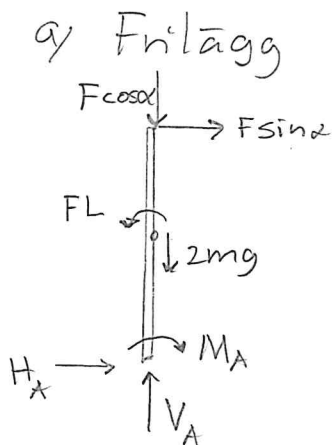
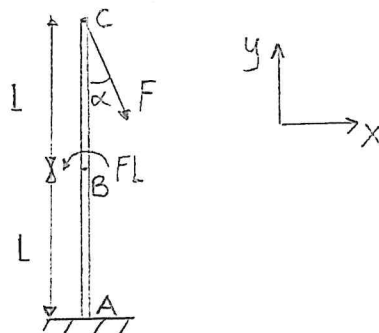


- 1 En smal stång ABC, massa $2m$ och längd $2L$, är fast inspänd i A. Utöver sin egentyngd så utsätts stången för en kraft i C och ett rent moment i B enligt figur, där $F = mg$.
- a) Bestäm stödkrafter och stödmoment verkande på stången i A vid jämvikt. (2 poäng)
- b) Om stödet i A plötsligt brister (så att A helt frikopplas från golvet), vad är då accelerationsvektorn för mittpunkt B omedelbart därefter? Uttryck svaret i de givna koordinat-riktningarna. (1 poäng)



$$\rightarrow: H_A + F \sin \alpha = 0 \Rightarrow H_A = -mg \sin \alpha //$$

$$\uparrow: V_A - 2mg - F \cos \alpha = 0 \Rightarrow V_A = mg(2 + \cos \alpha) //$$

$$\hat{A}: M_A + F \sin \alpha \cdot 2L - FL = 0 \Rightarrow$$

$$M_A = mgL(1 - 2 \sin \alpha) //$$

b) Vid släpp " $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ " där B är tp.

$$\rightarrow: F \sin \alpha = 2m\vec{a}_x \Rightarrow \vec{a}_x = g \sin \alpha / 2 //$$

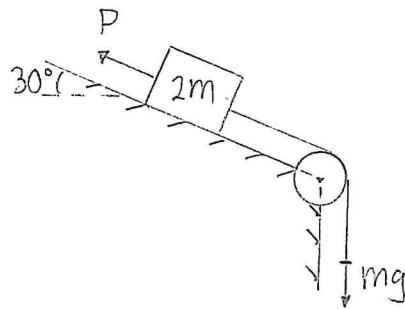
$$\uparrow: -F \cos \alpha - 2mg = 2m\vec{a}_y \Rightarrow \vec{a}_y = -g(2 + \cos \alpha) / 2 //$$

[Rena momentet påverkar inte]

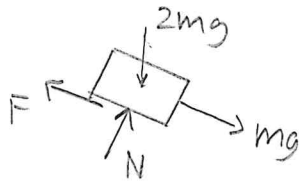
2 Figuren visar en kropp (massa $2m$) förbunden med en lina. Kroppen vilar mot ett lutande underlag som är mycket strävt. En kraft mg verkar i linänden, medan P verkar på kroppen enligt figur.

a) För $P = 0$, bestäm minsta tillåtna friktionskoefficienten μ_s för möjlig jämvikt. (1 poäng)

b) Vad är största tillåtna kraft P för möjlig jämvikt, förutsatt den friktionskoefficient μ_s som beräknats i a). (2 poäng)



a) Fri-lägg



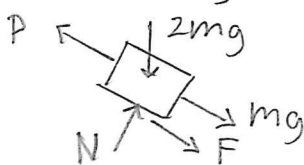
$$\uparrow: N - 2mg \cos 30^\circ = 0 \Rightarrow N = \sqrt{3} mg \quad (1)$$

$$\leftarrow: F - mg - 2mg \sin 30^\circ = 0 \Rightarrow$$

$$F = 2mg \quad (2)$$

$$\mu_{s, \min} = F/N = 2/\sqrt{3} \text{ ur (1) och (2)} \approx 1,15 //$$

b) Fri-lägg



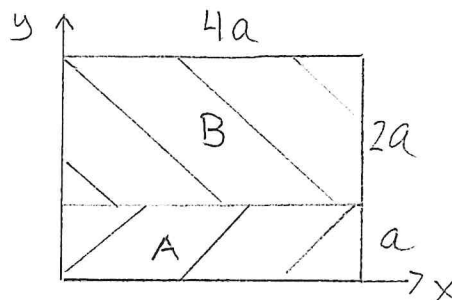
$$\leftarrow: P - mg - F - 2mg \sin 30^\circ = 0 \quad (3). \text{ Ekv (1) gäller.}$$

$$\text{Sätt } F = \mu_s N \text{ i (3)} \Rightarrow$$

$$P_{\max} = mg + \mu_s N + mg = \text{ins. (1) och } \mu_s \text{ ur a)}$$

$$= 4mg //$$

- 3 En tunn skiva består av två delar, där del A har dubbelt så stor ytdensitet (massa per ytenhet) som del B. Bestäm kroppens tyngdpunkt $(\bar{x}, \bar{y})$. (3 poäng)



$$\bar{X} = 2a \quad \text{P.g.a. symmetri} //$$

$$\bar{y} = \frac{m_A \bar{y}_A + m_B \bar{y}_B}{m_A + m_B} \quad (1)$$

$$A: m_A = \sigma_A A_A = \sigma_A 4a^2; \quad \bar{y}_A = a/2$$

$$B: m_B = \sigma_B A_B = \sigma_B 8a^2; \quad \bar{y}_B = a + a = 2a$$

$$\text{Sätt } \sigma_B = \sigma \text{ och } \sigma_A = 2\sigma \text{ enl. uppg.}$$

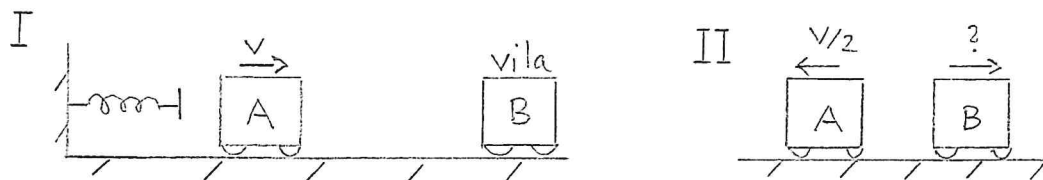
$$(1) \Rightarrow \frac{2\sigma \cdot 4a^2 \cdot a/2 + \sigma \cdot 8a^2 \cdot 2a}{2\sigma \cdot 4a^2 + \sigma \cdot 8a^2} = 5a/4 //$$

4 En kropp A, massa m , skjuts iväg via en katapultanordning (d.v.s. en fjäder) och rör sig därefter åt höger med farten v , se figur I. Kroppen stöter sedan ihop med en vilande kropp B, massa $3m$, varefter kropparna rör sig enligt figur II.

a) Vad är fjäderkonstanten för katapulten, om fjädern är hoptryckt sträckan Δ vid start från vila? (1 poäng)

b) Vilken fart får kropp B efter stöten? (1 poäng)

c) Hur stor andel av systemets mekaniska energi före stöten går förlorad i själva stöten (ange i %)? (1 poäng)



a) $T_1 + V_1 = T_2 + V_2$ (1) med $T_1 = V_2 = 0$.

$$V_1 = \frac{1}{2} k \Delta^2; \quad T_2 = \frac{1}{2} m v^2; \quad (1) \Rightarrow \frac{1}{2} k \Delta^2 = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow k = m v^2 / \Delta^2 //$$

b) $p_f = p_e$ vid stöt. $\rightarrow; m v = -m v/2 + 3m v_B \Rightarrow$

$$\Rightarrow v_B = v/2 //$$

c) $T_1 + V_1 + W^{(ih)} = T_2 + V_2$ för A+B [$V_1 = V_2 = 0$],

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} m v^2 + W^{(ih)} = \frac{1}{2} m (v/2)^2 + \frac{1}{2} 3m v_B^2 = [v_B \text{ ur b)]}$$

$$= \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow W^{(ih)} = 0 !$$

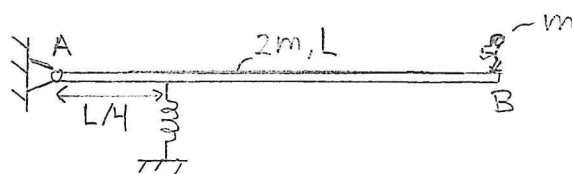
Ingen mek. energi går förlorad! //

5 En enkel modell av en trampolin består av en smal stel stång AB, massa $2m$ och längd L , kopplad till en fjäder enligt figur. Stången är ledad i A och i horisontellt läge då en person med massa m står vid B redo att hoppa i badet.

a) Bestäm den vertikala stödkraften i A då systemet är i jämvikt med personen (massa m) ståendes vid B. (1 poäng)

b) Om personen tar ett försiktigt steg ut från trampolinen för ett bad, vad blir omedelbart därefter vinkelaccelerationen $\dot{\omega}$ för trampolinen? (1 poäng)

c) Bestäm den vertikala stödkraften i A precis efter att personen lämnat trampolinen enligt b). (1 poäng)



a/

$$\uparrow: V_A + F - 2mg - mg = 0 \quad (1)$$

$$\hat{A}: mgL + 2mg \frac{L}{2} - FL/4 = 0$$

$$\Rightarrow F = 8mg \quad (1) \Rightarrow V_A = -5mg //$$

b/ $\hat{A}: F \cdot L/4 - 2mg \frac{L}{2} = I_A \dot{\omega} \quad (2) \quad \text{enl. fig.}$

Med $I_A = \frac{1}{3} 2mL^2$ och F ur a/ $\Rightarrow \dot{\omega} = 3g/2L //$

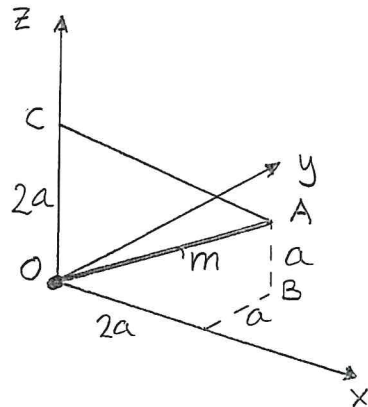
c/ " $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ " där mittpunkt är t.p.: $\vec{a}_s = \frac{L}{2} \ddot{\omega}$.

$$\uparrow: V_A + F - 2mg = 2m \frac{L}{2} \ddot{\omega} \Rightarrow$$

$$V_A = 2mg - F + mL \ddot{\omega} = -\frac{9}{2}mg //$$

m.h.a. F ur a/ och $\ddot{\omega}$ ur b/.

- 6 Figuren visar en stång OA med massa m . Stången fäster i en kulle i O och en lina i A, ovanför punkt B i xy -planet. Linans andra ände fäster i C på z -axeln. Bestäm linkraften vid jämvikt. (5 poäng)



Linkraften skrivs $\$ = S \mathbf{e}_{AC}$ (1)

$$\mathbf{e}_{AC} = (-2a, -a, a) / a\sqrt{6} = (-2, -1, 1) / \sqrt{6} \quad (2)$$

$$\sum M_O = 0 \Leftrightarrow M_{O,S} + M_{O,mg} = 0 \quad (3)$$

$$M_{O,S} = \vec{OA} \times \$ \quad (4) \text{ med } \vec{OA} = (2a, a, a) \quad (5)$$

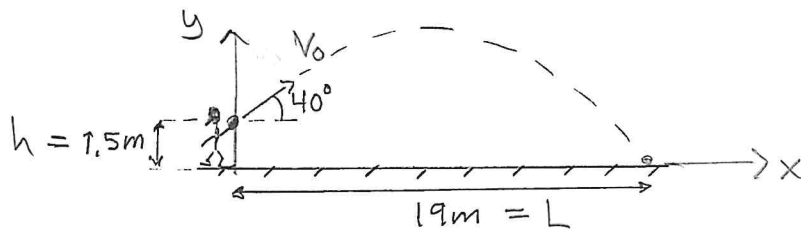
$$(4) \text{ m.h.a. } (1) \text{ ger } M_{O,S} = \frac{Sa}{\sqrt{6}} (2, -4, 0) \quad (6)$$

$$M_{O,mg} = \frac{\vec{OA}}{2} \times \mathbf{F} \quad (7) \text{ med } \mathbf{F} = (0, 0, -mg) \quad (8)$$

$$(7) \text{ m.h.a. } (5) \text{ och } (8) \text{ ger } M_{O,mg} = mga(-1/2, 1, 0) \quad (9)$$

$$(6) \text{ och } (9) \text{ i } (3) \Rightarrow S = mg\sqrt{6}/4 //$$

- 7 Kulstötaren Fanny stöter 19 m enligt figur. Vilken utgångshastighet innebär detta, om stöten sker från höjden 1.5 m med vinkeln 40° ? (5 poäng)



$$\rightarrow: 0 = a_x \Rightarrow V_x = \dot{C}_1 = V_0 \cos 40^\circ \Rightarrow S_x = V_0 t \cos 40^\circ \quad (1)$$

$$\uparrow: -g = a_y \Rightarrow V_y = -gt + C_2 = -gt + V_0 \sin 40^\circ \Rightarrow \\ \Rightarrow S_y = -gt^2/2 + V_0 t \sin 40^\circ + h, \quad (2) \quad [h=1.5\text{m}]$$

Kulbanan tar tid t_* . Anv. (1) och (2):

$$(1) \Rightarrow L = V_0 t_* \cos 40^\circ \Rightarrow t_* = L / (V_0 \cos 40^\circ) \quad (3)$$

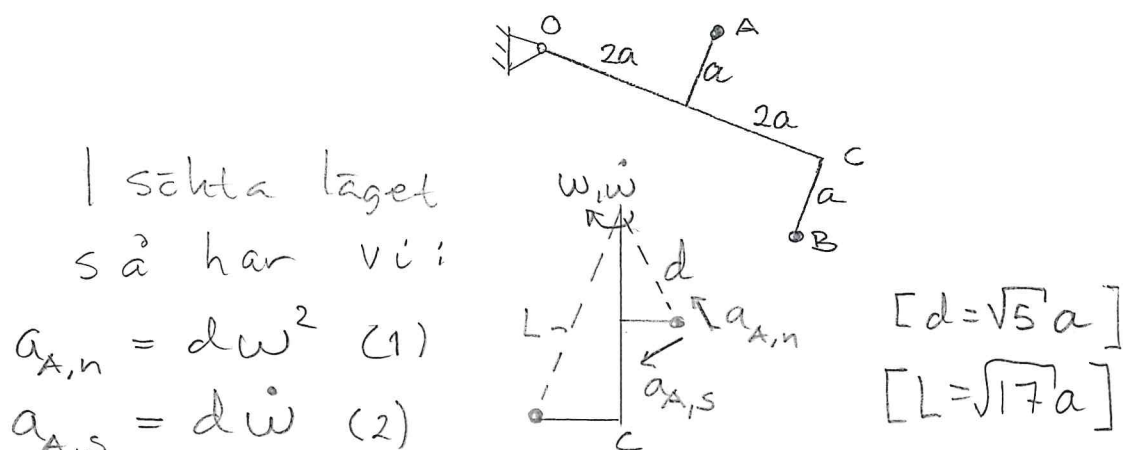
$$(2) \Rightarrow 0 = -g t_*^2 / 2 + V_0 t_* \sin 40^\circ + h = \text{ins. (3)} = \\ = -g L^2 / (2 V_0^2 \cos^2 40^\circ) + L \tan 40^\circ + h \Rightarrow$$

$$V_0^2 = \frac{g L^2}{2 \cos^2 40^\circ (L \tan 40^\circ + h)} \quad (4)$$

Ins. värden i (4), d.v.s. $h=1.5\text{m}$ och

$$L=19\text{m} \Rightarrow V_0 =$$

- 8 En struktur består av masslösa stänger, samt två partiklar (A med massa m och B med massa $2m$). Strukturen är ledad i O och släpps från vila då OC är horisontell. Bestäm beloppet av accelerationen för kropp A då strukturen passerar läget då OC är vertikal. (5 poäng)



ω^2 ur energilagen; $\dot{\omega}$ ur rotationslagen.

$\underline{\omega^2}$: $T_1 = 0$ $V_1 = mga - 2mga$ då OC horis.

$T_2 = \frac{1}{2} I_O \omega^2$ $V_2 = -mg2a - 2mg4a$ då OC vert.

$[T_2$ kan alt. fås ur $\frac{1}{2} m v_A^2 + \frac{1}{2} 2m v_B^2]$

$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \Leftrightarrow -mga = \frac{1}{2} I_O \omega^2 - 10mga \rightarrow \omega^2 = \frac{18mga}{I_O}$ (3)

$\underline{\dot{\omega}}$: $\vec{O}$: $mga - 2mga = I_O \dot{\omega}$ då OC vert.

$\rightarrow \dot{\omega} = -mga / I_O$ (4)

$I_O = md^2 + 2mL^2$ ur Steiners Sats $[\bar{I} = 0 \text{ för part.}]$
 $= m5a^2 + 2m17a^2 = 39ma^2$ (5)

(1), (3) och (5) $\rightarrow a_{A,n} = 6\sqrt{5}g / 13 //$

(2), (4) och (5) $\rightarrow a_{A,s} = -\sqrt{5}g / 13 //$

$|a_A| = [a_{A,n}^2 + a_{A,s}^2]^{1/2} = \sqrt{185} / 13 g \approx 1.05g //$