

Tentamen i TME010 Mekanik TD, 2022-08-24 kl. 14.00–18.00

Jourhavande: Peter Folkow tel. 1521 alt. 0729-617241 (salarna besöks 15.00 och 16.30)

Lösningar anslås på kurshemsidan senast den 25/8.

Preliminärt rättningsresultat anslås på M2 senast den 14/9.

Rättningsgranskning och utlämning av tentor sker på M2, avd. Dynamik, 15/9 samt 16/9 kl. 12.00–13.00.

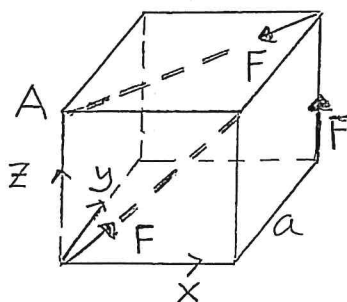
Tillåtna hjälpmedel: Formelsamling i mekanik av M.M. Japp (delas ut vid tentan),
Matematiska handböcker (t ex Beta) eller utdrag därur,
Chalmersgodkänd räknare är tillåten.

Betygsgränser: Uppgift 1-5 ger maximalt 3 poäng vardera. Uppgift 6-8 ger maximalt 5 poäng vardera. Betyget på tentamen ges enligt följande tabell:

		Poäng på uppgift 1–5 (inkl. bonuspoäng)						
		0–7	8	9	10	11	12	13–18
Poäng på uppgift 6–8	0–4	U	U	U	U	U	3	3
	5–8	U	U	U	U	3	3	4
	9	U	U	U	3	3	4	4
	10–11	U	U	3	3	4	4	5
	12–15	U	3	3	4	4	5	5

UPPSTÄLLDA EKVATIONER SKALL MOTIVERAS.

1.

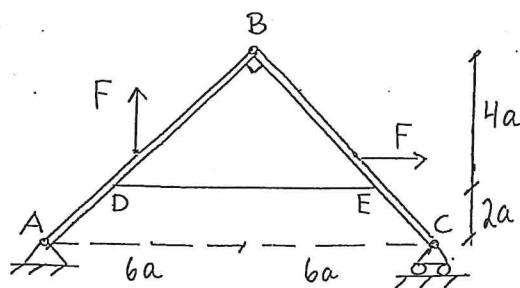


Tre stycken krafter, belopp F vardera, verkar på en kub med kantlängder a enligt figur.

Bestäm systemets

- kraftsumma, (1 poäng)
- moment med avseende på punkten A. (2 poäng)

2.

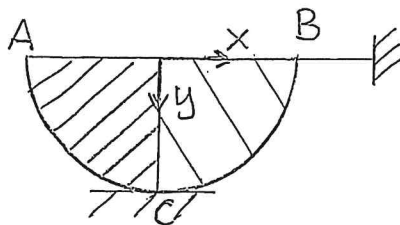


Ett system av två likadana *lätta* stänger, AB och BC, är förenade med en led B och en lina DE enligt figur. En horisontell kraft F angriper mitt på BC, och en vertikal kraft F angriper mitt på AB.

- Frilägg ABC (inklusive linan) som ett system. (1 poäng)
- Ställ upp jämviktsekvationer för systemet enligt a). (1 poäng)
- Frilägg stängerna AB och BC var för sig. (1 poäng)

(För korrekt svar krävs att samtliga införda krafter ges konsekventa beteckningar, så att det i princip är möjligt att m.h.a. jämviktsekvationer till a) och c) bestämma samtliga obekanta. Observera att ekvationerna till b) *inte* behöver lösas).

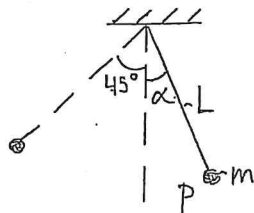
3.



En halvcirkelyta med massa m och radie r består av två delar där den vänstra kvartcirkelytan har dubbelt så stor massa per ytenhet jämfört med den högra kvartcirkelytan. Kroppen är placerad på ett strävt underlag i C. En lina är fäst i B varvid kroppen är i jämvikt med AB horisontell.

- Bestäm systemet gemensamma tyngdpunkt $(\bar{x}, \bar{y})$. (2 poäng)
- Bestäm ett uttryck för den minsta möjliga statiska friktionskoefficienten μ_s mellan kroppen och planet, som möjliggör jämvikt. (1 poäng)

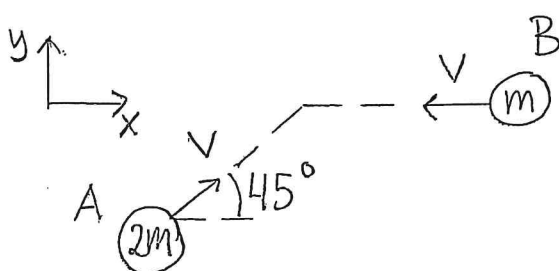
4.



En pendel består av en liten kula, massa m , som hänger i ett snöre, längd L . Pendelns maximala utslagsvinkel är 45° .

- Bestäm kulans fart då den passerar punkten P (se figur). (1 poäng)
- Frilägg kulan i läge P, och bestäm, m.h.a. svaret i a), linkraften. (1 poäng)
- Bestäm tangentialaccelerationen (belopp och riktning) i läge P. (1 poäng)

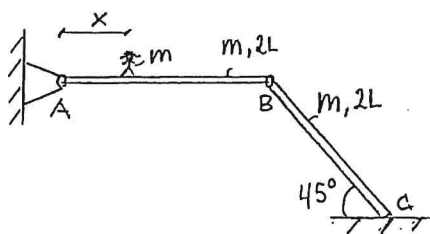
5.



Två kroppar, kropp A med massa $2m$ och kropp B med massa m , glider friktionsfritt på ett underlag med farten v vardera enligt figur. Kropparna kolliderar och fäster därefter i varandra. Bestäm

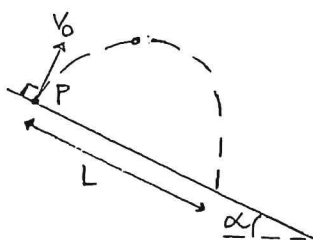
- systemets fart i x - respektive y -led efter kollisionen, (2 poäng)
- den mekaniska energin som går förlorad i kollisionen. (1 poäng)

6.



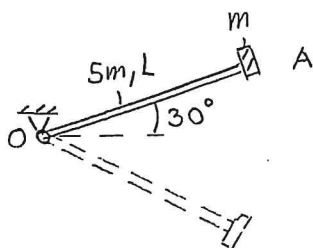
En struktur i jämvikt är sammansatt av två stänger, AB och BC, med massa m och längd $2L$ vardera. Stängerna är friktionsfritt ledade i A och B. Ena stängen stöder mot det sträva underlaget i C, friktionskoefficient $\mu = 3/4$. En person, massa m , går långsamt från A utmed den horisontella stängen. Vid vilket x påbörjas glidning i C? (5 poäng)

7.



En liten kropp skjuts ut från en punkt P på ett lutande plan med lutningsvinkeln α . Kroppen skjuts ut vinkelrätt mot planet med en begynnelsehastighet v_0 . Bestäm kastlängden L . (5 poäng)

8.



Uppswinget är en stor gunga verkande som en pendel där rotationen sker kring horisontella axeln O. Gungan består av en smal stång, massa $5m$ och längd L , samt en liten sittkorg med massan m och försumbar utsträckning i rummet. Gungan släpps från vila i läge A. Bestäm omedelbart därefter

- vinkelaccelerationen $\dot{\omega}$, (2 poäng)
- accelerationen i sittkorgen, (1 poäng)
- totala reaktionskraften verkande på gungan i O. (2 poäng)

① Studera varje kraft, start i nedre vänster hörn:

$$\mathbf{F}_1 = (F/\sqrt{2}, 0, F/\sqrt{2})$$

$$\mathbf{F}_2 = (-F/\sqrt{2}, -F/\sqrt{2}, 0) \quad \mathbf{F}_3 = (0, 0, F)$$

$$a) \sum \mathbf{F} = (0, -F/\sqrt{2}, F(1 + 1/\sqrt{2})) //$$

$$b) \sum \mathbf{M}_A = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 + \mathbf{r}_3 \times \mathbf{F}_3$$

$$\mathbf{r}_1 = (0, 0, -a); \quad \mathbf{r}_2 = (a, a, 0); \quad \mathbf{r}_3 = (a, a, -a)$$

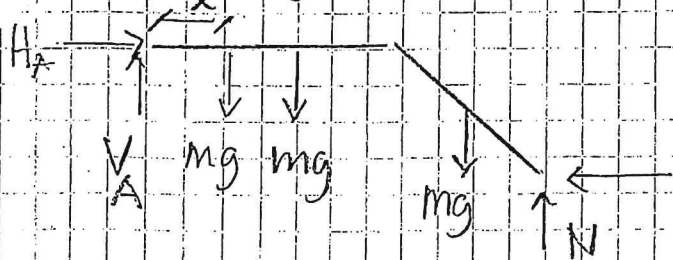
$$\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 = (0, -Fa/\sqrt{2}, 0)$$

$$\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 = \mathbf{0} \quad (\mathbf{F}_2 \text{ går genom } A)$$

$$\mathbf{r}_3 \times \mathbf{F}_3 = (Fa, -Fa, 0)$$

$$\sum \mathbf{M}_A = Fa(1, -(1 + 1/\sqrt{2}), 0) //$$

⑥ Frilägg hela systemet!



Antag på gräns
till glidning

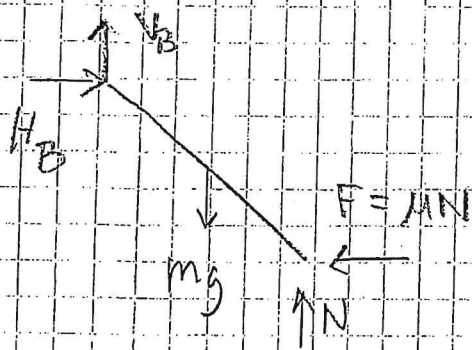
$$F = \mu N \quad (1)$$

$$\hat{A}: mg \cdot x + mg L + mg(2L + L/\sqrt{2}) + \mu N (2L/\sqrt{2})$$

$$- N(2L + 2L/\sqrt{2}) = 0 \quad (2)$$

6. forts.

F n lägg BC:



$$\begin{aligned} \hat{B}: mg L/\sqrt{2} + \mu N 2L/\sqrt{2} \\ - N 2L/\sqrt{2} = 0 \quad (3) \end{aligned}$$

$$(3) \Rightarrow N = mg/2(1-\mu) = 2mg \quad (4) \quad [\mu = 3/4]$$

$$(4) \text{ i } (2) \text{ ger } x = L //$$

④ $a/T_1 + \bar{V}_1 = T_2 + \bar{V}_2 \quad (1) \quad [\text{Mek. energi bevaras}]$

$$T_1 = 0 \quad (\text{vändläge}) \quad \bar{V}_1 = -mgL/\sqrt{2}$$

$$T_2 = \frac{1}{2}mv^2 \quad \bar{V}_2 = -mgL \cos \alpha$$

[Nollnivå i "tak" för lägesenergin]

$$\text{Insatt i } (1) \Rightarrow -mgL/\sqrt{2} = \frac{1}{2}mv^2 - mgL \cos \alpha$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{2gL(\cos \alpha - 1/\sqrt{2})} //$$

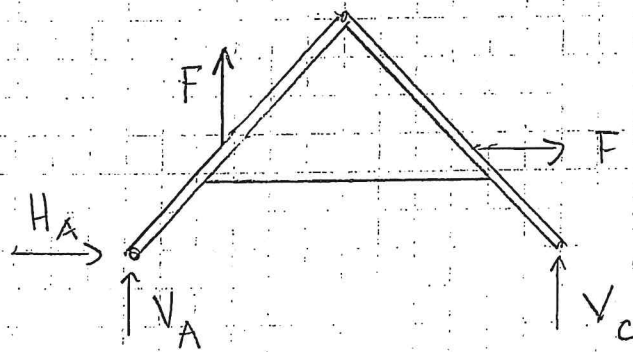
b/

$$\begin{aligned} S - mg \cos \alpha &= ma_n = mv^2/L \\ \Rightarrow S &= m(g \cos \alpha + v^2/L) // \text{ v wrd } \end{aligned}$$

$$c/ \quad \swarrow: mg \sin \alpha = ma_s \Rightarrow a_s = g \sin \alpha //$$

②

a/

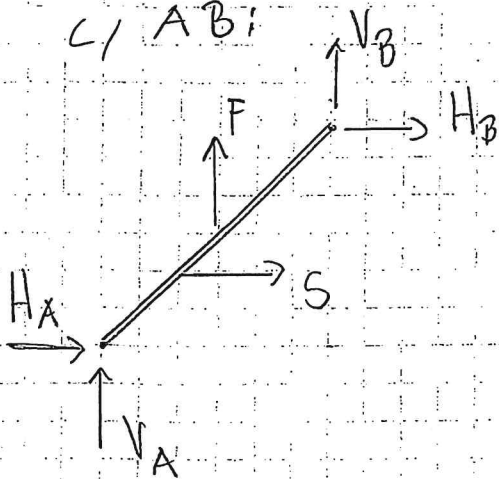


b/ $\rightarrow: H_A + F = 0 \quad (1)$

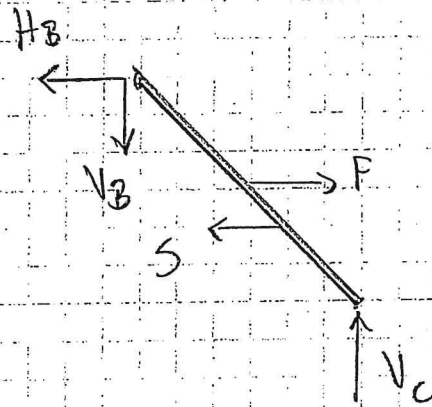
$\uparrow: V_A + V_C + F = 0 \quad (2)$

$\curvearrowright A: F \cdot 3a - F \cdot 3a + V_C \cdot 12a = 0 \quad (3)$

c/ AB:



BC:



$(1) \Rightarrow H_A = -F \quad (3) \Rightarrow V_C = 0 \quad (2) \Rightarrow V_A = -F$

Imv. for BC $\Rightarrow S = 3F/4; H_B = F/4; V_B = 0$

③ a/ Antag massa/ytenhet:

σ för höger del; 2σ för vänster del.

Höger del: $m_H = \sigma A_H = \sigma r^2 \pi / 2$

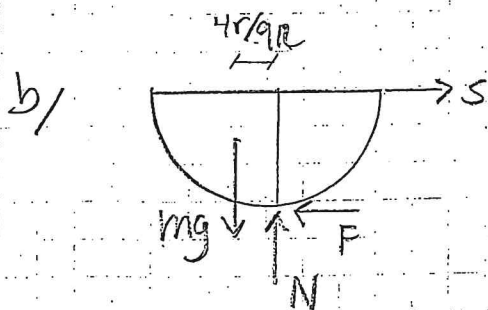
$$\bar{x}_H = 4r/3\pi \quad \bar{y}_H = 4r/3\pi$$

Vänster del: $m_V = 2\sigma A_V = \sigma r^2 \pi$

$$\bar{x}_V = -4r/3\pi \quad \bar{y}_V = 4r/3\pi$$

$$\bar{x} = \frac{m_H \cdot \bar{x}_H + m_V \bar{x}_V}{m_H + m_V} = -\frac{4r}{9\pi} //$$

$$\bar{y} = \frac{m_H \cdot \bar{y}_H + m_V \bar{y}_V}{m_H + m_V} = \frac{4r}{3\pi} //$$



$$\rightarrow: S - F = 0 \quad (1)$$

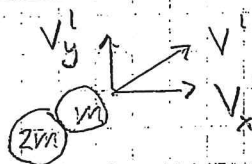
$$\uparrow: N - mg = 0 \quad (2)$$

$$\curvearrowright: S \cdot r - mg \cdot 4r/9\pi = 0 \quad (3)$$

$$(1) - (3) \Rightarrow N = mg; \quad F = S = mg \cdot 4/9\pi$$

$$|F|/|N| \leq \mu_s \Rightarrow \mu_{s,min} = F/N = 4/(9\pi) //$$

⑤ Antag efter stöt



a/ Inga yttre krafter på systemet $\Rightarrow p$ bevaras

$$p_x: 2m \cdot V/\sqrt{2} - mV = 3m V'_x$$

$$p_y: 2m V/\sqrt{2} = 3m V'_y$$

$$\Rightarrow V'_x = \frac{V(\sqrt{2}-1)}{3} ; \quad V'_y = \frac{V\sqrt{2}}{3}$$

5 forts

$$b/ \quad T_1 + V_1 + W^{(ik)} = T_2 + V_2 \quad (1) \quad V_1 = V_2 = 0,$$

$$T_1 = \frac{1}{2} 2m V^2 + \frac{1}{2} m V^2 = \frac{1}{2} 3m V^2$$

$$T_2 = \frac{1}{2} 3m (V')^2 = \frac{1}{2} 3m [(V'_x)^2 + (V'_y)^2] =$$

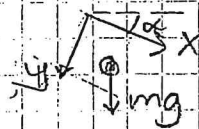
$$= \frac{1}{2} 3m \left[\frac{1}{9} (2+1-2\sqrt{2}) + \frac{1}{9} 2 \right] V^2 =$$

$$\frac{1}{2} 3m \left[\frac{5-2\sqrt{2}}{9} \right] V^2$$

$$W^{(ik)} = T_2 - T_1 = -\frac{1}{2} 3m \left[\frac{4+2\sqrt{2}}{9} \right] V^2 = -\left[\frac{2+\sqrt{2}}{3} \right] m V^2 //$$

7

Förlägg kroppen, in för xy-systemet



$$mg \sin \alpha = m \ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} = g \sin \alpha \quad (1)$$

$$\downarrow : mg \cos \alpha = m \ddot{y} \Rightarrow \ddot{y} = g \cos \alpha \quad (2)$$

Integrera (1) och (2):

$$\dot{x} = g \sin \alpha \cdot t + C_1 \quad (3) \quad \dot{y} = g \cos \alpha \cdot t + C_2 \quad (4)$$

$$\dot{x}(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0; \quad \dot{y}(0) = -V_0 = C_2$$

Integrera (3) och (4):

7, forts

$$x = g \sin \alpha \cdot t^2/2 + C_3 \quad (5)$$

$$y = g \cos \alpha \cdot t^2/2 - v_0 t + C_4 \quad (6)$$

$$x(0) = 0 \Rightarrow C_3 = 0 ; y(0) = 0 \Rightarrow C_4 = 0$$

Kroppen når marken $\Rightarrow y = 0$ igen

$$(6) \Rightarrow t [g \cos \alpha \cdot t/2 - v_0] = 0 \Rightarrow$$

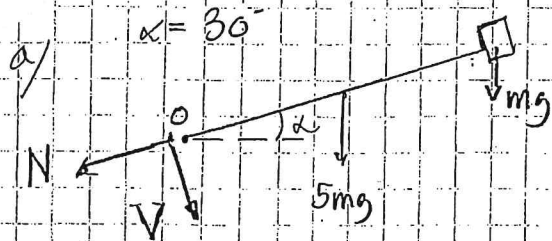
$$t^* = 2v_0 / (g \cos \alpha) \quad (7) \quad \text{ins. i (5)}$$

$$x(t^*) = g \sin \alpha \cdot (4v_0^2 / (g \cos \alpha)^2) / 2 = \\ = 2v_0^2 \sin \alpha / (g \cos^2 \alpha) //$$

8

Frlägg gungan:

Allt $6mg \bar{r} \cos \alpha$



$$\vec{O} : mg L \cos \alpha + 5mg \frac{L}{2} \cos \alpha =$$

$$I_0 \ddot{\omega} \quad (1)$$

$$I_0 = \underbrace{\frac{1}{3} (5m) L^2}_{\text{stäng}} + \underbrace{m L^2}_{\text{partikel}} = \frac{8}{3} m L^2 \quad (2)$$

$$\text{Insätt i (1), med } \alpha = 30^\circ, \Rightarrow \ddot{\omega} = \frac{21}{32} \sqrt{3} \frac{g}{L} \quad (3)$$

$$[F = (5m \frac{L}{2} + mL) / 6m = 7L/12 \quad (4)]$$

b/ $\vec{a}_{n,m} \downarrow \vec{a}_{s,m}$

$$a_{n,m} = L \omega^2 = 0 \quad \text{då } \omega = 0 \text{ vid start.}$$

$$\bar{a}_{s,m} = L \ddot{\omega} = \frac{21}{32} \sqrt{3} g \approx 1.14g //$$

$$\leftarrow : N + 6mg \sin \alpha = 6m \bar{a}_n = 6m \bar{r} \omega^2 = 0 \Rightarrow N = -3mg \quad (5)$$

$$\downarrow : V + 6mg \cos \alpha = 6m \bar{a}_s = 6m \bar{r} \ddot{\omega} \Rightarrow [\text{ins (3) o (4)}] \Rightarrow V = \left[\frac{147}{64} - 3 \right] \sqrt{3} mg \quad (6)$$

$$R = [N^2 + V^2]^{1/2} \approx \text{ins. (5) o (6)} \approx 3.24mg //$$