Tentamen i TME010 Mekanik TD, 2024-01-11 kl. 8.30–12.30

Jourhavande: Peter Folkow tel. 1521 alt. 0729-617241 (salarna besöks 9.30 och 11.00)

Lösningar anslås på kurshemsidan senast den 12/1.

Preliminärt rättningsresultat anslås på M2 senast den 31/1.

Rättningsgranskning och utlämning av tentor sker på M2, avd. Dynamik, 1/2 samt 2/2 kl. 12.00–13.00.

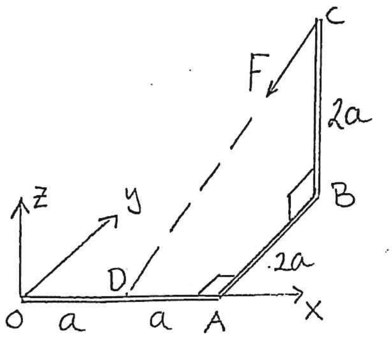
Tillåtna hjälpmedel: Formelsamling i mekanik av M.M. Japp (delas ut vid tentan), Matematiska handböcker (t ex Beta, Matte 5) eller utdrag därur, Chalmersgodkänd räknare är tillåten.

Betygsgränser: Uppgift 1-5 ger maximalt 3 poäng vardera. Uppgift 6-8 ger maximalt 5 poäng vardera. Betyget på tentamen ges enligt följande tabell:

		Poäng på uppgift 1–5 (inkl. bonuspoäng)							
		0–7	8	9	10	11	12	13–15	16–19
Poäng på uppgift 6–8	0–4	U	U	U	U	U	3	3	3
	5–8	U	U	U	U	3	3	4	4
	9	U	U	U	3	3	4	4	5
	10–11	U	U	3	3	4	4	5	5
	12–15	U	3	3	4	4	5	5	5

UPPSTÄLLDA EKVATIONER SKALL MOTIVERAS.

1.

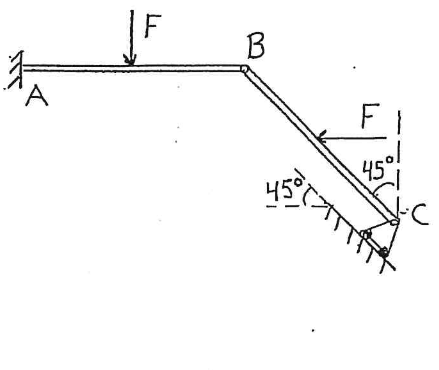


En stång, längd $6a$, är böjd enligt figuren där OA är parallell med $x-$axeln, AB är parallell med $y-$axeln och BC är parallell med $z-$axeln. En kraft F verkar i C och är riktad längs linjen CD.

a) Beskriv kraften som en vektor.
(2 poäng)

b) Bestäm kraftens moment m.a.p. origo.
(1 poäng)

2.



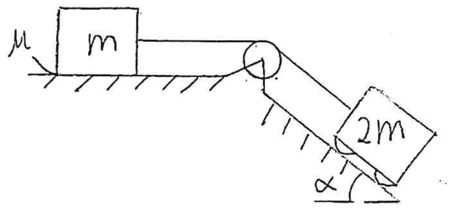
En struktur är sammansatt av två *masslösa* stänger av längd $2L$ där stängerna är förenade via en friktionsfri led i B. Mitt på vardera stången appliceras en kraft F enligt figur.

a) Frilägg hela systemet ABC. (1 poäng)

b) Ställ upp de jämviktsekvationer som erfordras för att bestämma samtliga stödreaktioner i A och C. (2 poäng)

(Observera att ekvationerna *inte* behöver lösas)

3.

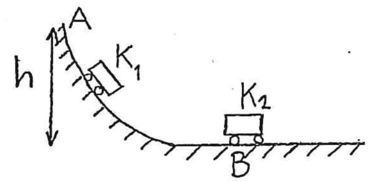


Figuren visar en vagn och en låda som är förbundna via en lina. Systemet släpps från vila och kommer därefter i rörelse. Den nedre vagnen, massa $2m$, är lättrörlig längs ett lutande plan med vinkel α. Den övre lådan, massa m, rör sig längs ett strävt horisontellt underlag med friktionskoefficient μ.

a) Frilägg kropparna var för sig. (1 poäng)

b) Bestäm linkraften. (2 poäng)

4.



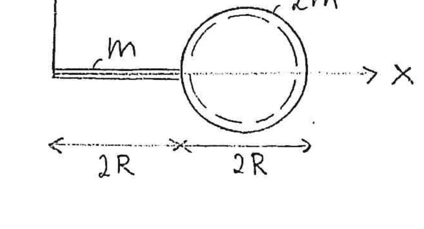
En liten kropp K_1 med massa m släpps från vila i A och kolliderar med en (från början vilande) likadan kropp K_2 i B. Efter stöten rör sig K_1 åt höger med en fjärdedel så stor fart som precis före stöten. Bestäm

a) K_1 fart precis före stöt, (1 poäng)

b) K_2 fart efter stöt, (1 poäng)

c) mängden mekanisk energi som förloras i stöten. (1 poäng)

5.

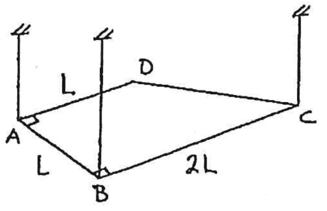


Figuren visar ett sfäriskt skal, massa $2m$ och radie R, fäst på en tunn stång, massa m och längd $2R$. Bestäm

a) x-koordinaten för kroppens tyngdpunkt, (1 poäng)

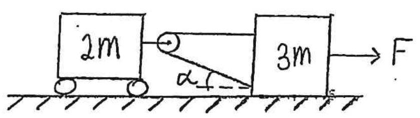
b) kroppens masströghetsmoment kring y-axeln. (2 poäng)

6.



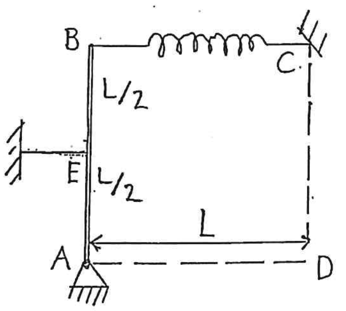
En tunn homogen skiva ABCD (massa m) är upphängd i tre lodräta linor som figuren visar, så att skivan är horisontell. Bestäm linkrafterna för jämvikt.

7.



Två rätblock med massorna $2m$ och $3m$ är placerade på ett strävt golv. Kropparna är förenade med ett snöre som löper över en trissa enligt figur. Friktion μ råder mellan den tyngre kroppen och underlaget, medan den lättare kroppen är fritt rörlig på golvet. En horisontell dragkraft $F = 5mg$ anbringas på den tyngre kroppen. Bestäm systemets acceleration.

8.

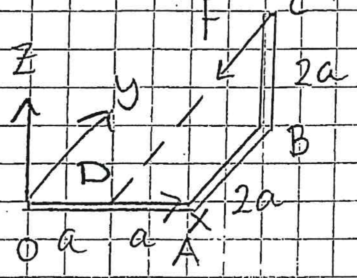


En vertikal stång AB, massa m och längd L, är på sin mittpunkt E förbunden med en horisontell lina. Stången är även förbunden med en fjäder BC fäst i B. Från början är systemet i jämvikt då fjädern är horisontell och linkraften $S_E = 2mg$. Plötsligt kapas linan, varefter stången påbörjar en rotation. Bestäm stödkrafterna i A då

a) linan är oklippt, (1 poäng)

b) linan är klippt och stången passerar den horisontella linjen AD. (4 poäng)

1



a) $\mathbf{F} = F\,\mathbf{e}_{CD}$ (1)

$$\mathbf{e}_{CD} = \overrightarrow{CD} \,/\, |\overrightarrow{CD}| =$$

$$(-a, -2a, -2a) \,/\, \sqrt{a^2 + 4a^2 + 4a^2} =$$

$$= (-1, -2, -2)/3 \,; \quad (1) \Rightarrow \mathbf{F} = F/3\,(-1, -2, -2) \,//$$

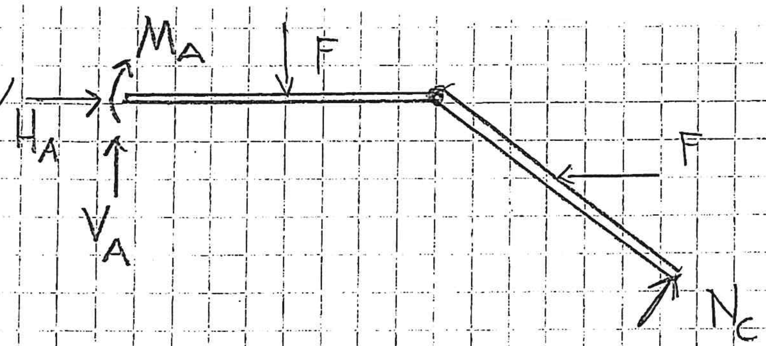
b) $$\mathbf{M}_O = \overrightarrow{OC} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 2a & 2a & 2a \\ -F/3 & -2F/3 & -2F/3 \end{vmatrix} =$$

$$= (0, \; 2Fa/3, \; -2Fa/3) \,//$$

[$\mathbf{M}_O = \overrightarrow{OD} \times \mathbf{F}$ går också ; F flyttas längs CD]

---

2 a)



b) $\rightarrow$: $H_A - F + N_C/\sqrt{2} = 0$ (1)

$\uparrow$: $V_A - F + N_C/\sqrt{2} = 0$ (2)

$\Big\} \; H_A = V_A$

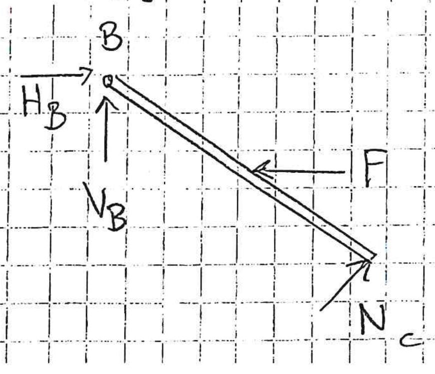
$\overset{\curvearrowleft}{A}$: $M_A + FL + FL/\sqrt{2} - N_C/\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}L -$

$N_C/\sqrt{2}\,(2L + \sqrt{2}L) = 0$ (3)

3 ekv, men 4 obekanta: H_A, V_A, M_A, N_C

Frilägg en stång, tag momentjmv. kring B.

BC

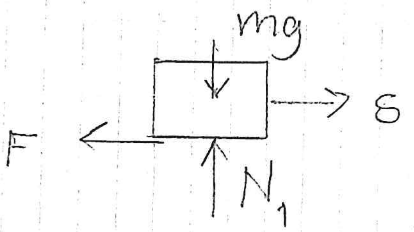


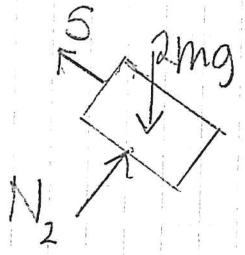
$\overset{\curvearrowleft}{B}$: $FL/\sqrt{2} - N_C 2L = 0$ (4) //

[$H_A = V_A = 3F/4$; $N_C = FL/2\sqrt{2}$

$M_A = -FL/2$]

③ a)





b) Låda:

$\uparrow$: $N_1 - mg = 0 \rightarrow N_1 = mg$ (1)

$\rightarrow$: $S - F = ma \Leftrightarrow [F = \mu N_1]$ $S - \mu mg = ma_1$ (2)

ur (1)

Vagn:

($\nearrow$: $N_2 - 2mg\cos\alpha = 0$ (3))

$\searrow$: $2mg\sin\alpha - S = 2ma_2$ (4)

$a_1 = a_2 = a$; Ta (2) ggr 2: $2S - 2\mu mg = 2ma$

och jmf (4): $2mg\sin\alpha - S = 2S - 2\mu mg \Rightarrow$

$S = 2mg(\sin\alpha + \mu)/3$ //

④ Energin bevaras för K_1 före krock

a/ Start $T_1 = 0$, $V_1 = mgh$

Före krock: $T_2 = \frac{1}{2} m v^2$ $\quad V_2 = 0$ $\quad \Rightarrow v = \sqrt{2gh}$

Efter stöt: $\boxed{K_1} \xrightarrow{} V/4 \qquad \boxed{K_2} \xrightarrow{} V_{K_2}$

b/ Rörelsemängd bevaras för systemet $K_1 + K_2$:

$\Rightarrow$: $mV + m \cdot \underset{\text{vila}}{0} = m V/4 + m V_{K_2} \Rightarrow$

$V_{K_2} = 3V/4$ //

c/ $\Delta T = T_2 - T_1$ för systemet.

$T_1 = \frac{1}{2} m V^2 + \underset{\text{vila}}{0} = \frac{1}{2} m V^2$

$T_2 = \frac{1}{2} m (V/4)^2 + \frac{1}{2} m V_{K_2}^2 = \frac{1}{2} m \frac{5}{8} V^2$ $\quad \Rightarrow$

$\Delta T = -\frac{1}{2} m \frac{3}{8} V^2 = -3/16\, m V^2$, d.v.s.

$3/8\, mgh$ förloras i stöten.

5 a/ $\bar{x} = (m_1 \bar{x}_1 + m_2 \bar{x}_2) / (m_1 + m_2)$ (1)

Stång: $m_1 = m \quad \bar{x}_1 = R$

Skal: $m_2 = 2m \quad \bar{x}_2 = 2R + R = 3R$

(1) $\Rightarrow \bar{x} = \dfrac{mR + 6mR}{3m} = 7R/3$ //

b/ $I_y = I_{y,1} + I_{y,2}$ (2)

Stång: $I_{y,1} = \frac{1}{3} m (2R)^2$ [FS s.16 fall 4]

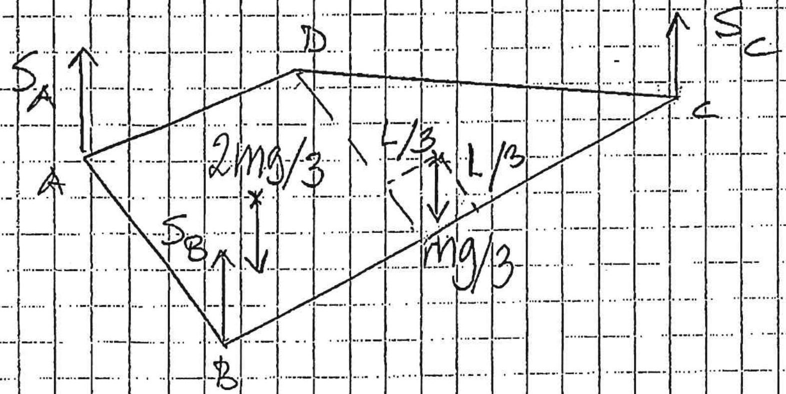
Står: $I_{y,2} = \bar{I}_{y,2} + 2m(3R)^2$

Då $\bar{I}_{y,2} = \frac{2}{3} 2mR^2$ [FS s.18 fall 3]

fås $I_{y,2} = 58/3\, mR^2$

(2) $\Rightarrow I_y = 4/3\, mR^2 + 58/3\, mR^2 = 62/3\, mR^2$ //

⑥ Frilägg hela skivan, dela upp tyngdkraften i 2 enkla delar



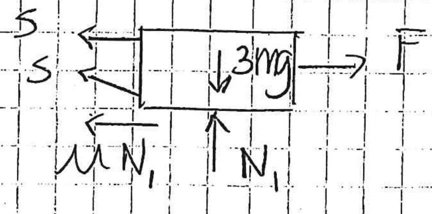
$\uparrow$: $S_A + S_B + S_C - mg = 0$ (1)

$\overset{\frown}{AB}$: $S_C \cdot 2L - 2mg/3 \cdot L/2 - mg/3\,(L + L/3) = 0$ (2)

$\overset{\frown}{BC}$: $S_A \cdot L - 2mg/3 \cdot L/2 - mg/3\; L/3 = 0$ (3)

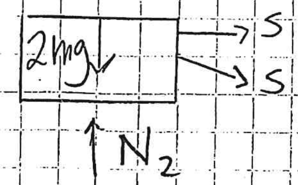
(1) - (3) => $S_A = 4mg/9$; $S_B = mg/6$; $S_C = 7mg/18$ //

(7) Frilägg kropparna var för sig:



$\rightarrow$: $F - \mu N_1 - S - S\cos\alpha = 3ma_1$ (1)

$\uparrow$: $N_1 + S\sin\alpha - 3mg = 0$ (2)



$\rightarrow$: $S + S\cos\alpha = 2ma_2$ (3)

$a_1 = a_2 = a.$

(3) $\Rightarrow$ $S = 2ma/(1+\cos\alpha)$ ins. i (2) $\Rightarrow$

$N_1 = 3mg - 2ma\sin\alpha/(1+\cos\alpha)$.

Ins. S och N_1 ovan i (1) $\Rightarrow$

$$F - \mu\left[3mg - 2ma\sin\alpha/(1+\cos\alpha)\right]$$

$$- \underbrace{2ma/(1+\cos\alpha)\,[1+\cos\alpha]}_{2ma} = 3ma \Rightarrow$$

$$\overset{= 5mg}{F} - \mu 3mg = 5ma - \mu 2ma\sin\alpha/(1+\cos\alpha)$$

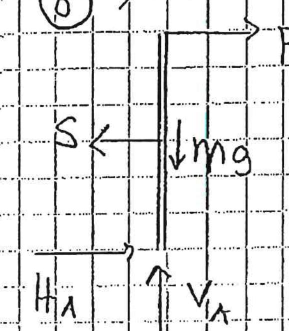
$$= ma\left[5(1+\cos\alpha) - 2\mu\sin\alpha\right]/(1+\cos\alpha)$$

$$\Rightarrow a = g\,\frac{(5-3\mu)(1+\cos\alpha)}{5(1+\cos\alpha) - 2\mu\sin\alpha} \quad //$$

[$\alpha = 0^\circ \Rightarrow a = g(5-3\mu)/5$ som väntat];

[$\mu = 0 \Rightarrow a = g$ som väntat]

8 a/ Frilägg stången



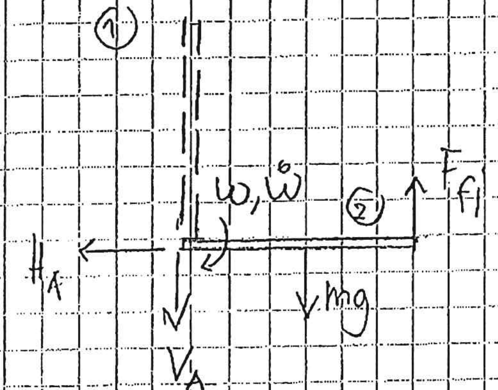
$\rightarrow$: $F_{fj} - S + H_A = 0$ (1)

$\uparrow$: $V_A - mg = 0 \Rightarrow V_A = mg$ //

$\hat{A}$: $F_{fj} L - S\,L/2 = 0 \Rightarrow F_{fj} = S/2 \Rightarrow$

Ins. i (1) $\Rightarrow H_A = S/2 = mg$ //

b/ Frilägg stången i horis. läge



$\leftarrow$ $H_A = m a_n = m \frac{L}{2} \omega^2$ (2)

$\downarrow$ $V_A + mg - F_{fj} = m a_s = m \frac{L}{2} \dot{\omega}$ (3)

$F_{fj} = S/2 = mg$ som i a/

då fjäderns längd densamma.

ω^2 ur energilagen, $\dot{\omega}$ ur lagen f. rör.mom.

ω^2: Inga förluster $\Rightarrow T_1 + V_1 = T_2 + V_2$ (4)

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= 0 & V_1 &= mg\,L/2 + \tfrac{1}{2} k x^2 \\ T_2 &= \tfrac{1}{2} I_A \omega^2 & V_2 &= \tfrac{1}{2} k x^2 \end{aligned}\right\} \text{Ins. i (4)} \Rightarrow$$

$mg\,L/2 + 1/2\,k x^2 = \frac{1}{2} I_A \omega^2 + 1/2\,k x^2 \Rightarrow$ [k o x ointr.]

$\Rightarrow \omega^2 = mgL/I_A = 3g/L$ (5) då $I_A = \frac{1}{3} mL^2$

$\dot{\omega}$: $\hat{A}$: $mg\,L/2 - F_{fj} L = I_A \dot{\omega} \Rightarrow$ Ins $F_{fj} = mg \Rightarrow$

$\Rightarrow \dot{\omega} = -mg\,L/2 \,/\, I_A = -3g/(2L)$ (6)

(5) och (6) i (2) o (3) $\Rightarrow$

$H_A = m \frac{L}{2} \cdot \frac{3g}{L} = \frac{3}{2} mg$ //

$V_A = \underbrace{-mg + F_{fj}}_{=0} - m \frac{L}{2} \frac{3g}{2L} = -\frac{3}{4} mg$ //