Tentamen i TME010 Mekanik TD, 2024-08-28 kl. 14.00–18.00
Jourhavande: Peter Folkow tel. 1521 alt. 0729-617241 (salarna besöks 15.00 och 16.30)
Lösningar anslås på kurshemsidan senast den 29/8.
Preliminärt rättningsresultat anslås på M2 senast den 18/9.
Rättningsgranskning och utlämning av tentor sker på M2, avd. Dynamik, 24/9 samt 25/9 kl. 12.00–13.00.

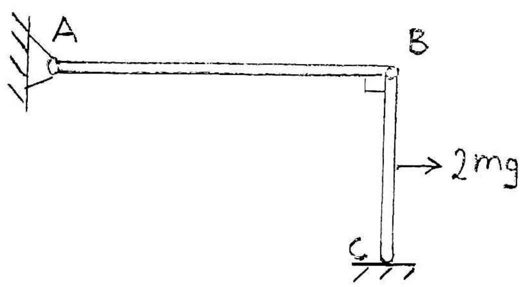
Tillåtna hjälpmedel: Formelsamling i mekanik av M.M. Japp (delas ut vid tentan),
Matematiska handböcker (t ex Beta, Matte 5) eller utdrag därur,
Chalmersgodkänd räknare är tillåten.

Betygsgränser: Uppgift 1-5 ger maximalt 3 poäng vardera. Uppgift 6-8 ger maximalt 5 poäng vardera. Betyget på tentamen ges enligt följande tabell:

		Poäng på uppgift 1–5 (inkl. bonuspoäng)							
		0–7	8	9	10	11	12	13–15	16–19
Poäng på uppgift 6–8	0–4	U	U	U	U	U	3	3	3
	5–8	U	U	U	U	3	3	4	4
	9	U	U	U	3	3	4	4	5
	10–11	U	U	3	3	4	4	5	5
	12–15	U	3	3	4	4	5	5	5

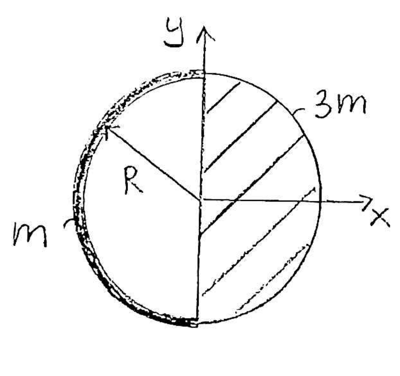
UPPSTÄLLDA EKVATIONER SKALL MOTIVERAS.

1.



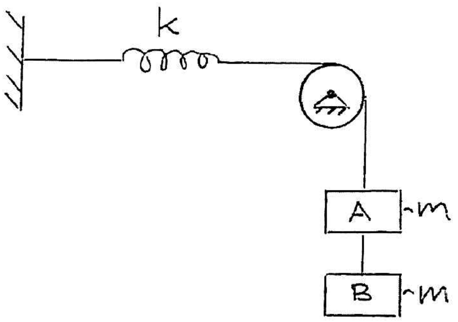
En struktur är sammansatt av två stänger, AB med massa $2m$ och längd $2L$, samt BC med massa m och längd L. Strukturen är friktionsfritt ledad i A och B. Vid C vilar strukturen mot ett *strävt* underlag. En horisontell yttre kraft $2mg$ verkar mitt på stången BC.
a) Frilägg stängerna var för sig. (1 poäng)
b) Ställ upp de ekvationer som erfordras för att bestämma den minsta friktionskoefficienten μ vid C för jämvikt. (2 poäng)
(Observera att ekvationerna till b) *inte* behöver lösas.)

2.



En plan kropp är sammansatt av en halvcirkulär skiva med radie R och massa $3m$ och en halvcirkulär båge med radie R och massa m enligt figuren.
a) Bestäm tyngdpunktens läge. (1 poäng)
b) Bestäm masströghetsmomentet m.a.p. y-axeln. (2 poäng)

3.

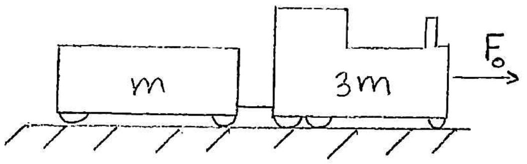


Systemet i figuren består av en fjäder, styvhet k, och två kroppar A och B med massa m vardera. Systemet är i vila då plötsligt kropp B lossnar.

a) Bestäm fjäderns utdragning före det att B lossnar. (1 poäng)

b) Efter att B lossnat, vad är kropp A:s fart då den har rört sig sträckan $h = mg/k$ uppåt? (2 poäng)

4.

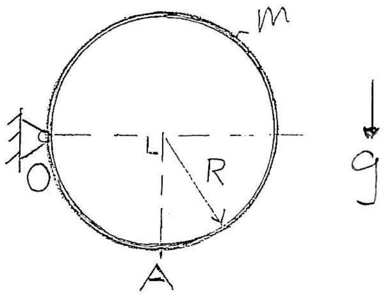


Ett lättrörligt tågset (lok med massa $3m$ och vagn med massa m) åker med farten v_0 då en konstant kraft F_0 börjar verka på loket enligt figur.

a) Hur lång tid tar det för tåget att uppnå farten $2v_0$? (2 poäng)

b) Hur stor dragkraft verkar på kopplingen mellan lok och vagn under accelerationsförloppet? (1 poäng)

5.

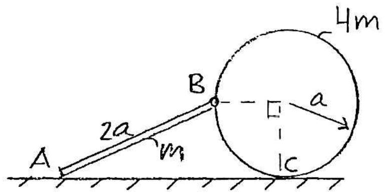


En smal ring, massa m och radie R, kan rotera friktionsfritt kring O. Ringen släpps från vila i figurläget. Bestäm för detta läge

a) kroppens vinkelacceleration, (2 poäng)

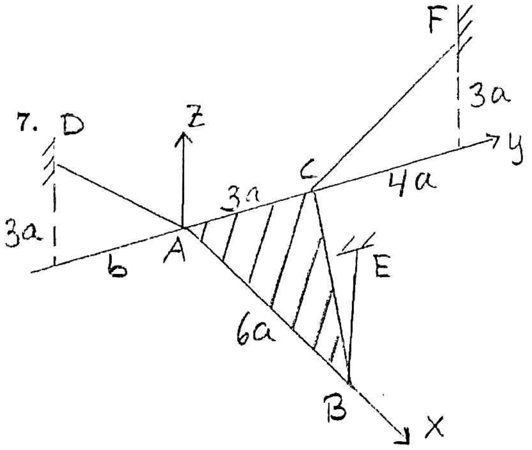
b) accelerationen (belopp och riktning) för punkt A. (1 poäng)

6.



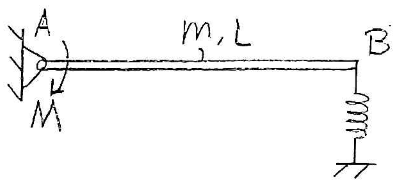
En smal stång AB, massa m och längd $2a$, är förbunden med en cylinder via en led i B. Cylindern har massa $4m$ och radie a. Stången och cylindern stöder mot ett strävt underlag i A respektive C. Friktionskoefficienten är lika stor i båda kontaktpunkterna. Hur stor måste denna friktionskoefficient minst vara för att jämvikt skall vara möjlig? (5 poäng)

7.



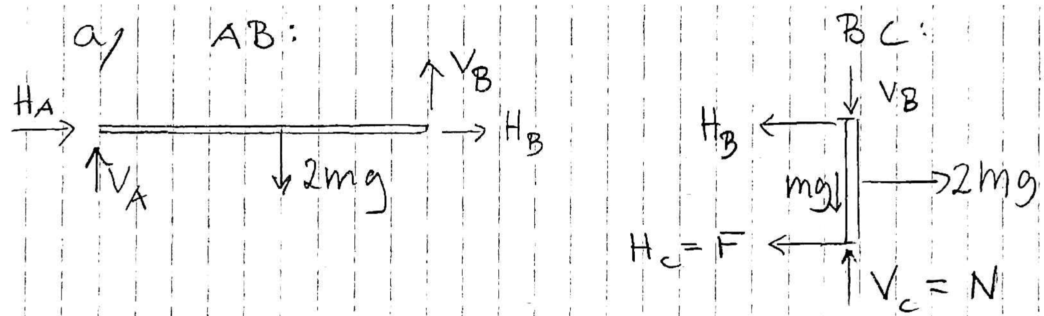
En rätvinklig triangular skiva ABC med massa m och kantlängder $3a$ och $6a$ ska hängas i horisontellt läge med hjälp av en lina i varje hörn. Linan BE är vertikal och linan CF ligger i yz-planet där punkten F har koordinaterna $(0;7a;3a)$. Linan AD ligger också i yz-planet och punkten D har koordinaterna $(0;-b;3a)$. Bestäm krafterna i de tre linorna och avståndet b, så att jämvikt är möjlig. (5 poäng)

8.



En balk, massa m och längd L, är friktionsfritt ledad i A och förbunden med en fjäder i B. Ett rent moment M påläggs systemet för att balken skall vara horisontell och i jämvikt. Plötsligt tas momentet M bort. Bestäm lagerkrafterna verkande på balken i A omedelbart därefter. (5 poäng)

1 a/



b/ Antag fullt utvecklad friktion; $F = \mu N$

AB: $\rightarrow: H_A + H_B = 0 \quad (1)$

$\uparrow: V_A + V_B - 2mg = 0 \quad (2)$

$\overset{\curvearrowright}{B}: V_A \cdot 2L - 2mg\,L = 0 \quad (3)$

BC: $\leftarrow: H_B + \mu N - 2mg = 0 \quad (4)$

$\uparrow: N - V_B - mg = 0 \quad (5)$

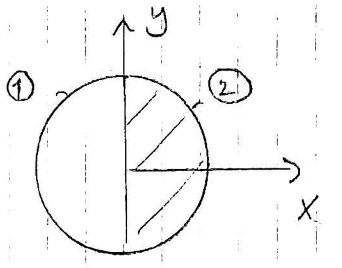
$\overset{\curvearrowright}{B}: \mu N \cdot L - 2mg\, L/2 = 0 \quad (6)$

6 ekv., 6 obekanta $[H_A, V_A, H_B, V_B, N, \mu]$.

$[\underline{\mu = 1/2}; N = 2mg; V_A = V_B = mg; H_B = -H_A = mg]$

Så, $\mu_{min} = 1/2$.

2



$\bar{x}_1 = -2R/\pi$ [FS s.17 fall 4]

$\bar{x}_2 = 4R/3\pi$ [FS s.17 fall 2]

a/

$$\bar{x} = \frac{m_1 \bar{x}_1 + m_2 \bar{x}_2}{m_1 + m_2} = \frac{-m\,2R/\pi + 3m\,4R/3\pi}{4m} =$$

$$= m/\pi\,[-2R + 4R]\,/\,4m = R/2\pi \;/\!/ \quad \bar{y} = 0 \text{ (sym.)}$$

b/ $I_y = I_{y1} + I_{y2}$

$I_{y1} = \frac{1}{2} mR^2$ [FS sid 17 fall 4]

$I_{y2} = \frac{1}{4} 3mR^2$ [FS sid 17 fall 2]

$$\left.\begin{array}{l} I_{y1} = \tfrac{1}{2} mR^2 \\ I_{y2} = \tfrac{1}{4} 3mR^2 \end{array}\right\} I_y = 5mR^2/4 \;/\!/$$

3 a/ Dragkraften på fjädern är $2mg$.

Fjädern förlängs därför $\Delta = 2mg/k$ //

b/ Använd $T_1 + V_1 + \underbrace{W^{(ik)}}_{=0} = T_2 + V_2$ (1)

$$\left.\begin{aligned} &\text{Startläge: } T_1 = 0 \;;\; V_1 = \tfrac{1}{2}k\Delta^2 = 2(mg)^2/k \\ &\text{Sökt läge: } T_2 = \tfrac{1}{2}mv^2 \;;\; V_2 = \tfrac{1}{2}k(\Delta - h)^2 + mgh \end{aligned}\right\} (2)$$

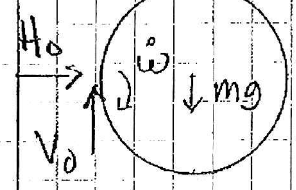
Med $h = mg/k$ fås

$V_2 = \frac{1}{2}k(mg/k)^2 + mg \cdot mg/k = \frac{3}{2}(mg)^2/k$ (3)

(2) med (3) in i (1) $\Rightarrow$

$2(mg)^2/k = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{2}(mg)^2/k \Rightarrow v = \sqrt{\frac{m}{k}}\,g$ //

5 a/ Rotationslagen $\Sigma M_0 = I_0 \dot{\omega}$ (1)

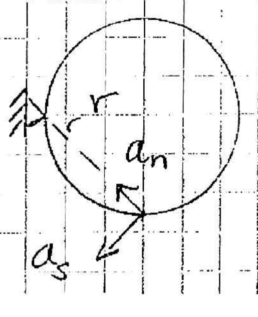


$\Sigma M_0 = mgR \qquad I_0 = \bar{I} + mR^2$

$= mR^2 + mR^2 = 2mR^2$ [FS s. 17 fall 3]

Ins. i (1) ger $\dot{\omega} = g/(2R)$ //

b/

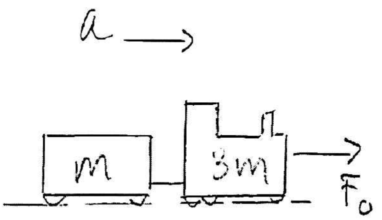


$a_n = r\omega^2 \qquad a_s = r\dot{\omega}$

$r = \sqrt{2}R \qquad \omega = 0$ vid start

$a_s = \sqrt{2}R\dot{\omega} =$ ins. a/ $= g/\sqrt{2}$ //

4



$\rightarrow: F_0 = 4ma \Rightarrow a = \dfrac{F_0}{4m}$ (1)

a/

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow \int_0^{t_0} a\,dt = \int_{v_0}^{2v_0} dv \Rightarrow \text{ins. (1)} \Rightarrow$$

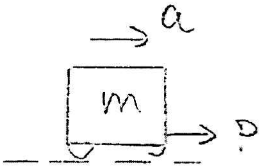
$$\left[\frac{F_0}{4m}\cdot t\right]_0^{t_0} = \left[v\right]_{v_0}^{2v_0} \Leftrightarrow \frac{F_0}{4m} t_0 = 2v_0 - v_0 \Rightarrow$$

$$t_0 = \frac{4mv_0}{F_0} \quad //$$

[Detta är också Impulslagen FS s.7 :

$$\underbrace{\int_0^{t_0} F_0\,dt}_{F_0 \cdot t_0} = p_2 - p_1 = 4m(2v_0) - 4mv_0 = 4mv_0$$]

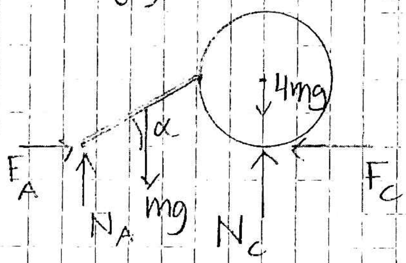
b/



$\rightarrow: P = ma = m\dfrac{F_0}{4m} = \dfrac{F_0}{4}$ // ur (a).

6

Frilägg hela systemet

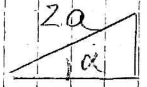


$\rightarrow$: $F_A - F_C = 0$ (1)

$\uparrow$: $N_A + N_C - 5mg = 0$ (2)

$\curvearrowright C$: $N_A(2a\cos\alpha + a)$

$- mg(a\cos\alpha + a) = 0$ (3)

[

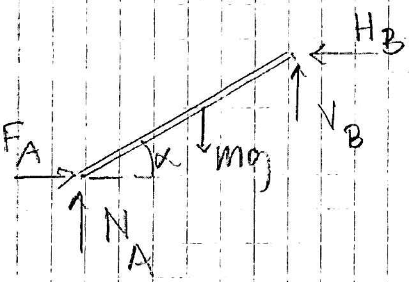
$\sin\alpha = 1/2 \Rightarrow \alpha = 30^\circ$]

(3) $\Rightarrow N_A = mg/2 \cdot (\sqrt{3} + 2)/(\sqrt{3} + 1)$ (4)

(2) $\Rightarrow N_C = mg/2 \cdot (9\sqrt{3} + 8)/(\sqrt{3} + 1)$ (5)

F_A och F_C fås ur jämvikt för delsystem.

Frilägg stången (alt. cylindern).



$\curvearrowright B$: $N_A\, 2a\cos\alpha - F_A\, 2a\sin\alpha$

$- mg\, a\cos\alpha = 0 \Rightarrow$

$F_A = (2N_A - mg)\cos\alpha / 2\sin\alpha =$ [ins. (4)]

$= mg/2\ \sqrt{3}/(\sqrt{3} + 1)$ (6)

(1) $\Rightarrow F_C = F_A$ (7)

$\mu_s \geq |F/N|$ d.v.s. $\mu_s \geq F_A/N_A$; $\mu_s \geq F_C/N_C$

$\mu_{s,min} = F_A/N_A \;(> F_C/N_C) = 2\sqrt{3} - 3 \approx 0{,}46$

7 Teckna linkrafterna som vektorer:

$$\mathbf{S}_{AD} = S_A \mathbf{e}_{AD} \;;\; \mathbf{e}_{AD} = \frac{(0,-b,3a)}{\sqrt{b^2+9a^2}}$$

$$\mathbf{S}_{CF} = S_C \mathbf{e}_{CF} \;;\; \mathbf{e}_{CF} = \frac{(0,4a,3a)}{5a}$$

$$\mathbf{S}_{BE} = S_B(0,0,1) \;;\; \text{Tyngdkraften: } mg(0,0,-1)$$

$$\sum F_z = 0 \Leftrightarrow \frac{S_A\, 3a}{\sqrt{b^2+9a^2}} + \frac{S_C\, 3}{5} + S_B - mg = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \Leftrightarrow \frac{-S_A\, b}{\sqrt{b^2+9a^2}} + \frac{S_C\, 4}{5} = 0 \quad (2) \quad [\sum F_x = 0 \text{ triv.}]$$

$$\sum M_y = 0 \Leftrightarrow mg \cdot 6a/3 - S_B \cdot 6a = 0 \Rightarrow S_B = mg/3 \quad (3)$$

$$\sum M_x = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{S_C\, 3}{5}}_{S_{CF,z}} 3a - mg\, 3a/3 = 0 \Rightarrow S_C = 5mg/9 \quad (4)$$

Vi har utnyttjat att tp läge i $(6a/3, 3a/3, 0)$

Tag ekv. (1) $\times\, b$ + ekv (2) $\times\, 3a = 0 \Leftrightarrow$

$$\left(\frac{S_C\, 3}{5} + S_B - mg\right) b + \frac{S_C\, 4}{5} \cdot 3a = 0 \Leftrightarrow \text{ins (3)-(4)}$$

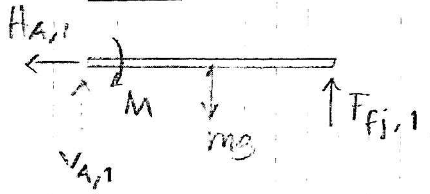
$$\Rightarrow \underbrace{\left(\frac{mg}{3} + \frac{mg}{3} - mg\right)}_{-mg/3} b + \frac{4mg}{3} a = 0 \Rightarrow b = 4a \quad (5)$$

$$(5) \text{ i } (2) \Rightarrow S_A = S_C = 5mg/9 \quad (6)$$

8

Studera först vid jämvikt för att få fjäderkraften.

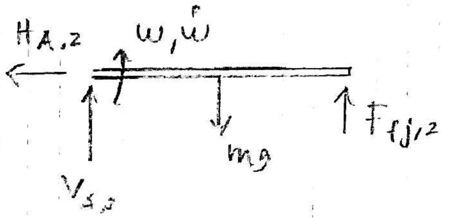
Jmv



$\overset{\curvearrowleft}{A}: F_{fj,1} \cdot L - mg\, L/2 - M = 0$

$\Rightarrow F_{fj,1} = mg/2 + M/L \quad (1)$

Dynamik



$\uparrow: F_{fj,2} - mg + V_{A,2} = m\bar{a}_s$

$= m\, L/2\, \dot{\omega} \quad (2)$

$\leftarrow: H_{A,2} = m\bar{a}_n = m\, L/2\, \omega^2 \quad (3)$

Precis då M tas bort är $\omega = 0$, så ekv. (3) ger $H_{A,2} = 0$ //

Vad är $\dot{\omega}$?

Rotationslagen ger "$M_A = I_A \dot{\omega}$", d.v.s

$\overset{\curvearrowleft}{A}: F_{fj,2} \cdot L - mg\, L/2 = I_A\, \dot{\omega} \Rightarrow$

$\dot{\omega} = (F_{fj,2} \cdot L - mg\, L/2)/I_A \quad (4).$

$I_A = \frac{1}{3} m L^2$. Vad är $F_{fj,2}$?

Då $F_{fj} = kx$, där x ej hunnit ändras från a/ så är $F_{fj,2} = F_{fj,1}$. Ekv. (1) i (4):

$\dot{\omega} = M/I_A = 3M/mL^2$ ins. i (2) $\Rightarrow$

$-mg/2 + M/L + V_{A,2} = 3M/(2L) \Rightarrow$

$V_{A,2} = mg/2 + M/2L$ //