Tentamen i TME010 Mekanik TD, 2023-08-23 kl. 14.00–18.00
Jourhavande: Peter Folkow tel. 1521 alt. 0729-617241 (salarna besöks 15.00 och 16.30)
Lösningar anslås på kurshemsidan senast den 24/8.
Preliminärt rättningsresultat anslås på M2 senast den 8/9.
Rättningsgranskning och utlämning av tentor sker på M2, avd. Dynamik, 14/9 samt 15/9 kl. 12.00–13.00.

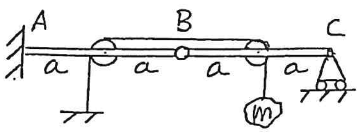
Tillåtna hjälpmedel: Formelsamling i mekanik av M.M. Japp (delas ut vid tentan),
Matematiska handböcker (t ex Beta, Matte 5) eller utdrag därur,
Chalmersgodkänd räknare är tillåten.

Betygsgränser: Uppgift 1-5 ger maximalt 3 poäng vardera. Uppgift 6-8 ger maximalt 5 poäng vardera. Betyget på tentamen ges enligt följande tabell:

		Poäng på uppgift 1–5 (inkl. bonuspoäng)							
		0–7	8	9	10	11	12	13–15	16–19
Poäng på uppgift 6–8	0–4	U	U	U	U	U	3	3	3
	5–8	U	U	U	U	3	3	4	4
	9	U	U	U	3	3	4	4	5
	10–11	U	U	3	3	4	4	5	5
	12–15	U	3	3	4	4	5	5	5

UPPSTÄLLDA EKVATIONER SKALL MOTIVERAS.

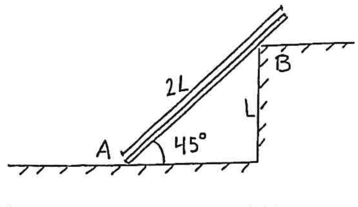
1.



Figuren visar två likadana masslösa stänger, AB och BC, förenade med en led. En massa m fäster i en lina som löper över två likadana trissor placerad mitt på respektive stång.
a) Frilägg hela stångsystemet ABC inklusive trissorna. (1 poäng)
b) Frilägg stängerna var för sig (inkludera respektive trissa i stängerna AB och BC), och ställ upp respektive kropps jämviktsekvationer. (2 poäng)

Ekvationerna behöver *inte* lösas, men det skall vara möjligt att ur ekvationerna bestämma samtliga obekanta storheter.

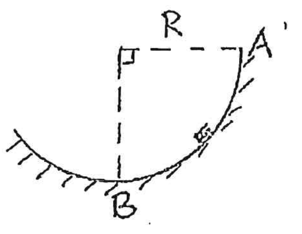
2.



En stång, massa m, stöder mot ett strävt golv vid A och mot en glatt kant B enligt figur.
a) Frilägg stången. (1 poäng)
b) Ställ upp de ekvationer som krävs för att kunna erhålla ett villkor för friktionskoefficienten vid A. (2 poäng)

Ekvationerna behöver *inte* lösas.

3.



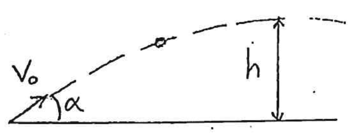
En partikel, massa m, kan glida inuti en sträv cylinder med friktionskoefficient μ och radie R. Partikeln släpps från vila i läge A. Då partikeln passerar läge B är normalkraften dubbla tyngden; $N = 2mg$.

a) Bestäm farten i läge B. (1 poäng)

b) Bestäm friktionskraftens arbete mellan A och B. (1 poäng)

c) Bestäm beloppet av accelerationen i läge B. (1 poäng)

4.



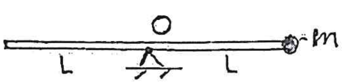
Ett föremål kastas iväg med utgångsfarten v_0 och utgångsvinkeln α; höjden h okänd.

a) När nås den maximala höjden? (1 poäng)

b) Vad är då farten? (1 poäng)

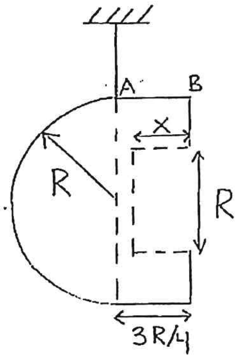
c) Bestäm den maximala höjden h. (1 poäng)

5.



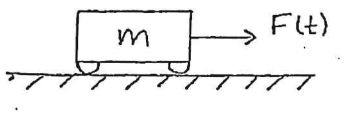
Ett system består av en stång, längd $2L$ och massa $3m$, samt en partikel m fäst i stångens ände enligt figur. Systemet släpps från vila varvid systemet börjar rotera medurs kring O. Bestäm farten hos partikeln då stången passerar sitt vertikala läge. (3 poäng)

6.



En homogen kropp består av en solid halvsfär, radie R, och en solid cylinder, längd $3R/4$. Man borrar ett hål med radien $R/2$ ur cylindern. Bestäm hålets djup x om kroppen skall kunna hänga i en lina vid A, så att AB blir horisontell. (5 poäng)

7.

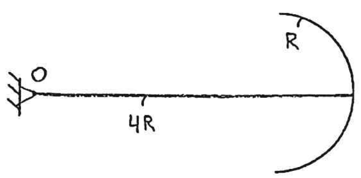


En lättrörlig vagn, massa m, påbörjar vid tiden $t = 0$ en rörelse på grund av den tidsberoende kraften $F(t) = F_0 e^{-t/\tau}$. Om maxhastigheten är den högsta hastighet som någonsin inträffar under rörelsen,

a) när uppnår vagnen halva maxhastigheten, (3 poäng)

b) hur lång sträcka har då vagnen förflyttats? (2 poäng)

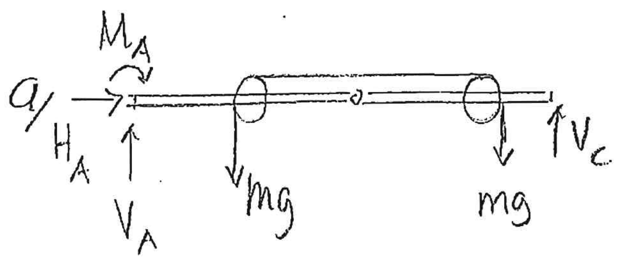
8.



Ett ankare består av en smal rak del, längd $4R$, och en halvcirkulär del med radie R enligt figur. Ankaret fäster vid leden i O och har massa per längdenhet λ. Ankaret släpps från vila då den raka delen är horisontell. Bestäm kraften på ankaret i O då den precis släppts. (5 poäng)

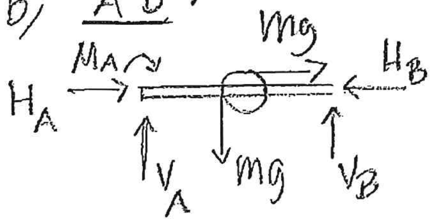
(1)

a/



Antag trissradien r.

b/ AB:

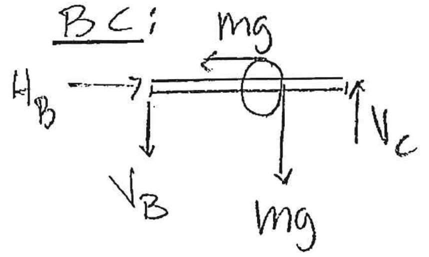


$\rightarrow$: $H_A + mg - H_B = 0$

$\uparrow$: $V_A - mg + V_B = 0$

$\curvearrowright A$: $M_A + mg(a-r) + mgr - V_B \cdot 2a = 0$

BC:



$\rightarrow$: $H_B - mg = 0$

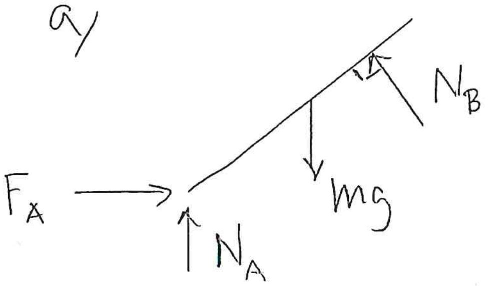
$\uparrow$: $-V_B - mg + V_c = 0$

$\curvearrowright B$: $mg(a+r) - mgr - V_c \cdot 2a = 0$

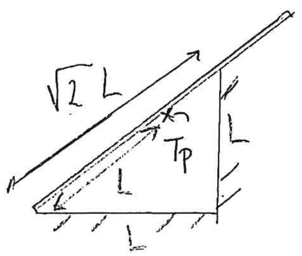
---

(2)

a/



Geometri



b/

$\rightarrow$ $F_A - N_B/\sqrt{2} = 0$ (1)

$\uparrow$: $N_A - mg + N_B/\sqrt{2} = 0$ (2)

$\curvearrowleft A$: $N_B \cdot \sqrt{2}L - mgL/\sqrt{2} = 0$ (3)

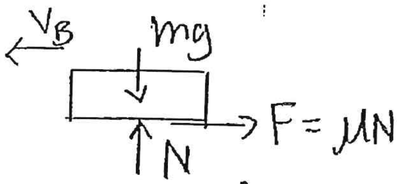
$\mu_A \geq F_A/N_A$ (4)

$\left[N_B = mg/2 \text{ ; } N_A = mg(2\sqrt{2}-1)/2\sqrt{2} \text{ ; } F_A = mg/2\sqrt{2} \right.$

$\left. \mu_A \geq \frac{1}{2\sqrt{2}-1} \right]$

(3)

a) Frilägg:



$\uparrow$: $N - mg = ma_n = mV_B^2/R \rightarrow [N = 2mg] \Rightarrow V_B^2 = gR$ (1)

$\leftarrow$: $-F = ma_s \Leftrightarrow -\mu 2mg = ma_s \rightarrow a_s = -2\mu g$ (2)

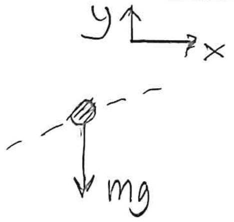
b) $W_{AB}^{ik} = \Delta T + \Delta V = \frac{1}{2}mv_B^2 - mgR = \text{ins (1)} = -mgR/2$ //

c) $a_n = V_B^2/R = g$ enl. (1). $a_s = -2\mu g$ enl. (2).

$|a| = \sqrt{a_n^2 + a_s^2} = g\sqrt{1 + 4\mu^2}$ //

---

(4)



$\uparrow$: $-mg = ma_y \Rightarrow a_y = -g$. Integrera $\Rightarrow$

$V_y = -gt + C_1 = -gt + V_0 \sin\alpha$ (1);

$\rightarrow$: $0 = ma_x \Rightarrow a_x = 0 \Rightarrow V_x = V_0 \cos\alpha$ (konstant).

a) Max h då $V_y = 0$. (1) $\Rightarrow t_h = V_0 \sin\alpha / g$ //

b) $V_h = V_x = V_0 \cos\alpha$ //

c) Integrera (1) $\Rightarrow$

$S_y = -gt^2/2 + V_0 t \sin\alpha + C_2 = -gt^2/2 + V_0 t \sin\alpha$ (2)

$t = t_h$ ger $S_y = h$. (2) $\Rightarrow h = \ldots = V_0^2 \sin^2\alpha / (2g)$ //

[c kan även lösas m.h.a. $E = T + V$ = konst.]

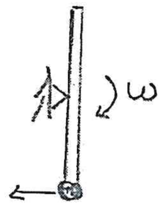
$T_1 = \frac{1}{2}mV_0^2$ $V_1 = 0$ $T_2 = \frac{1}{2}mV_h^2$ $V_2 = mgh$

(5)

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \quad (1)$$

$T_1 = 0$ (vila) $\quad V_1 = 0$ (nollnivån).

I läge 2 har vi



$$T_2 = \frac{1}{2} I_{O,\text{stång}}\, \omega^2 + \frac{1}{2} m v^2 \qquad \left[\text{Kan ta } \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} I_{O,m}\, \omega^2\right]$$

$$I_{O,\text{stång}} = \underbrace{\text{"}\frac{1}{12} m L^2\text{"}}_{\text{FS s.16}} = \frac{1}{12} \cdot 3m \cdot (2L)^2 = mL^2$$

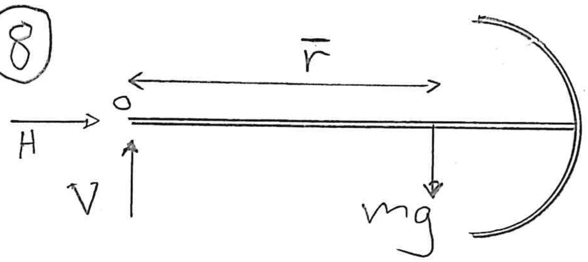
$$T_2 = \frac{1}{2} m L^2 \omega^2 + \frac{1}{2} m (L\omega)^2 = m L^2 \omega^2$$

$$V_2 = -mgL \quad (\text{för kulan})$$

$$(1) \Rightarrow 0 = mL^2\omega^2 - mgL \Rightarrow v = L\omega = \sqrt{gL} \; //$$

---

(8)



$\leftarrow: \; -H = m\bar{a}_n = m\bar{r}\omega^2 = 0 \quad (1)$

då $\omega = 0$ i startläget.

$\downarrow: \; mg - V = m\bar{a}_t = m\bar{r}\dot{\omega} \quad (2)$

$$\curvearrowleft O: \; mg\bar{r} = I_O \dot{\omega} \quad (3). \qquad (2) \,\&\, (3) \Rightarrow V = mg\left(1 - m\bar{r}^2/I_O\right) \quad (4)$$

$$m = \lambda(4R + R\pi) = \lambda R(4+\pi) \quad (5) \qquad [= m_{st} + m_{cyl.}]$$

$$\bar{r} = \frac{\lambda 4R \cdot 2R + \lambda R\pi \cdot (3R + 2R/\pi)}{\lambda 4R + \lambda R\pi} = R\frac{(10+3\pi)}{(4+\pi)} \quad (6)$$

$$I_O = I_{O,st} + I_{O,cyl} \quad (7) \qquad I_{O,st} = \frac{1}{3}\lambda 4R \cdot (4R)^2 \quad (8)$$

$$I_{O,cyl} = \underbrace{(1 - 4/\pi^2)\lambda R\pi R^2}_{\bar{I}_{cyl} \text{ ur FS s.17 fall 4}} + \underbrace{\lambda R\pi\left(3R + 2R/\pi\right)^2}_{\text{Steiner}} =$$

$$= \lambda R^3\pi\left(10 + 12/\pi\right) \quad (9). \qquad (7) \Rightarrow I_O = \lambda R^3\left(10\pi + 100/3\right) \quad (10)$$

Ekv. (5), (6) och (10) i (4) ger V //

(6) Antag densitet ρ.

Halvsfär: $m_1 = \rho V_1 = \rho \frac{2}{3}\pi R^3$; $\bar{z}_1 = -3R/8$

Hel cylinder: $m_2 = \rho V_2 = \rho \pi R^2 3R/4$; $\bar{z}_2 = 3R/8$

Hålcylinder: $m_3 = \rho V_3 = \rho\pi (R/2)^2 X$; $\bar{z}_3 = 3R/4 - X/2$

$$\bar{z} = \frac{m_1\bar{z}_1 + m_2\bar{z}_2 - m_3\bar{z}_3}{m_1 + m_2 - m_3} =$$

$$= \frac{-\rho\pi R^4/4 + \rho\pi 9R^4/32 - \rho\pi 3R^3 X/16 + \rho\pi R^2 X^2/8}{\rho\pi 2R^3/3 + \rho\pi 3R^3/4 - \rho\pi R^2 X/4} \quad (1)$$

AB horisontell $\Rightarrow$ Tp under A $\Rightarrow \bar{z} = 0$.

Täljaren noll, dvs $R^2/32 - RX3/16 + X^2/8 = 0$

$\Rightarrow X^2 - 3RX/2 + R^2/4 = 0 \Rightarrow$

$$X = 3R/4 \pm \left[9R^2/16 - R^2/4\right]^{1/2}$$

$$= 3R/4 \; (-) \; \sqrt{5}R/4 = \frac{3-\sqrt{5}}{4} R$$ //

(7) $F = ma \Leftrightarrow F(t) = m\,dv/dt \rightarrow$ separera $\rightarrow$

$$\int_0^t F_0 e^{-t/\tau}\,dt = mv \Leftrightarrow F_0\tau\left(1 - e^{-t/\tau}\right) = mv \quad (1)$$

V_{max} då $t \to \infty$ enl. (1), dvs $V_{max} = F_0\tau/m$ (2)

a/ Insatt $v^* = V_{max}/2$ i (1) ger

$$1 - e^{-t^*/\tau} = 1/2 \rightarrow t^* = \tau \ln 2 \,//$$

b/ $v = ds/dt$ i (1) och separera $\rightarrow$

$$F_0\tau\int_0^t \left(1 - e^{-t/\tau}\right)dt = ms \Leftrightarrow F_0\tau\left(t - \tau + \tau e^{-t/\tau}\right) = ms \quad (3)$$

Insatt $t = t^*$ i (3) $\rightarrow s^* = F_0\tau^2/m\,(\ln 2 - 0{,}5) \,//$