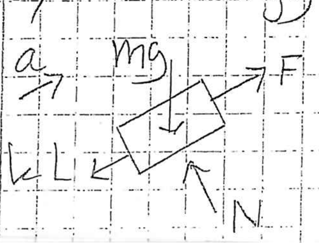
$T_1 = 0$ (vila) $V_1 = 0$ (ospänd fjäder, nolläge)

$T_2 = \frac{1}{2}mv^2$ $V_2 = \frac{1}{2}kL^2 + mgL\sin\alpha$ $W^{(ik)} = 4mgL$

(1) $\Rightarrow 4mgL = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kL^2 + mgL\sin\alpha \Rightarrow [k = mg/L]$

$v = [7gL - 2gL\sin\alpha]^{1/2}$ //

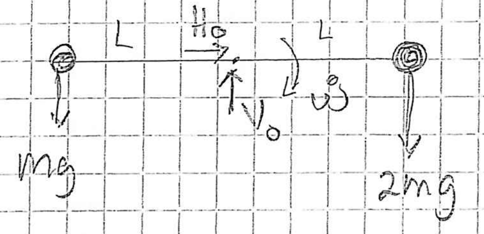
b/ Frilägg



$\nearrow$: $F - kL - mg\sin\alpha = ma \Rightarrow$

$a = [3 - \sin\alpha]\,g$ //

5) a/ Vinkelacc. $\dot{\omega}$ ur $\sum M_0 = I_0 \dot{\omega}$.



$\curvearrowright: 2mgL - mgL = I_0 \dot{\omega}$

$\Rightarrow \dot{\omega} = mgL / I_0 \quad (1)$

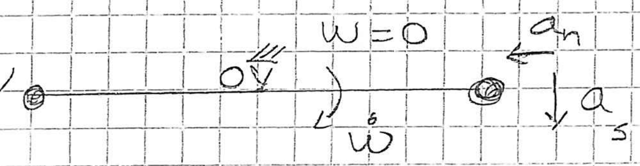
(medurs)

$I_0 = I_{0,2m} + I_{0,m}$

$$\left.\begin{array}{l} I_{0,2m} = \underbrace{\bar{I}_{2m}}_{=0} + 2mL^2 = 2mL^2 \\ I_{0,m} = \bar{I}_m + mL^2 = mL \end{array}\right\} \Rightarrow I_0 = 3mL^2$$

Ins. i (1) $\Rightarrow \dot{\omega} = g/(3L)$ //

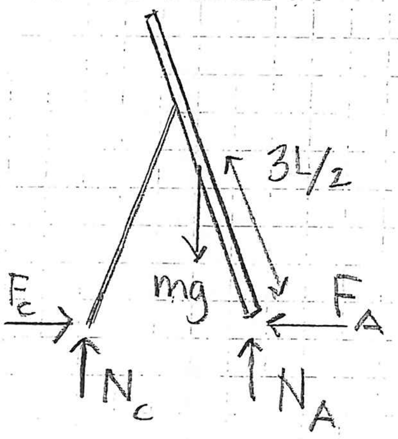
b/



$a_n = L\omega^2 = 0$ // då $\omega = 0$ vid starten.

$a_s = L\dot{\omega}$ = ins. från a/ = $g/3$ //

⑥ Frilägg systemet



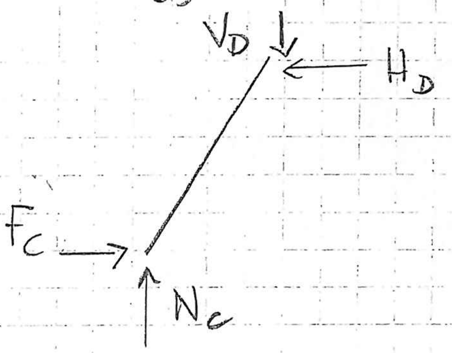
$\rightarrow$: $F_C - F_A = 0$ (1)

$\uparrow$: $N_C + N_A - mg = 0$ (2)

$\curvearrowright A$: $N_C 4L \sin\alpha - mg \, 3L/2 \sin\alpha = 0$ (3)

(3) $\Rightarrow N_C = 3mg/8$; (2) $\Rightarrow N_A = 5mg/8$;

Frilägg CD:



$\curvearrowright D$: $N_C \cdot 2L \sin\alpha - F_C 2L \cos\alpha = 0$

$\Rightarrow F_C = N_C \tan\alpha =$

$3mg/8 \cdot \tan\alpha$;

(1) $\Rightarrow F_A = 3mg/8 \cdot \tan\alpha$;

$F_A / N_A \leq \mu_A \Leftrightarrow 3/5 \tan\alpha \leq \mu_A$;

$F_C / N_C \leq \mu_C \Leftrightarrow \tan\alpha \leq \mu_C$

Då $\mu_A = \mu_C = \mu \Rightarrow \tan\alpha \leq \mu$

(Störst risk att glida vid C jmf. med A)

$\tan\alpha_{max} = \mu = 0{,}5 \Rightarrow \alpha_{max} = \operatorname{atan} 0{,}5 \approx 26{,}6^\circ$ //

Studera energibetraktelse

7

$$T_1 + V_1 + W^{(ik)} = T_2 + V_2 \quad (1)$$

Start från vila, så $T_1 = 0$; $V_1 = 0$
(sätt lägesen. till noll-läge för resp. kropp).

$$T_2 = \frac{1}{2} m V_A^2 + \frac{1}{2} 3m V_B^2 \quad (2)$$

$$V_2 = \frac{1}{2} k x_A^2 - 3mg\, y_B \quad (3)$$

där x_A är A förfl. sidled, o y_B B vert. förfl.

$$W^{(ik)} = -F_A x_A = -\mu m g\, x_A \quad (4)$$

Då V_A är max → V_B är max; sker före vändläget (d.v.s. V_A åt höger, V_B nedåt).

Kinematik ger $x_A = 2 y_B \rightarrow V_A = 2 V_B$ (5)

(5) i (2) → $T_2 = \frac{1}{2} m V_A^2 + \frac{1}{2} 3m (V_A/2)^2 =$

$= \frac{7}{8} m V_A^2$ (6). Med $y_B = x_A/2$ får vi ur (3)

$$V_2 = 1/2\, k x_A^2 - 3/2\, mg\, x_A \quad (7)$$

Ekv. (7), (6), (4) i (1) ⇒

$$-\mu m g\, x_A = \frac{7}{8} m V_A^2 + \frac{1}{2} k x_A^2 - \frac{3}{2} mg\, x_A \Rightarrow$$

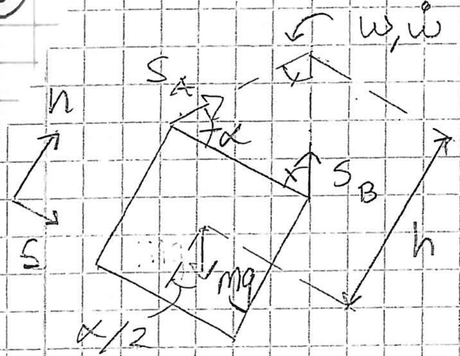
$$\frac{7}{4} m V_A^2 = \underbrace{(3 - 2\mu) mg x_A - k x_A^2}_{f(x_A)} \quad (8)$$

För vilket x_A är V_A max? Jo, då $f'(x_A) = 0$.

$$f'(x_A) = (3 - 2\mu) mg - 2k x_A = 0 \Rightarrow x_A = (3 - 2\mu) mg/(2k)$$

Ins. x_A i (8) ger $V_A = \sqrt{m/7k}\,(3 - 2\mu) g$ //

(8) Fnlägg då BO vertikal. $(\alpha = 60^\circ)$



$\nearrow n: S_A \sin\alpha + S_B \sin\alpha - mg\cos(\alpha/2)$

$= m a_n = m h \omega^2 \quad (1)$

$\searrow s: S_A \cos\alpha - S_B \cos\alpha + mg\sin(\alpha/2)$

$= m a_s = m h \dot{\omega} \quad (2)$

Bestäm h geom., ω ur energilagen och $\dot{\omega}$ ur rotationslagen.

$h = a/2 + a\cos(\alpha/2) = a(1+\sqrt{3})/2 \quad (3)$

E bevaras p.g.a. förlustfritt.

$T_1 = 0$ (vid startläget AO horis.)

$V_1 = -mg\,h\sin(\alpha/2) = \text{ins. } (3) = -mga(1+\sqrt{3})/4$

$T_2 = \frac{1}{2} I_0 \omega^2 \; ; \; V_2 = -mgh\cos(\alpha/2) = -mga(3+\sqrt{3})/4$

$E_1 = E_2 \Leftrightarrow 0 - mga(1+\sqrt{3})/4 = \frac{1}{2} I_0 \omega^2 - mga(3+\sqrt{3})/4$

$\Rightarrow \omega^2 = mga / I_0 \quad (4)$

$\curvearrowleft O: mgh\sin(\alpha/2) = I_0 \dot{\omega} \Rightarrow \text{ins } (3) \Rightarrow$

$\dot{\omega} = mga(1+\sqrt{3})/(4 I_0) \quad (5)$

$I_0 = \bar{I} + mh^2 = \text{ins. } (3) = ma^2/6 + ma^2(1+\sqrt{3})^2/4$

$= ma^2(7+3\sqrt{3})/6 \quad (6)$

Insatt (3) – (6) i (1) och (2) $\Rightarrow$

$S_A \approx 0{,}85\,mg$ // $\quad S_B \approx 0{,}93\,mg$ //