

Tentamen i TME010 Mekanik TD, 2023-01-12 kl. 8.30–12.30

Jourhavande: Peter Folkow tel. 1521 alt. 0729-617241 (salarna besöks 9.30 och 11.00)

Lösningar anslås på kurshemsidan senast den 13/1.

Preliminärt rättningsresultat anslås på M2 senast den 31/1.

Rättningsgranskning och utlämning av tentor sker på M2, avd. Dynamik, 1/2 samt 2/2 kl. 12.00–13.00.

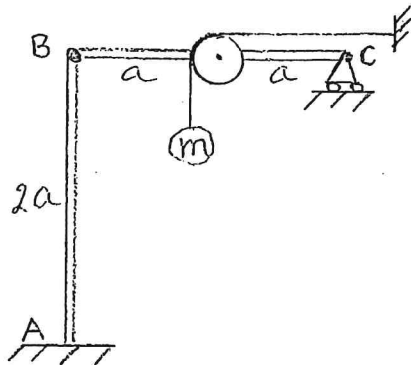
Tillåtna hjälpmedel: Formelsamling i mekanik av M.M. Japp (delas ut vid tentan), Matematiska handböcker (t ex Beta, Matte 5) eller utdrag därur, Chalmersgodkänd räknare är tillåten.

Betygsgränser: Uppgift 1-5 ger maximalt 3 poäng vardera. Uppgift 6-8 ger maximalt 5 poäng vardera. Betyget på tentamen ges enligt följande tabell:

		Poäng på uppgift 1–5 (inkl. bonuspoäng)						
		0–7	8	9	10	11	12	13–19
Poäng på uppgift 6–8	0–4	U	U	U	U	U	3	3
	5–8	U	U	U	U	3	3	4
	9	U	U	U	3	3	4	4
	10–11	U	U	3	3	4	4	5
	12–15	U	3	3	4	4	5	5

UPPSTÄLLDA EKVATIONER SKALL MOTIVERAS.

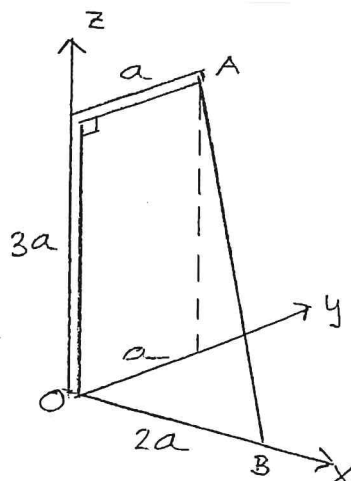
1.



En struktur är sammansatt av två masslösa stänger, AB och BC. Mitt på BC fäster en masslös trissa med en lina och en vikt enligt figur.

- Frilägg stångstrukturen ABC (inklusive trissan) som en helhet. (1 poäng)
- Bestäm stödkrafter och ev. stödmoment i A och C för möjlig jämvikt. (2 poäng)

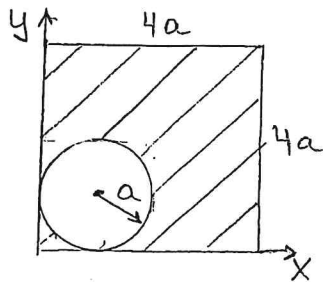
2.



En spänd lina, med linkraft F , är fäst i änden av en struktur i A samt förankrad i marken vid B enligt figur.

- Uttryck linkraften som verkar på strukturen i A som en vektor. (1 poäng)
- Bestäm momentet i O från linkraften som verkar på strukturen i A. (1 poäng)
- Bestäm den vertikala z -komponenten av linkraften som verkar på infästningen i marken vid B. (1 poäng)

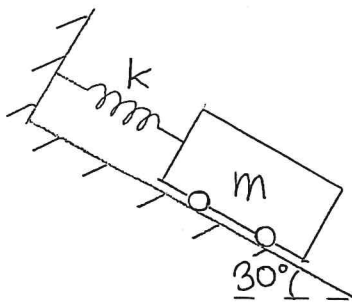
3.



En cirkel är utskuren ur en kvadratisk skiva enligt figuren. Skivans massa per ytenhet är σ .

- Bestäm både x - och y -koordinaten för kroppens tyngdpunkt. (1 poäng)
- Bestäm masströghetsmomentet m.a.p. y -axeln. (2 poäng)

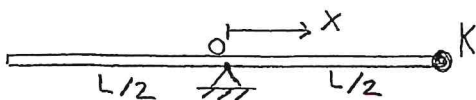
4.



En vagn med massa m är placerad på ett lutande plan och sitter fast med en fjäder med styvhet k enligt figuren.

- Hur stor är fjäderförlängningen vid jämvikt? (1 poäng)
- Om lådan släpps i det läge där fjädern är ospänd, hur stor fart får då lådan när den glidit till det läge där fjädern har förlängningen vid jämvikt enligt a)? (2 poäng)

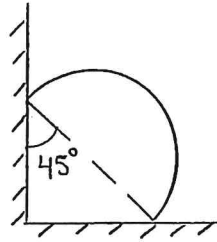
5.



Ett system består av en liten kropp K med massa m fastsatt i ena änden av en smal stång med längd L och massa m . Stången är på mitten ledad i O. Systemet släpps från vila i figurläget. Bestäm i detta läge

- systemets tyngdpunkt $\bar{x}$, (1 poäng)
- beloppet av K:s acceleration. (2 poäng)

6.



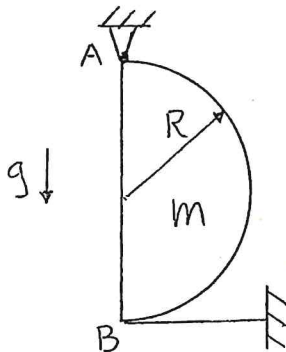
En halvcirkelbåge lutar med vinkel 45° mot ett strävt golv och en sträv vägg enligt figur. Fullt utvecklad friktion antas råda mellan kroppen och väggen för en given friktionskoefficient μ_v . Bestäm ett villkor på friktionskoefficienten μ_g mellan kroppen och golvet för möjlig jämvikt.

7.



En partikel är fäst i ett lätt snöre med längd L . Partikeln utför cirkulär rörelse med given utslagsvinkel α enligt figur (v ej given). Hur lång tid tar ett varv (omloppstiden) för en möjlig sådan rörelse?

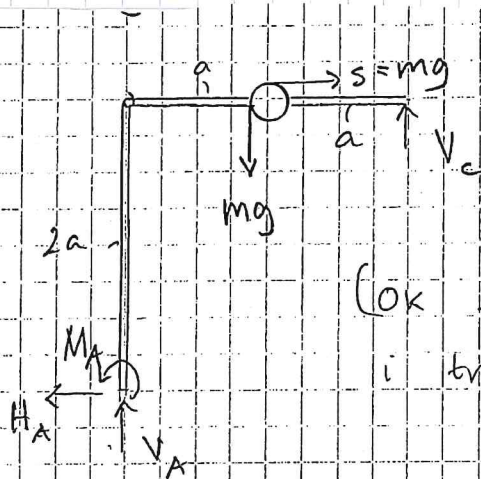
8.



En tunn halvcirkelyta (massa m , radie R) är upphängd i en friktionsfri led i A. Kroppen hålls från början i jämvikt via en horisontell lina i B enligt figuren, varefter linan klipps. Bestäm beloppet av den reaktionskraft som verkar på skivan i A

- när systemet är i jämvikt innan linan klipps, (1 poäng)
- omedelbart efter att linan klipps av. (4 poäng)

① a/



(OK flytta in linkraften i trissans mitl.)

b/ $\rightarrow : mg - H_A = 0 \Rightarrow H_A = mg \parallel (1)$

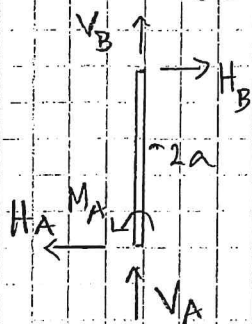
$\uparrow : V_A + V_C - mg = 0 \quad (2)$

$\curvearrowleft_A : M_A + V_C \cdot 2a - mg(a+r) - mg(2a+r) = 0$

$\Leftrightarrow M_A + V_C \cdot 2a - mg \cdot 3a = 0 \quad (3)$

[Kan flytta in linkraften i mitten av trissan
Såsom läroboken visar; radien r ej med där]

Frilägg AB eller BC [gör båda här]

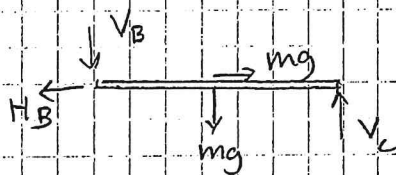


$\curvearrowleft_B : M_A - H_A \cdot 2a = 0$

$\Rightarrow M_A = 2mga \parallel \text{ur (1)}$

$(3) \Rightarrow V_C = \frac{3mga - M_A}{2a} = mg/2 \parallel$

$(2) \Rightarrow V_B = mg - V_C = mg/2 \parallel$



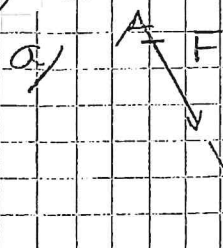
$\curvearrowleft_B : V_C \cdot 2a - mga = 0$

$\Rightarrow V_C = mg/2 \parallel$

$(2) \Rightarrow V_A = mg - V_C = mg/2 \parallel$

$(3) \Rightarrow M_A = 3mga - V_C \cdot 2a = 2mga \parallel$

②



$$\vec{F}_A = F \vec{e}_{AB} \quad (1)$$

$$\vec{e}_{AB} = \frac{(2a, -a, -3a)}{\sqrt{14}a} = \frac{(2, -1, -3)}{\sqrt{14}} \quad (2)$$

$$(1) \text{ och } (2) \Rightarrow \vec{F}_A = F/\sqrt{14} (2, -1, -3) //$$

$$b) \vec{M}_0 = \vec{r} \times \vec{F} \quad (3)$$

$$\vec{r} = \vec{OA} = (0, a, 3a)$$

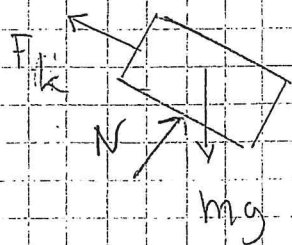
$$\vec{M}_0 = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & a & 3a \\ \frac{2F}{\sqrt{14}} & \frac{-F}{\sqrt{14}} & \frac{-3F}{\sqrt{14}} \end{vmatrix} = \frac{Fa}{\sqrt{14}} (0, 6, -2) //$$



$$\vec{F}_B = F \vec{e}_{BA} = -F \vec{e}_{AB} = -\vec{F}_A \text{ enl. a)}$$

$$F_z = \vec{F}_B \cdot \vec{e}_z = 3F/\sqrt{14} //$$

④ a) Vid jämvikt



$$mg \sin 30^\circ - F_k = 0$$

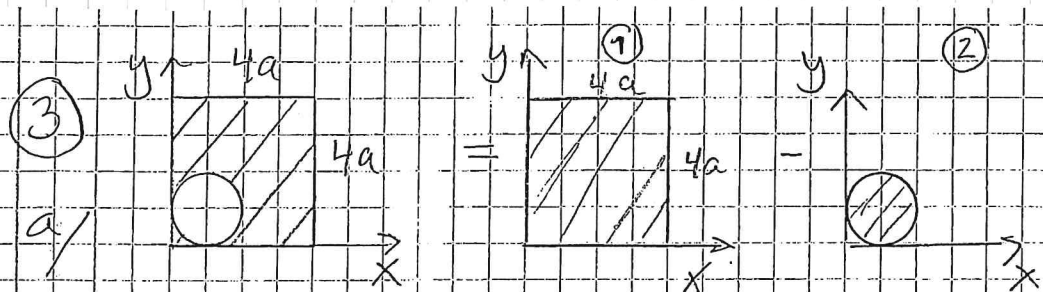
$$\Rightarrow F_k = kx = mg/2 \Rightarrow x = mg/2k //$$

$$b) T_1 + \vec{V}_1 = T_2 + \vec{V}_2 \quad (1) \quad [\text{Inga förluster}]$$

$$T_1 = \vec{V}_1 = 0 \quad T_2 = \frac{1}{2} m v^2 \quad \vec{V}_2 = \vec{V}_{2,k} + \vec{V}_{2,m}$$

$$\vec{V}_{2,k} = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{8} m g^2 / k \quad \vec{V}_{2,m} = -mgx \sin 30^\circ = -\frac{1}{4} m g^2 / k$$

$$(1) \Rightarrow 0 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{8} m g^2 / k - \frac{1}{4} m g^2 / k \Rightarrow v = \frac{g}{2} \sqrt{m/k} //$$



$$m_1 = \sigma 16a^2$$

$$\bar{x}_1 = \bar{y}_1 = 2a$$

$$m_2 = \sigma a^2 \pi$$

$$\bar{x}_2 = \bar{y}_2 = a$$

$$\bar{X} = \frac{m_1 \bar{x}_1 - m_2 \bar{x}_2}{m_1 - m_2} = \frac{\sigma 16a^2 \cdot 2a - \sigma a^2 \pi \cdot a}{\sigma 16a^2 - \sigma a^2 \pi} =$$

$$= (32 - \pi)a / (16 - \pi) \approx 2.24a //$$

$$\bar{y} = \bar{X} // \quad (\text{symmetric})$$

$$b/ \quad I_y = I_{y1} - I_{y2} \quad (1)$$

$$I_{y1} = m_1 16a^2 / 3 = 256 \sigma a^4 / 3 \quad [\text{FS s. 16 fall 1}]$$

$$I_{y2} = m_2 a^2 / 4 + m_2 a^2 = 5m_2 a^2 / 4 =$$

$$= 5\pi \sigma a^4 / 4 \quad [\text{FS s. 17 fall 1}]$$

$$(1) \Rightarrow I_y = \sigma a^4 (1024 - 15\pi) / 12 //$$

$$\textcircled{5} \quad a/ \quad \left. \begin{array}{l} m_{\text{stäng}} = m \quad \bar{x}_{\text{stäng}} = 0 \\ m_k = m \quad \bar{x}_k = L/2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\bar{x} = \frac{m \cdot 0 + m \cdot L/2}{m+m} = L/4 //$$

$$b/ \quad \left. \begin{array}{l} \leftarrow a_n = \frac{L}{2} \omega^2 \\ \downarrow a_s = \frac{L}{2} \dot{\omega} \end{array} \right\} \text{Vid start} \Rightarrow \omega = 0 \Rightarrow a_n = 0 //$$

$\omega, \dot{\omega}$

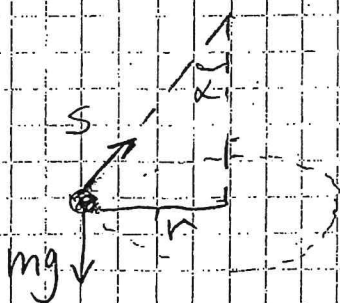
$\dot{\omega}$ ur rotationslagen: $\Sigma M_O = I_O \dot{\omega} \Rightarrow$

$$\textcircled{O}: mg \cdot \frac{L}{2} = I_O \dot{\omega} \quad (1)$$

$$I_O = \frac{1}{12} mL^2 + m \left(\frac{L}{2} \right)^2 = \frac{1}{3} mL^2$$

$$\text{Ins. i (1)} \Rightarrow \dot{\omega} = 3g/2L \quad a_s = \frac{L}{2} \dot{\omega} = \frac{3}{4}g //$$

$\textcircled{7}$ Fn lagg par tihela:



$$\uparrow: S \cos \alpha - mg = m \cdot 0 = 0 \quad (1)$$

$$\rightarrow: S \sin \alpha = m a_n = m v^2 / r = m r \omega^2 \quad (2)$$

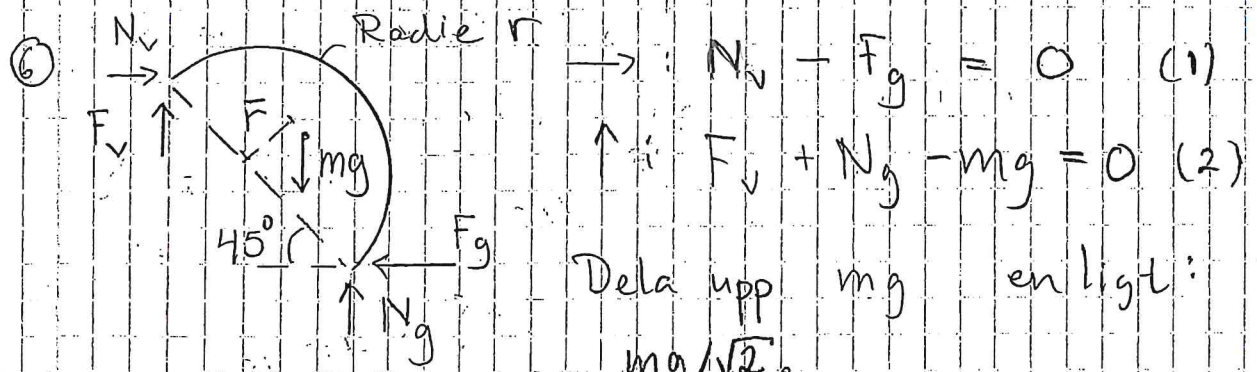
$$r = L \sin \alpha$$

$$(1) \Rightarrow S = mg / \cos \alpha \quad (3)$$

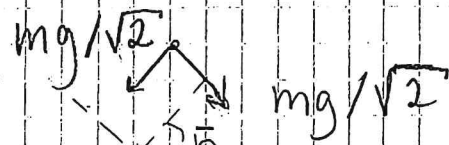
$$(2) \Rightarrow S \sin \alpha = m L \sin \alpha \cdot \omega^2 \Rightarrow$$

$$\omega = \sqrt{S / mL} = [\text{anv. (3)}] = \sqrt{g / L \cos \alpha}$$

$$\text{Tid för ett varv } T = \frac{2\pi}{\omega} //$$



$$\bar{r} = 2r/\pi [F \text{ s. 17 fall 4}]$$



Golv $\hat{g}$: $N_v \cdot 2r/\sqrt{2} + F_v \cdot 2r/\sqrt{2}$

$$+ mg/\sqrt{2} \cdot \bar{r} - mg/\sqrt{2} \cdot r = 0 \Rightarrow$$

$$2N_v + 2F_v + 2mg/\pi - mg = 0 \quad (3)$$

Sätt nu $F_v = \mu_v N_v$ i (3) $\Rightarrow$

$$N_v [2 + 2\mu_v] = mg [1 - 2/\pi] \Rightarrow$$

$$N_v = \frac{mg(\pi - 2)}{2\pi(1 + \mu_v)} \quad (4)$$

(1) $\Rightarrow F_g = N_v$ enligt (4).

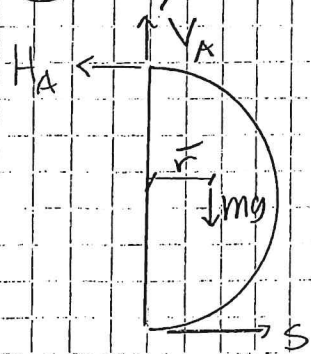
(2) $\Rightarrow N_g = mg - F_v = mg - \mu_v N_v \Rightarrow$

anv. (4) $\Rightarrow N_g = \frac{mg(2\pi + \mu_v\pi + 2\mu_v)}{2\pi(1 + \mu_v)} \quad (5)$

$$\frac{F_g}{N_g} \leq \mu_g \Leftrightarrow \frac{(\pi - 2)}{(2\pi + \mu_v\pi + 2\mu_v)} \leq \mu_g$$

8

a/ Jämvikt:



$$\leftarrow: H_A - S = 0 \quad (1)$$

$$\uparrow: V_A - mg = 0 \quad (2)$$

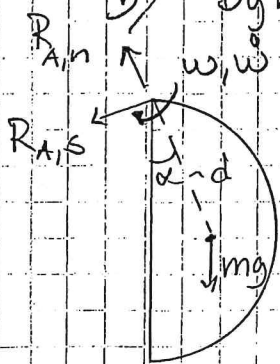
$$\curvearrowright_A: mg \bar{r} - S R = 0 \quad (3)$$

$$\bar{r} = 4R/3\pi \quad [\text{t.ex. FS s. 17 fall 2}]$$

$$(3) \Rightarrow S = mg 2/3\pi; \quad (2) \Rightarrow V_A = mg; \quad (1) \Rightarrow H_A = S.$$

$$R_A = \sqrt{H_A^2 + V_A^2} \approx 1.02 mg //$$

b/ Dynamik:



$$\uparrow: R_{A,n} - mg \cos \alpha = m d \dot{\omega}^2 = 0 \quad (4)$$

$$\text{då } \omega = 0.$$

$$\leftarrow: R_{A,s} + mg \sin \alpha = m d \dot{\omega} \quad (5)$$

$$\curvearrowright_A: mg \bar{r} = I_A \dot{\omega} \quad (6)$$

$$[\bar{r} = d \sin \alpha]; \quad d^2 = R^2 + \bar{r}^2; \quad \tan \alpha = \bar{r}/R = \frac{4}{3\pi} \quad (\alpha \approx 23^\circ)$$

$$I_x = \bar{I} + m d^2 = [FS s. 17 fall 2] =$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2} \right) m R^2 + m d^2 = \frac{3}{2} m R^2 \quad (7)$$

$$(7) \text{ i } (6) \Rightarrow \dot{\omega} = 2g \bar{r} / (3R^2) = 8g / (9\pi R) \quad (8)$$

$$(4) \Rightarrow R_{A,n} = mg \cos \alpha \approx 0.92 mg$$

$$(5) \Rightarrow R_{A,s} = m d \dot{\omega} - mg \sin \alpha \approx -0.08 mg$$

$$R_A = \sqrt{R_{A,n}^2 + R_{A,s}^2} \approx 0.92 mg //$$