

Tentamen i TME010 Mekanik TD/I, 2021-04-09 kl. 8.30–12.30

Jourhavande: Peter Folkow tel. 031-7721521 alt. 0729-617241.

Lösningar anslås på kurshemsidan senast den 12/4.

Preliminärt rättningsresultat anslås på hemsidan senast den 28/4.

Rättningsgranskning sker via mejl under vecka 18.

Tillåtna hjälpmedel: Allt som anses som enskilt arbete. Till exempel:

Mekanikformler, M.M. Japp. Läroboken. Gamla tentor och duggor.

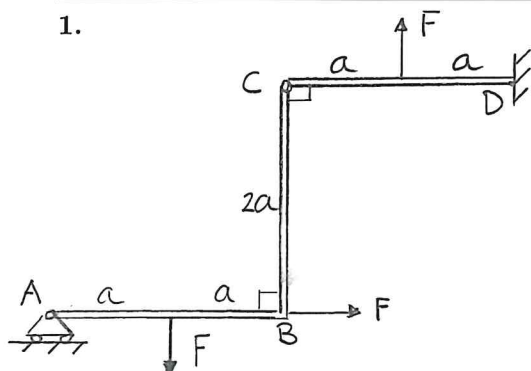
Matematiska handböcker (t ex Beta) eller utdrag därur. Räknare.

Betygsgränser: Uppgift 1-5 ger maximalt 3 poäng vardera. Uppgift 6-8 ger maximalt 5 poäng vardera. Betyget på tentamen ges enligt följande tabell:

		Poäng på uppgift 1–5 (inkl. bonuspoäng)						
		0–7	8	9	10	11	12	13–19
Poäng på uppgift 6–8	0–4	U	U	U	U	U	3	3
	5–8	U	U	U	U	3	3	4
	9	U	U	U	3	3	4	4
	10–11	U	U	3	3	4	4	5
	12–15	U	3	3	4	4	5	5

UPPSTÄLLDA EKVATIONER SKALL MOTIVERAS.

1.



1. Två masslösa balkar, ABC och CD, är förbundna via en led i C. Systemet utsätts för tre krafter enligt figur.

a) Frilägg ABC och CD var för sig.

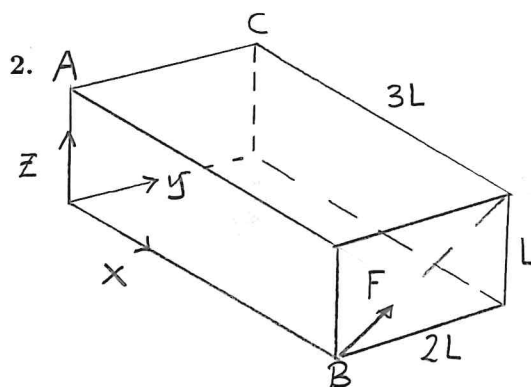
(1 poäng)

b) För CD: ställ upp ekvationen för momentjämvikt med avseende på punkten C.

(1 poäng)

c) För ABC: Bestäm vertikala stödkraften i A för jämvikt. (1 poäng)

För full poäng på a) måste införda storheter ges sådana beteckningar att det i princip är möjligt att bestämma samtliga obekanta från jämviktsekvationer (dessa behöver här inte ställas upp).



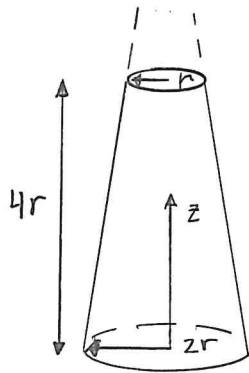
2.

En kraft F angriper i B enligt figur. Bestäm

a) kraftens momentvektor med avseende på punkten A, (2 poäng)

b) kraftens moment med avseende på axeln AC. (1 poäng)

3.



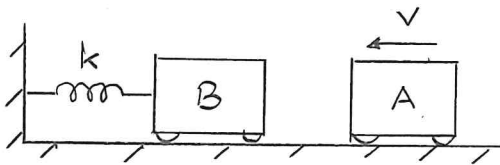
3. Figuren visar en kapad solid kon med bottenradie $2r$, höjden $4r$ och densitet ρ .

a) Bestäm masscentrums vertikala position $\bar{z}$. (2 poäng)

b) Bestäm masströghetsmomentet I_{zz} . (1 poäng)

Ledning: Konens volym fås ur $R^2\pi H/3$.

4.

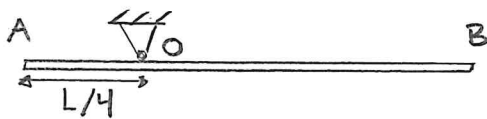


4. En kropp A (massa m) rör sig med farten v mot en stillastående kropp B (massa $2m$). Kropp B är i sin tur förbunden med en fjäder, styvhet k . Kropparna krockar varvid A och B fäster i varandra.

a) Bestäm farten omedelbart efter stöt för den sammansatta kroppen (1 poäng)

b) Vad blir fjäderns största hoptryckning under rörelsen? (2 poäng)

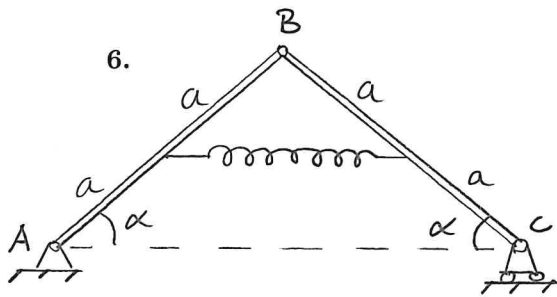
5.



5. En stång AB har längden L och massan $4m$. Stången är placerad enligt figur och släpps från vila. Bestäm för läget då stången passerar sitt vertikala läge,

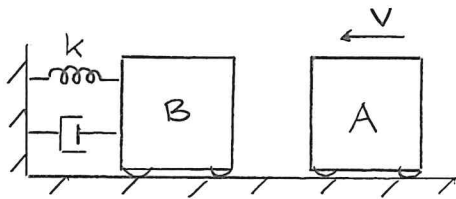
a) farten hos punkten A, (2 poäng)

b) tangentialaccelerationen hos punkten A. (1 poäng)



Figuren visar två stänger förbundna med en fjäder. Stång AB har massa $2m$ och längd $2a$, medan stång BC har massa m och längd $2a$. Fjäders ospända längd är a . Systemet är i jämvikt vid givna vinkeln α . Bestäm fjäderkonstanten vid jämvikt. (5 poäng)

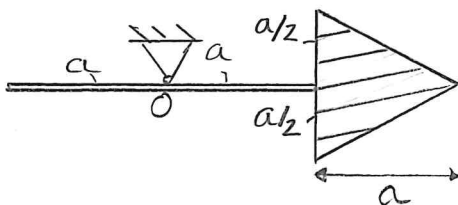
7.



En kropp A (massa m) rör sig med farten v mot en stillastående kropp B (massa $5m$). Kropp B är i sin tur förbunden med en fjäder, styvhet k , och en dämpare. Kropparna krockar varvid B sätts i rörelse åt vänster, medan A rör sig i motsatt riktning med farten $v/9$.

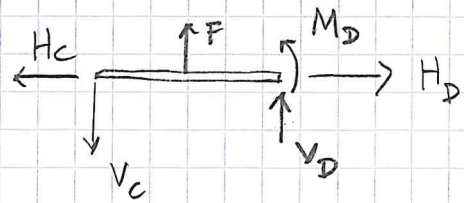
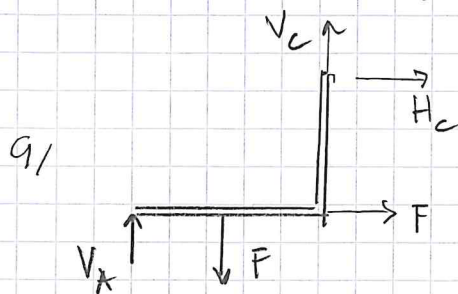
Vad blir fjäderns största hoptryckning under fortsatta rörelsen, förutsatt att kritisk dämpning råder? (5 poäng)

8.



En kropp i formen av en pil fäster friktionsfritt i O. Kroppen består av en smal stång, massa m och längd $2a$, och en likbent triangelyta med massa $2m$, basen a och höjden a . Systemet släpps från vila. Bestäm lagerreaktionerna i O då systemet roterat ett fjärdedels varv (pilen "pekar nedåt"). (5 poäng)

①

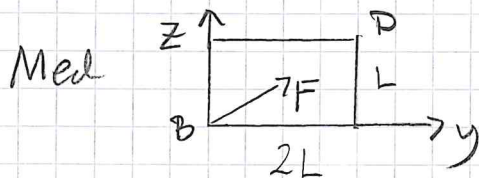


b/ $\curvearrowleft C : V_D \cdot 2a + Fa + M_D = 0$

c/ $\curvearrowleft C : V_A \cdot 2a - Fa - F \cdot 2a = 0 \Rightarrow V_A = 2F/3 //$

② a/ $M_A = r \times F$ (1) med

$r = \vec{AB} = (3L, 0, -L)$

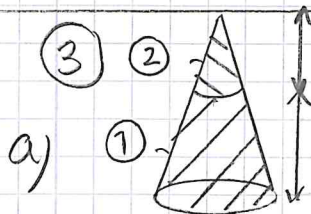


$\Rightarrow F = F \hat{e}_{BD} = \frac{F}{\sqrt{5}} (0, 2, 1)$

$$M_A = \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ 3L & 0 & -L \\ 0 & 2F/\sqrt{5} & F/\sqrt{5} \end{vmatrix} = \frac{FL}{\sqrt{5}} (2, -3, 6) //$$

b/ $M_{AC} = M_A \cdot \hat{e}_{AC}$ med $\hat{e}_{AC} = (0, 1, 0)$,

så $M_{AC} = \frac{FL}{\sqrt{5}} (2, -3, 6) \cdot (0, 1, 0) = -3FL/\sqrt{5} //$



a/ $\bar{z}_1 = \frac{m_{12} \bar{z}_{12} - m_2 \bar{z}_2}{m_{12} - m_2}$ (1)

där kropp 12 är båda delar tillsammans.

Likformighet ger $h = H = 4r$

$$m_{12} = \rho V_{12} = \rho (2r)^2 \pi (H+h)/3 = \rho 32r^3 \pi / 3$$

$$m_2 = \rho V_2 = \rho r^2 \pi h / 3 = \rho 4r^3 \pi / 3$$

$$\begin{aligned} \bar{z}_{12} &= (H+h)/4 = 8r/4 = 2r \\ \bar{z}_2 &= H + h/4 = 4r + 4r/4 = 5r \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \bar{z}_{12} &= (H+h)/4 = 8r/4 = 2r \\ \bar{z}_2 &= H + h/4 = 4r + 4r/4 = 5r \end{aligned}} \right\} \text{FS s.19 fall 1.}$$

$$\text{Ekv. (1)} \Rightarrow \frac{\rho 32r^3 \pi \cdot 2r - \rho 4r^3 \pi \cdot 5r}{\rho 32r^3 \pi - \rho 4r^3 \pi} = 11r/7 //$$

$$b) I_{z,1} = I_{z,12} - I_{z,2} \quad (2)$$

$$I_{z,12} = 3/10 m_{12} (2r)^2 \quad \text{ur FS s.19 fall 1}$$

$$= \frac{3}{10} \rho 32r^3 \pi / 3 \cdot 4r^2 = \frac{384}{30} \rho r^5 \pi = \frac{64}{5} \rho r^5 \pi$$

$$I_{z,2} = 3/10 m_2 r^2 = \frac{3}{10} \rho 4r^3 \pi / 3 \cdot r^2 = \frac{2}{5} \rho r^5 \pi$$

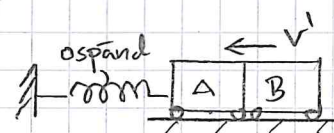
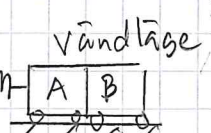
$$\text{Ekv. (2)} \Rightarrow I_{z,1} = \frac{62}{5} \rho r^5 \pi //$$

④ Precis vid stöt ögonblicket bevaras rörelse-
 a) mängden för A+B:

$$P_{\text{före}}: m_A \cdot V_A + m_B \cdot V_B = mV + 2m \cdot 0 = mV$$

$$P_{\text{efter}}: m_A V_A' + m_B V_B' = [V_A' = V_B' = v'] = 3m v'$$

$$P_{\text{före}} = P_{\text{efter}} \Leftrightarrow mV = 3m v' \Rightarrow v' = V/3 //$$

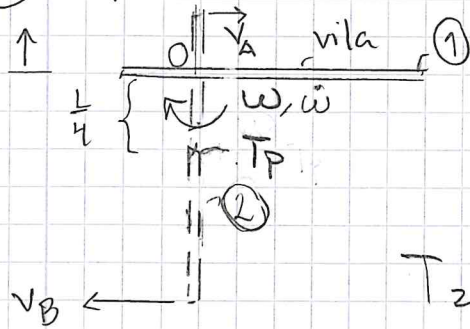
b) Läge 1:  Läge 2: 

$$\text{Mek. energi bevaras: } T_1 + \bar{V}_1 = T_2 + \bar{V}_2 \quad (1)$$

$$T_1 = \frac{1}{2} 3m v'^2 = \frac{1}{6} mV^2; \bar{V}_1 = 0; T_2 = 0 \text{ (fart null)}; \bar{V}_2 = \frac{1}{2} kx^2$$

$$(1) \Rightarrow \frac{1}{6} m v^2 = \frac{1}{2} k x^2 \Rightarrow x = \sqrt{m/3k} v //$$

⑤ Mechaniska energin bevaras under rörelsen.



$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \quad (1)$$

$$T_1 = 0 \text{ (vila)} \quad V_1 = 0 \text{ (nollnivå)}$$

$$T_2 = \frac{1}{2} I_o \omega^2 \quad V_2 = -4mg \cdot L/4 = -mgL$$

$$(1) \Rightarrow 0 = \frac{1}{2} I_o \omega^2 - mgL \Rightarrow \omega = \sqrt{2mgL/I_o} \quad (2)$$

$$a) \quad V_A = \frac{L}{4} \omega \quad (3) \text{ med } \omega \text{ ur } (2).$$

Vad är I_o ? Enl. Steiner har vi

$$I_o = \bar{I} + 4m \left(\frac{L}{4}\right)^2 = \frac{1}{12} 4mL^2 + 4m \frac{L^2}{16} = \frac{7}{12} mL^2 //$$

Insatt i (3) m.h.a. (2) $\Rightarrow$

$$V_A = \frac{L}{4} \sqrt{\frac{24g}{7L}} = \sqrt{6gL/28} //$$

$$b) \quad a_{A,s} = \frac{L}{4} \ddot{\omega} \quad (4) \quad \text{Vad är } \ddot{\omega}?$$

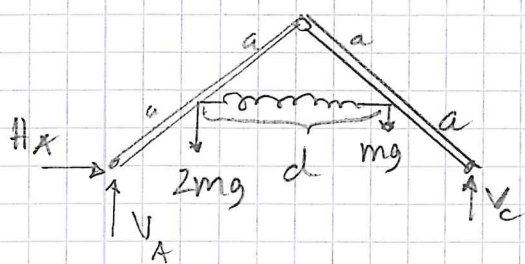
I läge 2 är $\omega \text{ max} \Rightarrow \ddot{\omega} = 0$.

$$[M_o = I_o \ddot{\omega} \Rightarrow \ddot{\omega} = 0 \text{ da } M_o = 0]$$

$$\text{Så, elw. (4) } \Rightarrow a_{A,s} = 0 //$$

6

Frilägg ABCi



$$\rightarrow i H_A = 0$$

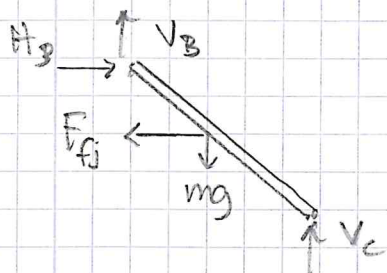
$$\uparrow: V_A + V_C - 3mg = 0 \quad (1)$$

$$\curvearrowright A: V_C \cdot 4a \cos \alpha - mg \cdot 3a \cos \alpha - 2mg \cdot a \cos \alpha = 0 \Rightarrow$$

$$(4V_C - 5mg)a \cos \alpha = 0 \Rightarrow V_C = 5mg/4 \quad (2)$$

$$(1) \Rightarrow V_A = 7mg/4 \quad (3)$$

Frilägg BC (eller AB):



$$\curvearrowright B: V_C \cdot 2a \cos \alpha - mg \cdot a \cos \alpha - F_{fi} \cdot a \sin \alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow (5mg/4 - mg)a \cos \alpha - F_{fi} a \sin \alpha = 0$$

$$\Rightarrow F_{fi} = \frac{3mg}{2} \cot \alpha \quad (4)$$

Vi har $F_{fi} = k(d - a)$ med $d = 2a \cos \alpha$

$$\text{Mha (4): } \frac{3mg}{2} \cot \alpha = k a (2 \cos \alpha - 1) \Rightarrow$$

$$k = \frac{3mg \cot \alpha}{2a(2 \cos \alpha - 1)} //$$

⑦ Precis vid stöten bevaras syst. rörelsemängd:

x ← Före: $v_B = 0$ $v_A = V$ Efter: $v_B' = V/9$ $v_A' = V/9$
litet!

$$p_{x, \text{före}} = m_B v_B + m_A v_A = mV \quad (1)$$

$$p_{x, \text{efter}} = m_B v_B' - m_A v_A' = 5m v_B' - m V/9 \quad (2)$$

$$p_{x, \text{före}} = p_{x, \text{efter}} \Rightarrow v_B' = \frac{2}{9} V \quad (3) \text{ ur (1) o (2).}$$

Max höfttryck fås ur svängningens rökken
 (energielw. ej enkelt p.g.a. $v_{\text{rel}}^{(u)}$ från dämpare)

$$\text{Studera kropp B: } x(t) = e^{-\omega t} [C_1 t + C_2] \quad (4) \quad [\text{FS s. 11}]$$

x mäts från ospänd fjäder (vid krockläget)

$$\text{Så, } x(0) = 0 \quad (5) \quad \text{och } \dot{x}(0) = v_B' \quad (6)$$

$$(4) \text{ och } (5) \Rightarrow C_2 = 0 \quad (7)$$

$$\dot{x}(t) = -\omega e^{-\omega t} \cdot C_1 t + e^{-\omega t} C_1 = C_1 e^{-\omega t} (1 - \omega t) \quad (8)$$

$$\dot{x}(0) = C_1 \text{ enl. (8), så (6)} \Rightarrow C_1 = v_B' \quad (9)$$

$$(7) \text{ och } (9) \Rightarrow x(t) = e^{-\omega t} v_B' t \quad (10)$$

När är $x = x_{\text{max}}$? Fås i vändläget då

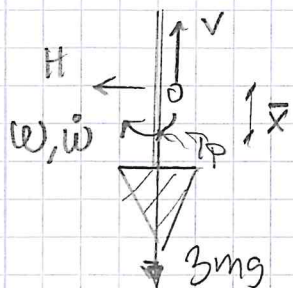
vi har $\dot{x} = 0$. Ekv. (8) $\Rightarrow \dot{x} = 0$ då $(1 - \omega t^*) = 0$

$$\text{d. v. s. } t^* = 1/\omega. \quad [\text{Vi har } \omega = \sqrt{k/m}]$$

$$\text{Ekv. (10)} \Rightarrow x(t^*) = e^{-1} v_B' / \omega = v_B' / (e\omega)$$

$$= [\text{ins. (3)}] = \frac{2}{9} \frac{V}{e} \sqrt{\frac{5m}{k}} //$$

⑧ Förlägg vid rotation:



$$\leftarrow: H = 3m\bar{a}_s \quad (1)$$

$$\uparrow: V - 3mg = 3m\bar{a}_n \quad (2)$$

$$\bar{a}_s = \bar{x}\dot{\omega} \quad a_n = \bar{x}\omega^2$$

$$\tilde{O}: 0 = I_0 \dot{\omega} \Rightarrow \dot{\omega} = 0 \quad (\omega \text{ är max}),$$

$$(1) \Rightarrow H = 0 \quad (2) \Rightarrow V = 3m(g + \bar{x}\omega^2) \quad (3)$$

Bestäm $\bar{x}$ och ω^2 :

$$\bar{x}: \quad \bar{x} = (m\bar{x}_1 + 2m\bar{x}_2) / 3m \quad (4)$$

$$\bar{x}_1 = 0 \text{ (stäng)}. \quad \bar{x}_2 = a + a/3 = 4a/3$$

$$\text{Insätt i (4)} \Rightarrow \bar{x} = 8a/9 \quad (5)$$

$$\underline{\omega^2} \quad T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \quad (6)$$

$$\text{Startläge} \quad T_1 = V_1 = 0$$

$$\text{Säkt läge} \quad T_2 = \frac{1}{2} I_0 \omega^2; \quad V_2 = -3mg\bar{x}$$

$$(6) \Rightarrow 0 = \frac{1}{2} I_0 \omega^2 - 8mga/3 \Rightarrow$$

$$\omega^2 = 16mga / (3I_0) \quad (7)$$

$$I_0: I_0 = I_{0,m} + I_{0,2m} \quad (8)$$

$$I_{0,m} = \frac{1}{12} m (2a)^2 = \frac{1}{3} ma^2 \quad [\text{FS 5.16 fall 4}]$$

$$I_{0,2m} = \bar{I}_{2m} + 2m \left(4a/3 \right)^2 \quad (9) \quad [\bar{I}_{02m,z}]$$

$$\bar{I}_{2m} = \bar{I}_{2m,x} + \bar{I}_{2m,y} \quad \text{FS 5.13} = \frac{2ma^2}{18} + 2m \left(\frac{a}{2} \right)^2 / 6 = \frac{7}{36} ma^2$$

$$(8) \Rightarrow I_0 = 49ma^2/12$$

$$(7) \Rightarrow \omega^2 = 64g/49a \Rightarrow \bar{x}\omega^2 = \frac{512}{441} g \Rightarrow (3): V = 6,5mg //$$