Tentamen i TME010 Mekanik TD, 2024-04-05 kl. 8.30–12.30
Jourhavande: Håkan Johansson tel. 8575 alt. 0739-678219 (salarna besöks 9.30 och 11.00)
Lösningar anslås på kurshemsidan senast den 8/4.
Preliminärt rättningsresultat anslås på M2 senast den 26/4.
Rättningsgranskning och utlämning av tentor sker på M2, avd. Dynamik, 2/5 samt 3/5 kl. 12.00–13.00.

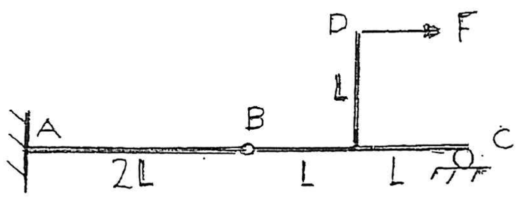
Tillåtna hjälpmedel: Formelsamling i mekanik av M.M. Japp (delas ut vid tentan),
Matematiska handböcker (t ex Beta, Matte 5) eller utdrag därur,
Chalmersgodkänd räknare är tillåten.

Betygsgränser: Uppgift 1-5 ger maximalt 3 poäng vardera. Uppgift 6-8 ger maximalt 5 poäng vardera. Betyget på tentamen ges enligt följande tabell:

		Poäng på uppgift 1–5 (inkl. bonuspoäng)							
		0–7	8	9	10	11	12	13–15	16–19
Poäng på uppgift 6–8	0–4	U	U	U	U	U	3	3	3
	5–8	U	U	U	U	3	3	4	4
	9	U	U	U	3	3	4	4	5
	10–11	U	U	3	3	4	4	5	5
	12–15	U	3	3	4	4	5	5	5

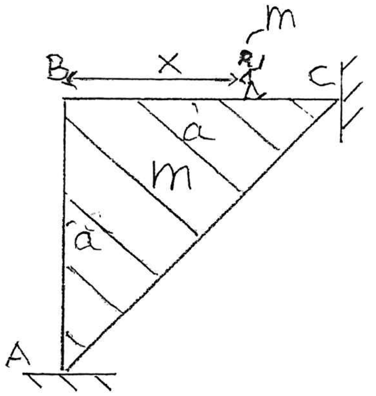
UPPSTÄLLDA EKVATIONER SKALL MOTIVERAS.

1.



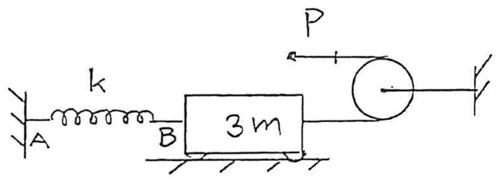
Två masslösa kroppar i jämvikt är förenade med en friktionsfri led i B enligt figur. En horisontell kraft F verkar i D.
a) Bestäm stödreaktionerna i C (krafter och eventuella moment). (1 poäng)
b) Bestäm stödreaktionerna i A (krafter och eventuella moment). (2 poäng)

2.



En triangulär kropp ABC med massa m har höjd och bredd a. Kontaktytorna är sådana att det är samma friktionskoefficient $\mu = 1/2$ vid både A och C. En person, massa m, befinner sig vid x från hörnet B.
a) Frilägg systemet ABC + personen.
(1 poäng)
b) Ställ upp de ekvationer, med vars hjälp man kan bestämma maximala sträckan x för möjlig jämvikt. *Ekvationssystemet behöver inte lösas.* (2 poäng)

3.



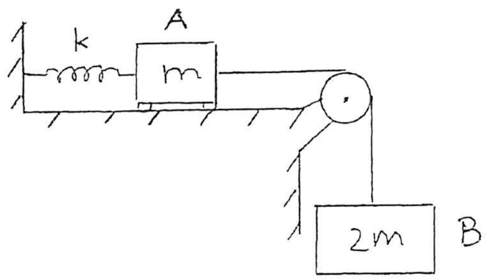
En friktionsfritt rörlig vagn, massa $3m$, är förbunden med en fjäder med ospänd längd $3d$ och styvhet $k = mg/d$. En lina fäster i massans högra sida och löper över en trissa enligt figur. En kraft P verkar i linänden.

a) Bestäm kraften P om systemet hålls i jämvikt med fjäderförlängning $2d$ (d.v.s. sträcka AB är $5d$). (1 poäng)

b) Om kraften P därefter plötsligt tas bort, bestäm accelerationen för vagnen i detta första läge av påbörjad rörelse. (1 poäng)

c) Bestäm för den efterföljande rörelsen den kortaste sträckan AB (mellan vägg och vagn) som någonsin uppkommer. (1 poäng)

4.

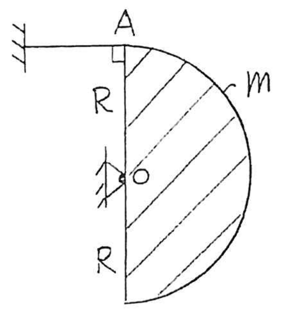


Figuren visar två kroppar (A med massa m och B med massa $2m$) förenade med en lina. A är kopplad till en fjäder (fjäderkonstant k). Systemet släpps från vila då fjädern är ospänd.

a) Ställ upp en ekvation som kan användas för att bestämma A:s fart då den rört sig sträckan L åt höger. (2 poäng)

b) Om accelerationen för B just då är a_B uppåt (anses känd), vad är linkraften verkande på B? (1 poäng)

5.



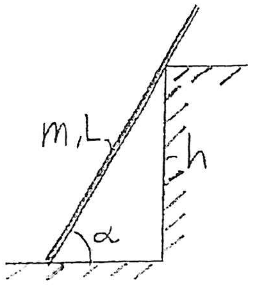
En homogen halvsfär med radie R och massa m är friktionsfritt ledad i O. Kroppen hålls från början i vila genom en horisontell lina fäst i A. Plötsligt klipps linan. Bestäm omedelbart därefter

a) halvsfärens vinkelacceleration, (1 poäng)

b) vertikala kraften verkande på kroppen i O, (1 poäng)

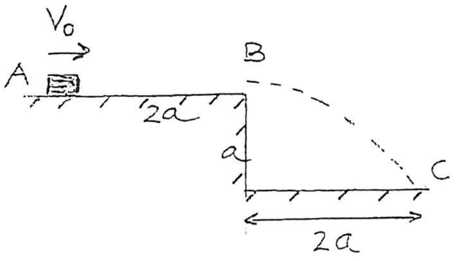
c) horisontella kraften verkande på kroppen i O. (1 poäng)

6.



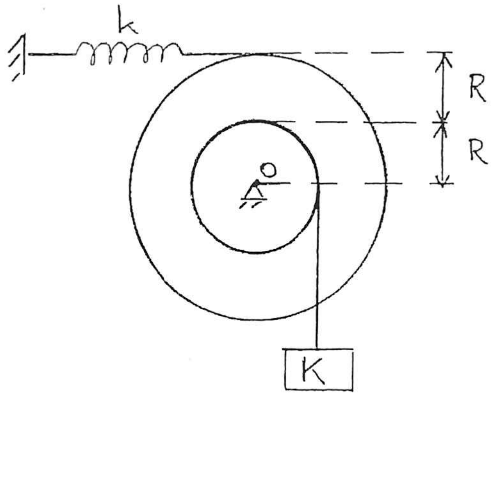
En smal stång, massa m och längd $L = 4h/3$, stöder mot en sträv vägg med höjd h och ett strävt underlag enligt figur. Friktionskoefficienten är samma i båda kontakterna. Bestäm den statiska friktionskoefficienten om den minsta vinkeln för jämvikt är $\alpha_{min} = 60°$.
(5 poäng)

7.



En låda, massa m, har vid A farten v_0 (okänd). Den glider mot B på ett strävt underlag, friktionskoefficient $\mu = 1/4$, varefter den efter flygfärden landar i C (mått enligt figur). Bestäm farten v_0. (5 poäng)

8.



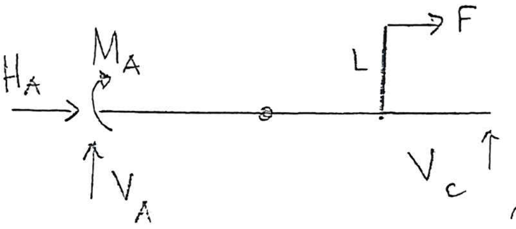
Ett hjul med ytterradie $2R$ kan rotera utan friktion kring O (masströghetsmoment $I_O = mR^2$). En lina, som är upplindad kring ytterradien, är förbunden med en fjäder med styvhet k. En annan lina, som är upplindad kring innerradien, är förbunden med en kropp K med massa m. Systemet släpps från vila då fjädern är ospänd.

a) Bestäm under den fortsatta rörelsen fjäderns maximala förlängning Δ. (2 poäng)

b) Vilken acceleration har K vid detta läge? (3 poäng)

1

Frilägg hela strukturen:

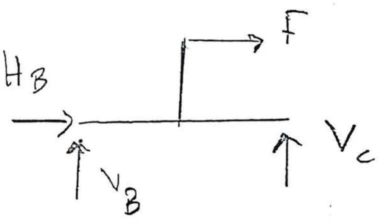


$\rightarrow: H_A + F = 0 \quad (1)$

$\uparrow: V_A + V_C = 0 \quad (2)$

$\overset{\curvearrowright}{A}: M_A + F \cdot L - V_C \cdot 4L = 0 \quad (3)$

Frilägg t. ex. BC:



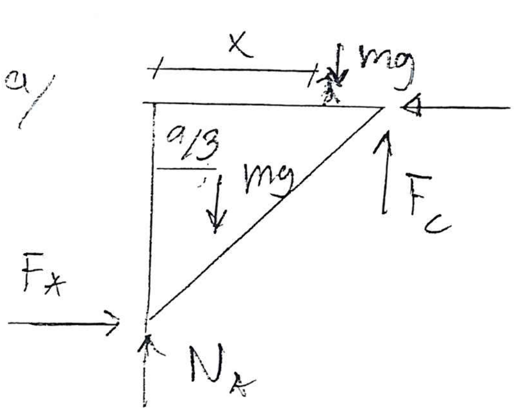
$\overset{\curvearrowright}{B}: F \cdot L - V_C \cdot 2L = 0 \quad (4)$

a) $(4) \Rightarrow V_C = F/2$ //

b) $(1) \Rightarrow H_A = -F$ // $\quad (2) \Rightarrow V_A = -F/2$ //

$(3) \Rightarrow M_A = FL$ //

② a/



[5 obekanta x, N_A, F_A, N_C, F_C / 5 ekv. behövs]

b/ Vid max x risk för glidning i A och C (samtidigt).

Då har vi $F_A = \mu N_A$ (1) ; $F_C = \mu N_C$ (2)

$\rightarrow$: $F_A - N_C = 0$ (3) $\uparrow$: $N_A + F_C - 2mg = 0$ (4)

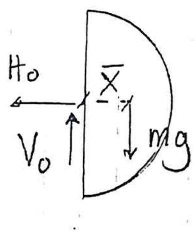
$\overset{\curvearrowright}{A}$: $mg\,x + mg\,a/3 - N_C\,a - F_C\,a = 0$ (5)

Ekv. (1) - (5) löser uppgiften. //

[Löses uppg. fås $x = 13a/15$]

---

⑤ a/

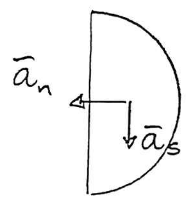


$\overset{\curvearrowright}{O}$: $mg\bar{x} = I_0\dot{\omega}$ (1)

$\bar{x} = 3R/8$ och $I_0 = \frac{2}{5}mR^2$ ur FS s. 18 fall 2.

(1) $\Rightarrow$ $mg\,3R/8 = \frac{2}{5}mR^2\dot{\omega} \Rightarrow \dot{\omega} = \frac{15}{16}\,g/R$ //

b/



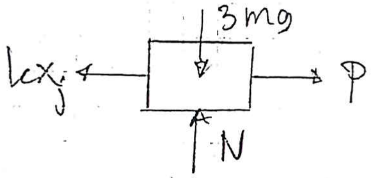
$\downarrow$: $mg - V_0 = m\bar{a}_s = m\bar{x}\dot{\omega} \Rightarrow$

$V_0 = m(g - \bar{x}\dot{\omega})$ = ins. ur a/ =

$= m(g - 3R/8 \cdot 15/16\,g/R) = \frac{83}{128}mg$ //

c/ $\leftarrow$: $H_0 = m\bar{a}_n = m\bar{x}\omega^2 = 0$ $(\omega = 0)$ //

③ a/ Frilägg vid jämvikt:



$\longrightarrow \quad P - kx_j = 0 \quad [x_j = 2d]$

$P = k \cdot 2d = mg/d \cdot 2d = 2mg$ //

b/ Då $P = 0$ i friläggning ovan:

$\leftarrow: \; k \cdot x_j = 3ma \Rightarrow a = 2g/3$ //

c/ $T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \quad (1)$

Startläge (P precis borttagen):

$T_1 = 0 \qquad V_1 = \frac{1}{2} k x_j^2 = \frac{1}{2} \frac{mg}{d} (2d)^2 = 2mgd$

Kortaste AB då fjäderhoptryckning max,

d.v.s. vändläget: $T_2 = 0 \qquad V_2 = \frac{1}{2} k X_2^2$

$(1) \Rightarrow 2mgd = \frac{1}{2} k X_2^2 \Rightarrow X_2^2 = 4d^2$

Hoptryck $\rightarrow X_2 = -2d$ dvs AB är $3d - 2d = d$ //

---

④ a/ $T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \quad (W^{lik} = 0)$

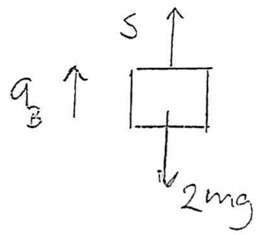
$T_1 = 0 \qquad V_1 = 0$

$T_2 = \frac{1}{2} m v_A^2 + \frac{1}{2} 2m v_B^2 = \frac{3}{2} m v^2 \qquad (v_A = v_B = v)$

$V_2 = \frac{1}{2} k L^2 - 2mgL$. Ins. ovan ger

$0 = \frac{3}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k L^2 - 2mgL$ //

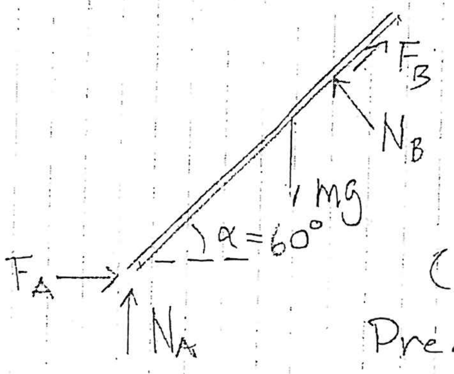
b/ Frilägg:



$\uparrow: \; S - 2mg = 2m a_B \Rightarrow$

$S = 2m(g + a_B)$ //

(6) Frilägg



$\uparrow$: $N_A - mg + N_B\cos\alpha + F_B\sin\alpha = 0$ (1)

$\rightarrow$: $F_A - N_B\sin\alpha + F_B\cos\alpha = 0$ (2)

$\overset{\curvearrowleft}{A}$: $mg\,L/2\cos\alpha - N_B\,h/\sin\alpha = 0$ (3)

(3) $\Rightarrow N_B = mg/(2\sqrt{3})$ (4)

Precis före glidning är

$F_A = \mu N_A$, $F_B = \mu N_B$

(2) $\Rightarrow F_A - N_B(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) = 0$ (5)

dvs $N_A = N_B(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)/\mu$ $[F_A = \mu N_A]$

Ins. i (1) $\Rightarrow$

$N_B\left[(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)/\mu + \cos\alpha + \mu\sin\alpha\right] = mg$ (6)

Ins. ekv. (4) för $\alpha = 60°$ ger att (6) blir

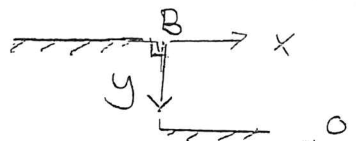
$$mg/(2\sqrt{3})\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\underbrace{-\mu\frac{1}{2} + \mu\frac{1}{2}}_{=0} + \mu^2\frac{\sqrt{3}}{2}\right] = \mu mg \Rightarrow$$

$\mu^2 - \mu 4 + 1 = 0 \Rightarrow \mu = 2 \pm \sqrt{3}$ (7)

Då $F_A > 0$ ger enl. (5) $\sin\alpha > \mu\cos\alpha$,

dvs $\mu < \sqrt{3}$, så (7) $\Rightarrow \mu = 2 - \sqrt{3}$ //

(7) Studera B till C



$a_x = 0 \Rightarrow V_x = V_B \Rightarrow S_x = V_B t + \overset{=0}{c_1}$ (1)

$a_y = g \Rightarrow V_y = gt + \underset{=0}{c_2} \Rightarrow S_y = gt^2/2 + \underset{=0}{c_3}$ (2)

Tiden att falla $S_y = a$ ur (2):

$a = g t_{BC}^2/2 \Rightarrow t_{BC} = \sqrt{2a/g}$ (3)

(1) ger $2a = V_B t_{BC} = V_B \sqrt{2a/g}$ (4) ur (3).

(4) $\Rightarrow V_B = \sqrt{2ga}$ (5)

[Kan lösas med energi också]

Studera A till B:

$T_A + V_A + W^{(ik)} = T_B + V_B$ (6)

$T_A = \frac{1}{2} m v_0^2 \qquad T_B = \frac{1}{2} m V_B^2 = mga$ ur (5)

$V_A = V_B = 0 \qquad W^{(ik)} = -F \cdot 2a = -\mu mg \cdot 2a$

(6) $\Rightarrow \frac{1}{2} m v_0^2 - \mu mg 2a = mg a \Rightarrow$

$v_0 = \sqrt{3ga}$ med $\mu = 1/4$.

⑧ Gör en energibetraktelse:

a/ Vid start: $T_1 = 0$ (vila)

$V_1 = 0$ (ospänd fjäder, nollnivå lägesen.)

Maximal fjäderförlängning i vändläge.

Så, $T_2 = 0$ $\left(= \frac{1}{2} I_O \underbrace{\omega^2}_{0} + \frac{1}{2} m \underbrace{v_k^2}_{0}\right)$

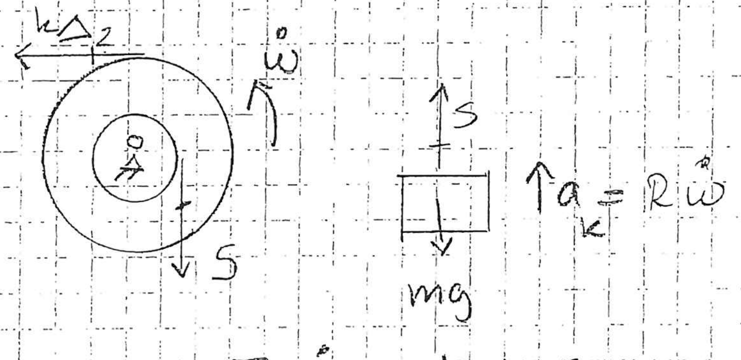
$V_2 = \frac{1}{2} k \Delta^2 - mg\,\Delta/2$ (K radie R, fjäder 2R).

$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \Leftrightarrow 0 = \frac{1}{2} k\Delta^2 - mg\,\Delta/2$

$\Rightarrow \Delta\left(\frac{1}{2} k\Delta - mg/2\right) \Rightarrow \begin{cases} \Delta_1 = 0 & \text{(startläge)} \\ \Delta_2 = mg/k & \text{(vändläge)} \end{cases}$

Δ_1 är minläge, Δ_2 är maxläge. //

b/ Frilägg



Cyl. $\overset{\frown}{O}$: $k\Delta_2 2R - SR = I_O \dot{\omega}$ $K\uparrow$: $S - mg = mR\dot{\omega}$

Andra ekv. ger $SR - mgR = mR^2\dot{\omega}$, addera till första

$k\Delta_2 2R - mgR = I_O\dot{\omega} + mR^2\dot{\omega} \Leftrightarrow [\Delta_2 = mg/k]$

$mg\,2R - mgR = mR^2\dot{\omega} + mR^2\dot{\omega} \Rightarrow mgR = 2mR^2\dot{\omega}$

$\Rightarrow R\dot{\omega} = g/2 = a_k$ //