Tentamen i TME010 Mekanik TD, 2022-04-13 kl. 8.30–12.30

Jourhavande: Peter Folkow tel. 1521 alt. 0729-617241 (salarna besöks 9.45 och 11.15)
Lösningar anslås på kurshemsidan senast den 14/4.
Preliminärt rättningsresultat anslås på M2 senast den 2/5.
Rättningsgranskning och utlämning av tentor sker på M2, avd. Dynamik, 4/5 kl. 12.00–13.00.

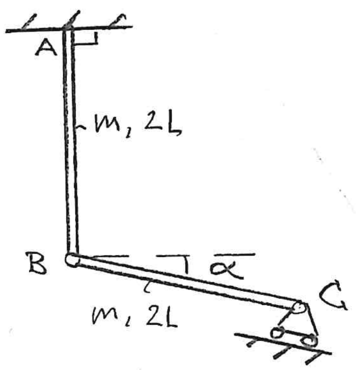
Tillåtna hjälpmedel: Formelsamling i mekanik av M.M. Japp (delas ut vid tentan), Matematiska handböcker (t ex Beta) eller utdrag därur, Chalmersgodkänd räknare är tillåten.

Betygsgränser: Uppgift 1-5 ger maximalt 3 poäng vardera. Uppgift 6-8 ger maximalt 5 poäng vardera. Betyget på tentamen ges enligt följande tabell:

		Poäng på uppgift 1–5 (inkl. bonuspoäng)						
		0–7	8	9	10	11	12	13–18
Poäng på uppgift 6–8	0–4	U	U	U	U	U	3	3
	5–8	U	U	U	U	3	3	4
	9	U	U	U	3	3	4	4
	10–11	U	U	3	3	4	4	5
	12–15	U	3	3	4	4	5	5

UPPSTÄLLDA EKVATIONER SKALL MOTIVERAS.

1.



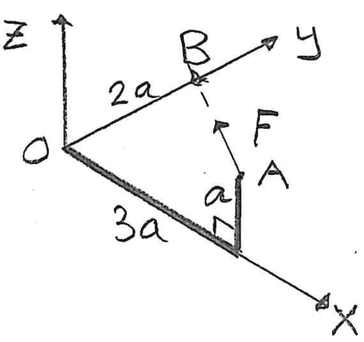
Ett system i jämvikt består av två likadana balkar AB och BC som vardera har längden $2L$ och massan m. Balkarna är förenade med en friktionsfri led i B.

a) Frilägg balkarna var för sig. (1 poäng)

b) Bestäm stödkraften som verkar på balken BC i C. (1 poäng)

c) Bestäm den vertikala kraften som verkar på balken AB i A. (1 poäng)

2.

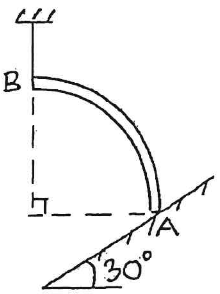


En böjd stång OA, längd $4a$, har en del längs med x-axeln och en del parallell med z-axeln enligt figur. En kraft med beloppet F verkar i A och är riktad mot B på y-axeln.

a) Uttryck kraften som en vektor. (1 poäng)

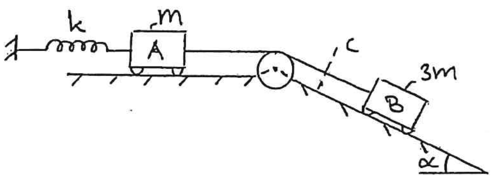
b) Bestäm kraftens moment med avseende på origo O. (2 poäng)

3.



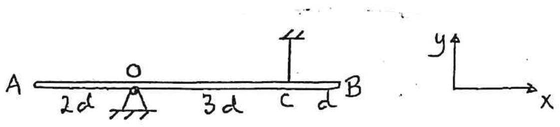
Figuren visar en kvartscirkelbåge med massa m och radie R. Kroppen är i jämvikt och vilar mot ett strävt lutande underlag i A, medan en vertikal lina fäster i B.
a) Bestäm linkraften. (1 poäng)
b) Bestäm minsta tillåtna friktionskoefficienten μ_s i A. (2 poäng)

4.



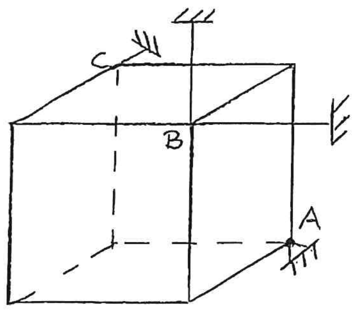
Ett system består av två lättrörliga vagnar, A med massa m och B med massa $3m$, som är förbundna med en lina enligt figur. Kropp B är på ett lutande plan med vinkel α. Kropp A fäster även i en fjäder, styvhet $k = mg/d$ där d är fjäderns ospända längd.
a) Bestäm fjäderns förlängning från ospänd längd om systemet är i jämvikt. (1 poäng)
b) Om linan klipps av vid C, vad blir då den efterföljande accelerationen för kropp A respektive kropp B? (2 poäng)

5.



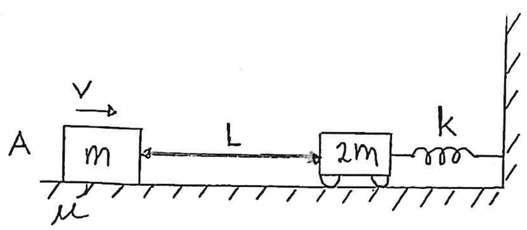
En stång AB med längd $6d$ och massa $2m$ är friktionsfritt ledad i O. Stången är från början i vila genom en lina i C, som plötsligt klipps.
a) Bestäm omedelbart därefter vinkelaccelerationen. (2 poäng)
b) Vad blir vid detta tillfälle accelerationsvektorn (utryckt i xy-systemet) för punkt B?
(1 poäng)

6.



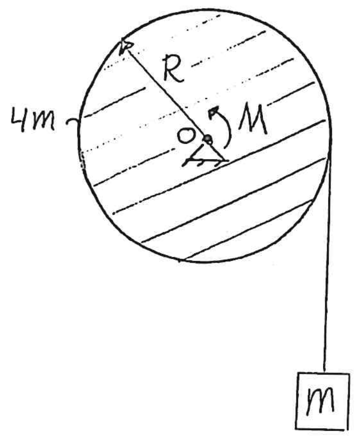
En homogen kub med massa m sitter i en kulled i hörnet A och hålls i jämvikt med de tre linorna fästade i B och C. Linorna är parallella med kanterna i kuben enligt figuren. Bestäm linkrafterna för jämvikt. (5 poäng)

7.



En massa m har i startläge A farten v åt höger. Kroppen glider sträckan L på ett strävt underlag, friktionskoefficient μ, varefter kroppen krockar med den vilande massan $2m$. Omedelbart efter stöten stannar massan m, medan massan $2m$ kommer i förlustfri rullning åt höger. Bestäm i den efterföljande rörelsen den största fjäderkraften (fjäderstyvhet k) som någonsin uppkommer. (5 poäng)

8.



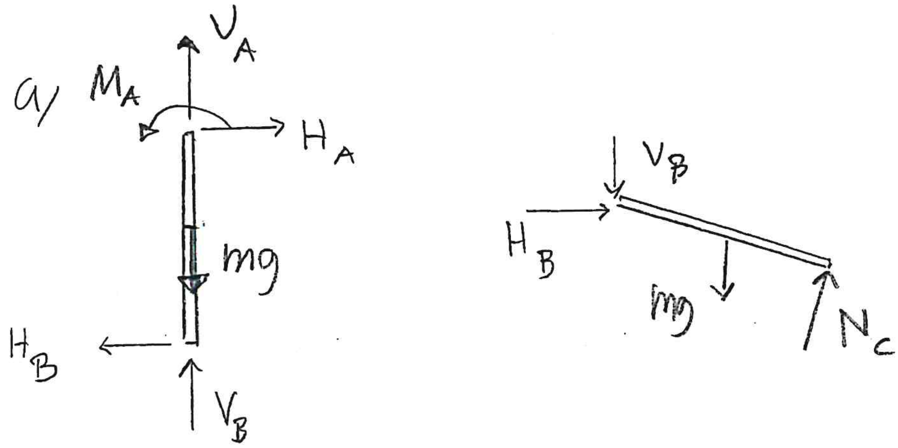
En cylinder, massa $4m$ och radie R, kan rotera utan friktion kring O. En massa m fäster på en lina lindad kring cylindern. Systemet hålls först i jämvikt med hjälp av ett moment M verkande på cylindern.

a) Bestäm detta moment M. (1 poäng)

b) Om momentet plötsligt fördubblas, hur lång tid tar det tills massan m får farten v uppåt? (4 poäng)

(1)

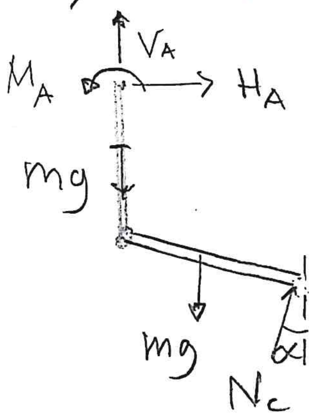
a/



b/ Studera BC:

$$\overset{\curvearrowleft}{B}: \; N_c \cdot 2L - mgL\cos\alpha = 0 \Rightarrow N_c = mg\cos\alpha/2 \;//$$

c/ Studera ABC:



$$\uparrow: \; V_A - mg - mg + N_c\cos\alpha = 0 \Rightarrow$$

$$V_A = mg\left(2 - \cos^2\alpha/2\right) \;// \quad \text{ur b/}$$

---

(2) a/ $\mathbb{F} = F\,\mathbb{e}_{AB}$ (1) $\quad \mathbb{e}_{AB} = \dfrac{(-3a, 2a, -a)}{\sqrt{14}\,a} =$

$= (-3, 2, -1)/\sqrt{14}$ (2) $\qquad$ (2) i (1) $\Rightarrow$

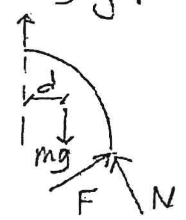
$$\mathbb{F} = \frac{F}{\sqrt{14}}(-3, 2, -1) \;//$$

b/ $\mathbb{M}_O = \mathbb{r} \times \mathbb{F}$ (3) $\quad$ med $\mathbb{r} = \overrightarrow{OA} = (3a, 0, a)$

och $\mathbb{F}$ ur a/. Ekv. (3) ger

$$\mathbb{M}_O = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ 3a & 0 & a \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix} \frac{F}{\sqrt{14}} = \frac{Fa}{\sqrt{14}}(-2, 0, 6) \;//$$

(3) a/ Frilägg:



$[d = 2R/\pi]$

$\overset{\curvearrowright}{A}: S \cdot R - mg(R-d) = 0 \Rightarrow$

$S = mg(1 - 2/\pi) \approx 0{,}36\,mg$ //

b/ $\nwarrow: N + (S - mg)\cos 30^\circ = 0 \Rightarrow$ ins. S ur a/

$\Rightarrow N \approx 0{,}55\,mg$

$\nearrow: F + (S - mg)\sin 30^\circ = 0 \Rightarrow$ ins. S ur a/

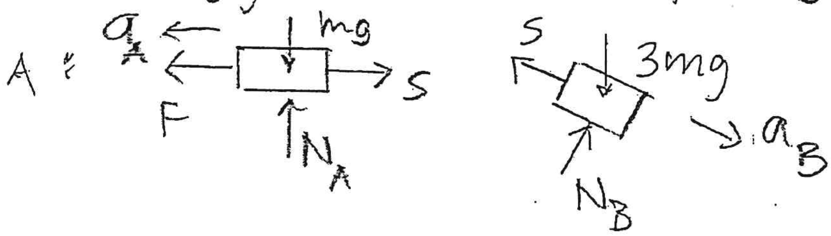
$\Rightarrow F \approx 0{,}32\,mg$

$\Rightarrow \mu_{s,min} = F/N \approx 0{,}58$ //

---

(4)

Frilägg A och B för sig



a/ $a_A = a_B = 0$

B $\nwarrow$: $S - 3mg\sin\alpha = 0 \Rightarrow S = 3mg\sin\alpha$ (a)

A $\leftarrow$: $F - S = 0 \Rightarrow k\Delta = 3\,mg\sin\alpha$ ur (a) $\Rightarrow$

$\Delta = 3mg\sin\alpha / k = [k = mg/d] = 3d\sin\alpha$ //

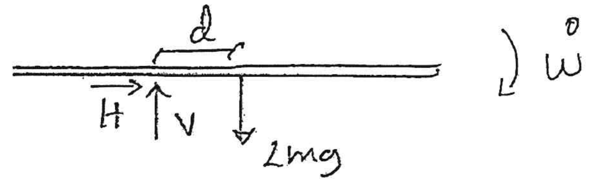
b/ B $\searrow$: $\overset{S=0}{}$ $3mg\sin\alpha = 3ma_B \Rightarrow a_B = g\sin\alpha$ //

A $\leftarrow$: $F = ma_A \Leftrightarrow k\Delta = ma_A \Leftrightarrow$

$\frac{mg}{d} \cdot 3d\sin\alpha = ma_A \Rightarrow a_A = 3g\sin\alpha$ //

5

Frilägg

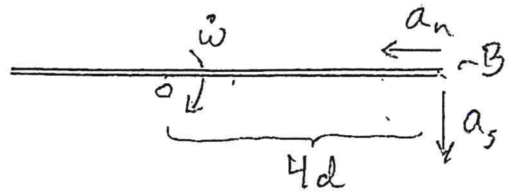


a/ $M_0 = I_0 \dot{\omega} \iff 2mgd = I_0 \dot{\omega} \Rightarrow \dot{\omega} = \dfrac{2mgd}{I_0}$ (1)

$I_0 = \frac{1}{12} 2m(6d)^2 + 2md^2 = 8md^2$ ur Steiner

Insatt i (1) $\Rightarrow \dot{\omega} = g/4d$ //

b/

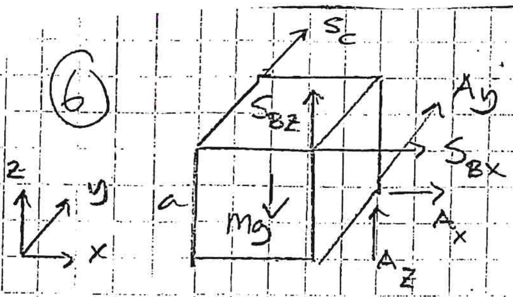


$a_s = 4d\dot{\omega}$

$a_n = 4d\omega^2 = 0$ $[\omega = 0]$

Så, $a|_B = (0, -4d\dot{\omega}) = (0, -g)$ // ur a/.

6



Tag momentjämv. kring A för att slippa inverkan i A.

$\underline{\underline{S_B}}$: $\overrightarrow{AB} = (0, -a, a)$; $M_{A,B} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ 0 & -a & a \\ S_{BX} & 0 & S_{BZ} \end{vmatrix} =$

$= (-aS_{BZ}, aS_{BX}, aS_{BX})$ (1)

$\underline{\underline{S_C}}$: $\overrightarrow{AC} = (-a, 0, a)$; $M_{A,C} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ -a & 0 & a \\ 0 & S_C & 0 \end{vmatrix} =$

$= (-aS_C, 0, -aS_C)$ (2)

(6,f)

$\underline{mg}$: $\overrightarrow{AT_p} = (-a/2, -a/2, a/2)$; $M_{A,mg} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ -a/2 & -a/2 & a/2 \\ 0 & 0 & -mg \end{vmatrix}$

$= (mg\, a/2, -mg\, a/2, 0)$ (3)

$\Sigma M_A = M_{A,B} + M_{A,C} + M_{A,mg} = 0 \iff [(1)-(3)]$

x : $-a S_{Bz} - a S_c + mg\, a/2 = 0$ (4)

y : $a S_{Bx} - mg\, a/2 = 0$ (5)

z : $a S_{Bx} - a S_c = 0$ (6)

$(5) \Rightarrow S_{Bx} = mg/2$ // $(6) \Rightarrow S_c = mg/2$ // $(4) \Rightarrow S_{Bz} = 0$ //

---

(7) Kropp m från A till före krock:

$T_1 + V_1 + W^{(ik)} = T_2 + V_2$ (1)

$T_1 = \frac{1}{2}mv^2$; $V_1 = 0$; $T_2 = \frac{1}{2}mV_m^2$; $V_2 = 0$

$W^{(ik)} = -FL = -\mu mgL$. Insatt i $(2) \Rightarrow$

$\frac{1}{2}mv^2 - \mu mgL = \frac{1}{2}mV_m^2 \Rightarrow V_m = (v^2 - 2\mu gL)^{1/2}$ (2)

Vid stöten bevaras syst. rörelsemängd:

$P_{före} = mV_m + 2m \cdot 0 = mV_m$ (3)

$P_{efter} = m \cdot 0 + 2m \cdot V_{2m} = 2mV_{2m}$ (4)

$P_{före} = P_{efter} \Rightarrow V_{2m} = V_m/2$ (5) ur (3)-(4).

(7,f) V_{2m} är 2m:s fart precis efter krock.
Under efterföljande rörelse bevaras mekaniska energin för 2m; d.v.s. ekv. (1) med $W^{(ik)}=0$.

$T_1=\frac{1}{2}2mV_{2m}^2 \quad V_1=0 \quad T_2=\frac{1}{2}2mV_{2m}^{*2} \quad V_2=\frac{1}{2}kx^2$

där V_{2m}^{*} är farten då fjäder hoptryckt x.

$$(1)\Rightarrow mV_{2m}^2=mV_{2m}^{*2}+\frac{1}{2}kx^2 \quad (6)$$

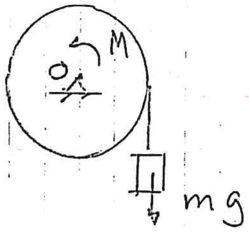
Störst x då $V_{2m}^{*}=0$ (vändläget).

$$(6)\Rightarrow mV_{2m}^2=\frac{1}{2}kx_{max}^2 \Rightarrow x_{max}=(2mV_{2m}^2/k)^{1/2} \quad (7)$$

$$F_{max}=kx_{max}=\sqrt{\frac{mk}{2}}\,(v^2-2\mu gL)^{1/2}$$ ur (7), (5), (2).

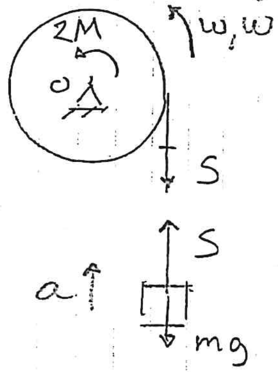
---

(8) a)



$\curvearrowleft O$: $M-mgR=0 \Rightarrow M=mgR$ //

b)



$\curvearrowleft O$: $2M-SR=I_O\dot\omega$ (1)

$\uparrow$: $S-mg=ma=mR\dot\omega$ (2)

$(2)\Rightarrow S=m(g+R\dot\omega)$ i $(1)\Rightarrow$

$2M-mgR-mR^2\dot\omega=I_O\dot\omega$ (3)

Insatt $M=mgR$ och $I_O=\frac{1}{2}4mR^2$ i (3)

$\Rightarrow mgR=3mR^2\dot\omega \Rightarrow \dot\omega=g/3R$ (4)

$$\dot\omega=\frac{d\omega}{dt}\Rightarrow\int_0^t\frac{g}{3R}\,dt=\int_0^\omega d\omega \Leftrightarrow \frac{gt}{3R}=\omega \quad (5)$$

Massan fart $v=R\omega$ i $(5)\Rightarrow t=3v/g$ //