

Tentamen i TME010 Mekanik TD, 2022-01-13 kl. 8.30–12.30

Jourhavande: Peter Folkow tel. 1521 alt. 0729-617241 (salarna besöks 9.45 och 11.15)

Lösningar anslås på kurshemsidan senast den 14/1.

Preliminärt rättningsresultat anslås på M2 senast den 2/2.

Rättningsgranskning och utlämning av tentor sker på M2, avd. Dynamik, 3/2 samt 4/2 kl. 12.00–13.00.

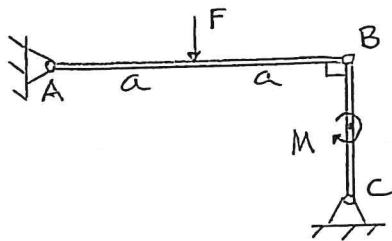
Tillåtna hjälpmedel: Formelsamling i mekanik av M.M. Japp (delas ut vid tentan),
Matematiska handböcker (t ex Beta) eller utdrag därur,
Chalmersgodkänd räknare är tillåten.

Betygsgränser: Uppgift 1-5 ger maximalt 3 poäng vardera. Uppgift 6-8 ger maximalt 5 poäng vardera. Betyget på tentamen ges enligt följande tabell:

		Poäng på uppgift 1–5 (inkl. bonuspoäng)						
		0–7	8	9	10	11	12	13–18
Poäng på uppgift 6–8	0–4	U	U	U	U	U	3	3
	5–8	U	U	U	U	3	3	4
	9	U	U	U	3	3	4	4
	10–11	U	U	3	3	4	4	5
	12–15	U	3	3	4	4	5	5

UPPSTÄLLDA EKVATIONER SKALL MOTIVERAS.

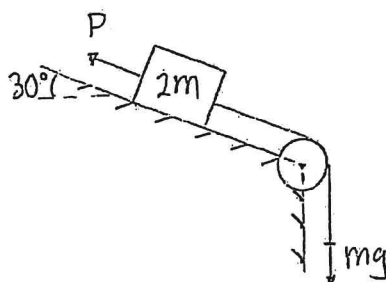
1.



En struktur i jämvikt är sammansatt av två masslösa stänger AB (längd $2a$) och BC (längd a). En kraft verkar mitt på AB, och ett moment verkar mitt på BC enligt figur.

- Frilägg stängerna AB och BC separat. (1 poäng)
- Bestäm vertikala stödkraften i A samt horisontella stödkraften i C. (1 poäng)
- Bestäm reaktionskrafterna som verkar i leden B. (1 poäng)

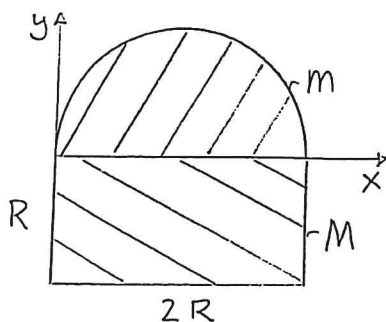
2.



Figuren visar en kropp (massa $2m$) förbunden med en lina. Kroppen vilar mot ett lutande underlag som är mycket strävt. En kraft mg verkar i linänden, medan P verkar på kroppen enligt figur.

- För $P = 0$, bestäm minsta tillåtna friktionskoefficienten μ_s för möjlig jämvikt. (1 poäng)
- Vad är *största* tillåtna kraft P för möjlig jämvikt, förutsatt den friktionskoefficient μ_s som beräknats i a). (2 poäng)

3.



En kropp består av en plan halvcirkelyta, massa m och radie R , samt en rektangulär skiva med massa M enligt figur.

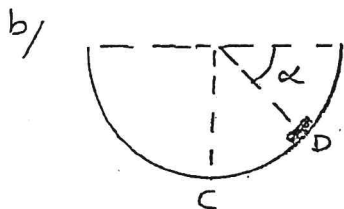
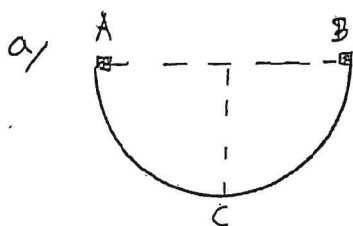
a) Bestäm masströghetsmomentet I_y .

(2 poäng)

b) Bestäm massan M uttryckt i m så att kroppens tyngdpunkt ligger på x -axeln.

(1 poäng)

4.



Två kroppar, A med massa $3m$ och B med massa m , släpps samtidigt från vila i Figur a) och påbörjar friktionsfri rörelsen inuti cylindern med radie R . Kropparna möts i nedre punkten C och hakar därmed ihop med varandra. Bestäm för den nu sammansatta kroppen:

a) Farten i C omedelbart efter krocken.

(1 poäng)

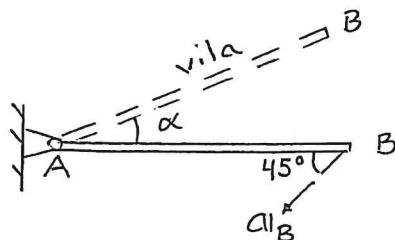
b) Vinkeln α där kroppen vänder i den efterföljande rörelsen (punkt D i Figur b)).

(1 poäng)

c) Normalkraften från cylindern verkande på kroppen då den återigen passerar C.

(1 poäng)

5.



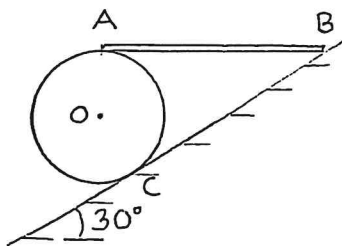
En balk AB, massa m och längd L , är ledad i A och släpps från vila vid vinkel α enligt figur (α än så länge okänd). Då balken passerar horisontella läget så är accelerationen för B riktad enligt figur med vinkel 45° (a_B än så länge okänd).

a) Bestäm tangentialaccelerationen $a_{B,s}$ för B i horisontalläget. (1 poäng)

b) Bestäm hastigheten v_B för B i horisontalläget. (1 poäng)

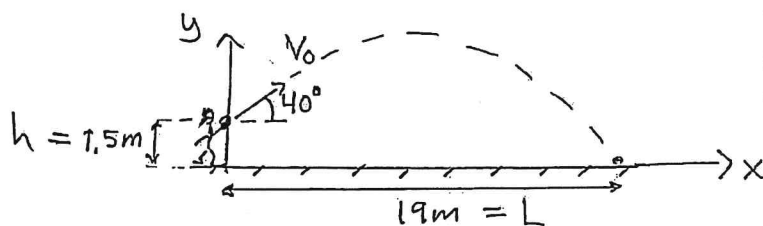
c) Bestäm vinkeln α . (1 poäng)

6.



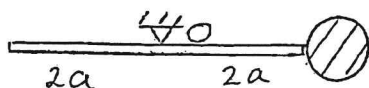
En horisontell stång AB, massa m , vilar på en homogen cylinder, massa m , enligt figur så att A ligger rakt ovanför cylinderns mitt O. Cylindern och stången är i kontakt med ett lutande plan, vinkeln 30° , i punkt C respektive B. Samma friktionskoefficient μ råder i alla kontaktpunkterna vid A, B och C. Bestäm minsta tillåtna μ för jämvikt. (5 poäng)

7.

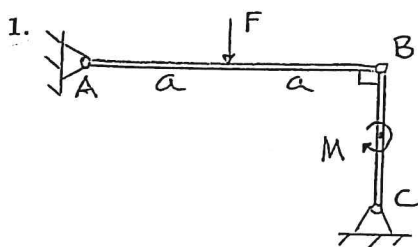


Kulstötaren Fanny stöter 19 m enligt figur. Vilken utgångshastighet innebär detta, om stöten sker från höjden 1.5 m med vinkeln 40° ? (5 poäng)

8.



En kropp består av en smal stång, massa $2m$ och längd $4a$, och en sfär, massa $3m$ och radie a . Systemet släpps från vila i figurläget, och påbörjar därefter förlustfri rotation kring O. Bestäm lagerreaktionerna i O (verkande på stången) då kroppen roterat ett fjärdedels varv (sfären i nedersta läget). (5 poäng)



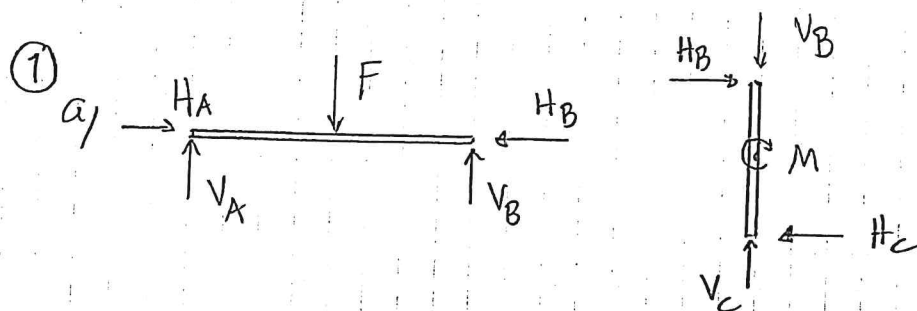
En struktur i jämvikt är sammansatt av två masslösa stänger AB (längd $2a$) och BC (längd a). En kraft verkar mitt på AB, och ett moment verkar mitt på BC enligt figur.

a) Frilägg stängerna AB och BC separat.

(1 poäng)

b) Bestäm vertikala stödkraften i A samt horisontella stödkraften i C. (1 poäng)

c) Bestäm reaktionskrafterna som verkar i leden B. (1 poäng)



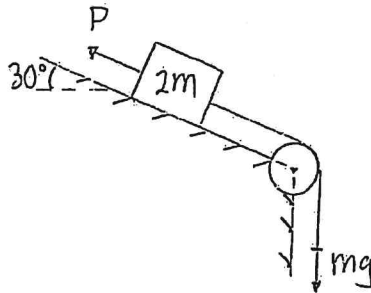
b) AB $\curvearrowright B: V_A \cdot 2a - F a = 0 \Rightarrow V_A = F/2 //$

BC $\curvearrowright B: H_C \cdot a + M = 0 \Rightarrow H_C = -M/a //$

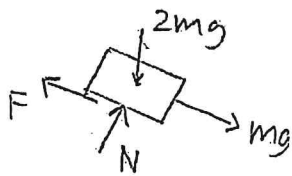
c) AB $\uparrow: V_A - F + V_B = 0 \Rightarrow V_B = F - V_A =$
 $= F/2$ m. h. a. b/.

BC $\rightarrow: H_B - H_C = 0 \Rightarrow H_B = H_C = -M/a$
 m. h. a. b/.

- 2 Figuren visar en kropp (massa $2m$) förbunden med en lina. Kroppen vilar mot ett lutande underlag som är mycket strävt. En kraft mg verkar i linänden, medan P verkar på kroppen enligt figur.
- a) För $P = 0$, bestäm minsta tillåtna friktionskoefficienten μ_s för möjlig jämvikt. (1 poäng)
- b) Vad är *största* tillåtna kraft P för möjlig jämvikt, förutsatt den friktionskoefficient μ_s som beräknats i a). (2 poäng)



a) Fri-lägg



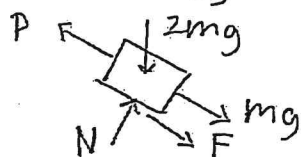
$$\uparrow: N - 2mg \cos 30^\circ = 0 \Rightarrow N = \sqrt{3} mg \quad (1)$$

$$\leftarrow: F - mg - 2mg \sin 30^\circ = 0 \Rightarrow$$

$$F = 2mg \quad (2)$$

$$\mu_{s,min} = F/N = 2/\sqrt{3} \text{ ur (1) och (2)} \approx 1,15 //$$

b) Fri-lägg

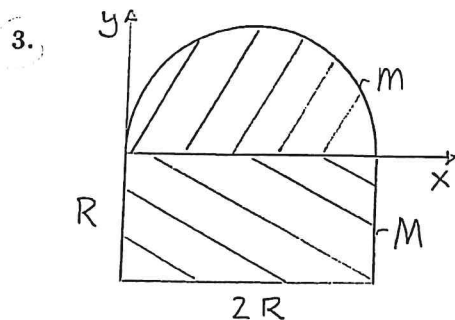


$$\leftarrow: P - mg - F - 2mg \sin 30^\circ = 0 \quad (3). \text{ Ekv (1) gäller}$$

$$\text{Sätt } F = \mu_s N \text{ i (3)} \Rightarrow$$

$$P_{max} = mg + \mu_s N + mg = \text{ins. (1) och } \mu_s \text{ ur a)}$$

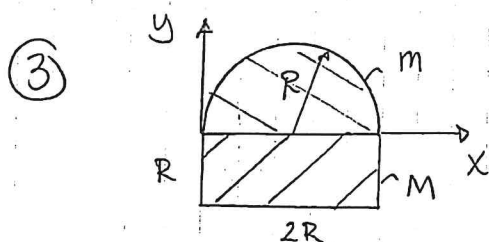
$$= 4mg //$$



En kropp består av en plan halvcirkelyta, massa m och radie R , samt en rektangulär skiva med massa M enligt figur.

a) Bestäm masströghetsmomentet I_y .
(2 poäng)

b) Bestäm massan M uttryckt i m så att kroppens tyngdpunkt ligger på x -axeln.
(1 poäng)



2

a/ m : $I_{y,m} = \frac{1}{4} m R^2 + m R^2 = \frac{5}{4} m R^2$ (1)
ur FS s. 17 fall 2 ("h"=0)

M : $I_{y,M} = M (2R)^2 / 3 = \frac{4}{3} M R^2$ (2)
ur FS s. 16 fall 1 (" $I_y = m b^2 / 3$ ")

$I_y = I_{y,m} + I_{y,M} = \left(\frac{5}{4} m + \frac{4}{3} M \right) R^2$ // ur (1) och (2).

b/ $\bar{y} = \frac{m \bar{y}_m + M \bar{y}_M}{m + M}$ (3)

$\bar{y}_m = 4R/3$ (4) ur FS s. 17 fall 2.

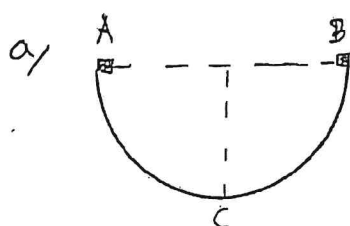
$\bar{y}_M = -R/2$ (5) ur symmetri

$\bar{y} = 0$ enligt (3) $\Rightarrow m \bar{y}_m + M \bar{y}_M = 0$, d.v.s.

$m 4R/3 - M R/2 = 0$ m.h.a. (4) och (5)

$\Rightarrow M = 8/3 m$ //

- 4 Två kroppar, A med massa $3m$ och B med massa m , släpps samtidigt från vila i Figur a) och påbörjar friktionsfri rörelsen inuti cylindern med radie R . Kropparna möts i nedersta punkten C och hakar därmed ihop med varandra. Bestäm för den nu sammansatta kroppen:
- Farten i C omedelbart efter krocken. (1 poäng)
 - Vinkeln α där kroppen vänder i den efterföljande rörelsen (punkt D i Figur b)). (1 poäng)
 - Normalkraften från cylindern verkande på kroppen då den återigen passerar C. (1 poäng)



Lösning

a/ Före stöt i C: $T_1 = 0$ $V_1 = MgR$ $T_2 = \frac{1}{2} M V^2$ $V_2 = 0$
 $\Rightarrow V = \sqrt{2gR}$ (1) ur $T_1 + V_1 = T_2 + V_2$ (för A resp. B).

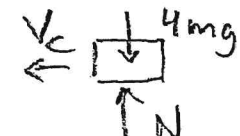
Rörelsemängd bevaras $P_{x,f} = P_{x,e} \Leftrightarrow [V_f = V]$
 $\rightarrow: 3mV - mV = 4mV_e \Rightarrow V_e = V/2 = \sqrt{2gR}/2$ (2)

b/ Efter stöt: $T_1 = \frac{1}{2} 4mV_e^2$ $V_1 = 0$ (i C)

$T_2 = 0$ $V_2 = 4mgh$ (i D)

$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \Rightarrow h = V_e^2 / 2g = R/4$ ur (2)

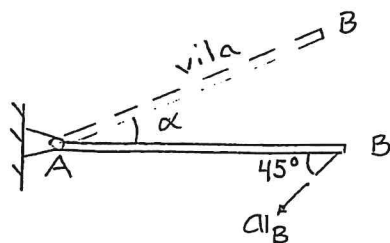
$h = R - R \sin \alpha \Rightarrow \sin \alpha = 3/4 \Rightarrow \alpha = 49^\circ$

c/ Vid C:  $[V_c = V_e$ ur energi]

$\uparrow: N - 4mg = 4ma_n = 4m V_c^2 / R = 2mg \Rightarrow$

$N = 6mg //$

5.



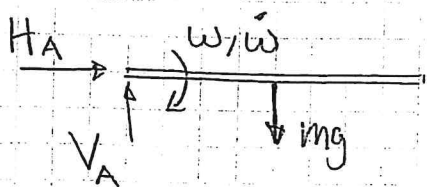
En balk AB, massa m och längd L , är ledad i A och släpps från vila vid vinkel α enligt figur (α än så länge okänd). Då balken passerar horisontella läget så är accelerationen för B riktad enligt figur med vinkel 45° (a_B än så länge okänd).

a) Bestäm tangentialaccelerationen $a_{B,s}$ för B i horisontalläget. (1 poäng)

b) Bestäm hastigheten v_B för B i horisontalläget. (1 poäng)

c) Bestäm vinkeln α . (1 poäng)

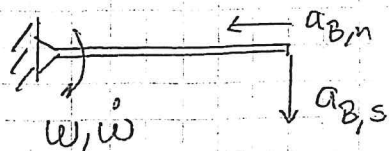
⑤ a/ Förlägg, använd rotationslagen



$$\vec{A}: mg \cdot \frac{L}{2} = I_A \dot{\omega} = \frac{1}{3} m L^2 \dot{\omega}$$

$$\Rightarrow \dot{\omega} = 3g/2L. \quad a_{B,s} = L\dot{\omega} = 3g/2 //$$

b/ Vi har a_B enligt $[a_{B,s} = a_{B,n} = 3g/2]$ 4(7)



$$a_{B,n} = L\omega^2 = 3g/2$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{3g/2L}$$

$$v_B = L\omega = \sqrt{3gL/2} //$$

c/ Vinkel α ur energiprincipen:

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \quad (1)$$

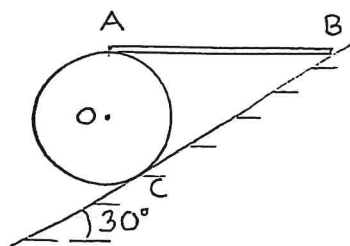
$$T_1 = 0 \text{ (vila)} \quad V_1 = mg \frac{L}{2} \sin \alpha \quad [A \text{ nollnivå}]$$

$$T_2 = \frac{1}{2} I_A \omega^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{3} m L^2 \omega^2 = \frac{1}{6} m L^2 \omega^2$$

$$V_2 = 0 \quad (1) \Rightarrow mg \frac{L}{2} \sin \alpha = \frac{1}{6} m 3g L/2 \quad [\text{ur b}]$$

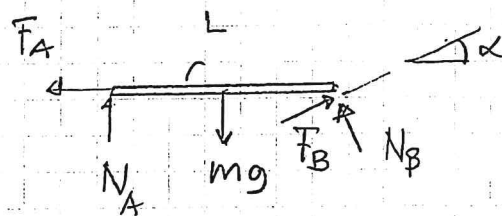
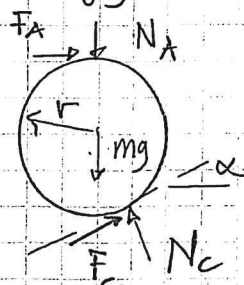
$$\text{d. v. s.} \quad \sin \alpha = 1/2 \Rightarrow \alpha = 30^\circ //$$

6.



En horisontell stång AB, massa m , vilar på en homogen cylinder, massa m , enligt figur så att A ligger rakt ovanför cylinderns mitt O. Cylindern och stången är i kontakt med ett lutande plan, vinkeln 30° , i punkt C respektive B. Samma friktionskoefficient μ råder i alla kontaktpunkterna vid A, B och C. Bestäm minsta tillåtna μ för jämvikt. (5 poäng)

⑥ Fnlägg cylinder och stång separat:



Cylinder

$$\widehat{O}: F_A \cdot r - F_C \cdot r = 0 \Rightarrow F_A = F_C \quad (1)$$

$$\rightarrow: F_C + F_A \cos \alpha - (N_A + mg) \sin \alpha = 0 \quad (2)$$

$$\uparrow: N_C - F_A \sin \alpha - (N_A + mg) \cos \alpha = 0 \quad (3)$$

Stång

5(7)

$$\curvearrowright_B: N_A \cdot L - mg \cdot L/2 = 0 \Rightarrow N_A = mg/2 \quad (4)$$

$$\nearrow: F_B - F_A \cos \alpha + (N_A - mg) \sin \alpha = 0 \quad (5)$$

$$\uparrow: N_B + F_A \sin \alpha + (N_A - mg) \cos \alpha = 0 \quad (6)$$

Med (1) och (4) i (2) $\Rightarrow$

$$F_C (1 + \cos \alpha) - 3/2 mg \sin \alpha = 0 \Rightarrow$$

$$F_C = 3/2 mg \sin \alpha / (1 + \cos \alpha) = \dots = 0,40 mg \quad (7)$$

(1) och (4) i (3) $\Rightarrow$

$$N_C - F_C \sin \alpha - 3/2 mg \cos \alpha = 0 \Rightarrow \text{ins. (7)} \Rightarrow$$

$$N_C = \dots = 3/2 mg \quad (8)$$

(1) och (4) i (5) $\Rightarrow$

$$F_B - F_C \cos \alpha - mg/2 \sin \alpha = 0 \Rightarrow \text{ins. (7)} \Rightarrow$$

$$F_B = \dots = 0,60 mg \quad (9)$$

(1) och (4) i (6) $\Rightarrow$

$$N_B + F_C \sin \alpha - mg/2 \cos \alpha = 0 \Rightarrow \text{ins. (7)} \Rightarrow$$

$$N_B = \dots = 0,23 mg \quad (10)$$

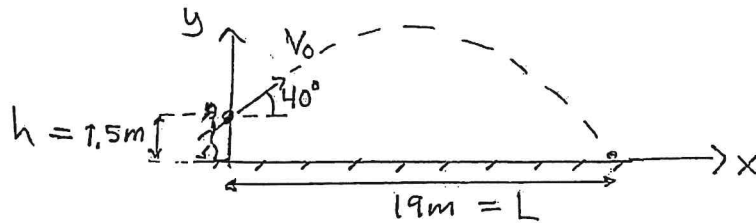
$$F_A / N_A = 0,40 mg / 0,50 mg = 0,80 \leq \mu_A \quad (11)$$

$$F_B / N_B = 0,60 mg / 0,23 mg = 2,61 \leq \mu_B \quad (12)$$

$$F_C / N_C = 0,40 mg / 1,5 mg = 0,27 \leq \mu_C \quad (13)$$

$$\mu_A = \mu_B = \mu_C = \mu \text{ kräver } \mu_{\min} = 2,61 \text{ enl. (12)} //$$

7 Kulstötaren Fanny stöter 19 m enligt figur. Vilken utgångshastighet innebär detta, om stöten sker från höjden 1.5 m med vinkeln 40° ? (5 poäng)



$$\rightarrow: 0 = a_x \Rightarrow V_x = C_1 = V_0 \cos 40^\circ \Rightarrow S_x = V_0 t \cos 40^\circ \quad (1)$$

$$\uparrow: -g = a_y \Rightarrow V_y = -gt + C_2 = -gt + V_0 \sin 40^\circ \Rightarrow \\ \Rightarrow S_y = -gt^2/2 + V_0 t \sin 40^\circ + h, \quad (2) \quad [h=1.5\text{m}]$$

Kulbanan tar tid t_x . Anv. (1) och (2):

$$(1) \Rightarrow L = V_0 t_x \cos 40^\circ \Rightarrow t_x = L / (V_0 \cos 40^\circ) \quad (3)$$

$$(2) \Rightarrow 0 = -g t_x^2 / 2 + V_0 t_x \sin 40^\circ + h = \text{ins. (3)} = \\ = -gL^2 / (2V_0^2 \cos^2 40^\circ) + L \tan 40^\circ + h \Rightarrow$$

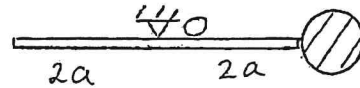
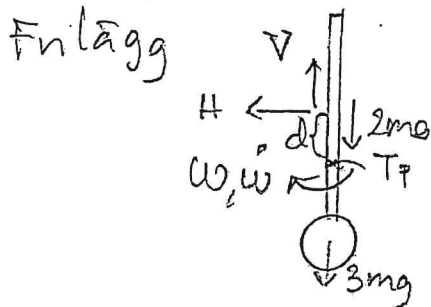
$$V_0^2 = \frac{gL^2}{2\cos^2 40^\circ (L \tan 40^\circ + h)} \quad (4)$$

Ins. värden i (4), d.v.s. $h=1.5\text{m}$ och

$$L=19\text{m} \Rightarrow V_0 = 13.15 \text{ m/s} //$$

- 8 En kropp består av en smal stång, massa $2m$ och längd $4a$, och en sfär, massa $3m$ och radie a . Systemet släpps från vila i figurläget, och påbörjar därefter förlustfri rotation kring O. Bestäm lagerreaktionerna i O (verkande på stången) då kroppen roterat ett fjärdedels varv (sfären i nedersta läget). (5 poäng)

Lösning



$$\leftarrow: H = 5m d \dot{\omega} = 0 \quad [\dot{\omega} = 0 \text{ då } M_O = 0]$$

$$\uparrow: V - 5mg = 5m d \omega^2 \quad (1)$$

Vad är d och ω^2 ?

$$d = \frac{2m \cdot 0 + 3m \cdot 3a}{5m} = \frac{9}{5} a \quad (2) \quad T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \quad (3)$$

$$T_1 = V_1 = 0; \quad T_2 = \frac{1}{2} I_O \omega^2; \quad V_2 = -5mgd = -9mga \quad \text{ur (2)}$$

$$(3) \Rightarrow 0 = \frac{1}{2} I_O \omega^2 - 9mga \Rightarrow \omega^2 = 18mga / I_O \quad (4)$$

$$I_O = \underbrace{\frac{1}{12} (2m) (4a)^2}_{\text{stång}} + \underbrace{\frac{2}{5} (3m) a^2 + 3m (3a)^2}_{\text{sfär}} = \frac{463}{15} ma^2 \approx 30.9 ma^2$$

$$(4) \Rightarrow \omega^2 = 0.589 / a$$

$$(1) \Rightarrow V = 5m (g + d \omega^2) \approx 10.25 mg //$$