Tentamen i TME010 Mekanik TD/I, 2021-01-14 kl. 8.30–12.30
Jourhavande: Peter Folkow tel. 031-7721521 alt. 0729-617241.
Lösningar anslås på kurshemsidan senast den 15/1.
Preliminärt rättningsresultat anslås på hemsidan senast den 4/2.
Rättningsgranskning sker via mejl under vecka 6.

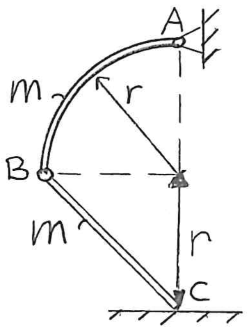
Tillåtna hjälpmedel: Allt som anses som enskilt arbete. Till exempel:
Mekanikformler, M.M. Japp. Läroboken. Gamla tentor och duggor.
Matematiska handböcker (t ex Beta) eller utdrag därur. Räknare.

Betygsgränser: Uppgift 1-5 ger maximalt 3 poäng vardera. Uppgift 6-8 ger maximalt 5 poäng vardera. Betyget på tentamen ges enligt följande tabell:

		Poäng på uppgift 1–5 (inkl. bonuspoäng)						
		0–7	8	9	10	11	12	13–19
Poäng på uppgift 6–8	0–4	U	U	U	U	U	3	3
	5–8	U	U	U	U	3	3	4
	9	U	U	U	3	3	4	4
	10–11	U	U	3	3	4	4	5
	12–15	U	3	3	4	4	5	5

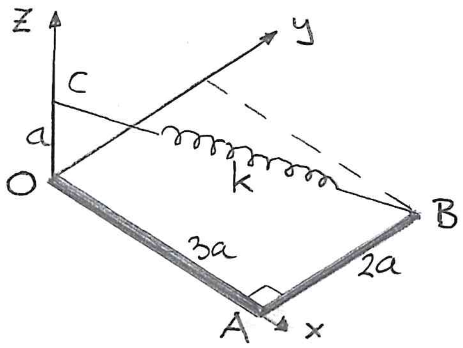
UPPSTÄLLDA EKVATIONER SKALL MOTIVERAS.

1.



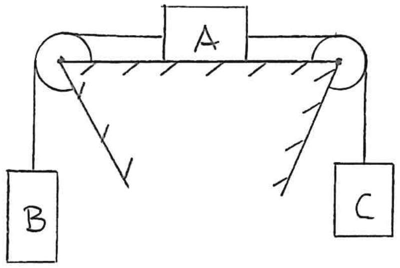
En kvartscirkelbåge AB, massa m och radie r, är förbunden med en smal stång BC, massa m, via en friktionsfri led i B enligt figur. Stången vilar mot ett strävt underlag vid C så att systemet är i jämvikt.
a) Frilägg hela systemet ABC som en helhet och ställ upp 3 oberoende jämviktsekvationer. Observera att ekvationerna *inte* behöver lösas, men alla ingående sträckor skall vara bestämda och uttryckta i r. (2 poäng))
b) Frilägg stången BC och ställ upp momentjämviktsekvationen m.a.p. leden B.
(1 poäng))

2.



Strukturen OAB ligger i xy-planet enligt figur. En fjäder med styvhet k och ospänd längd $3a$ fäster i strukturen i B. Fjäderns andra ände är förankrad i punkten C på z-axeln enligt figur.
a) Bestäm kraften i fjädern (belopp).
(1 poäng)
b) Uttryck kraften från fjädern som verkar på strukturen i B som en vektor. (1 poäng)
c) Bestäm momentet i O från fjäderkraften som verkar på strukturen i B. (1 poäng)

3.

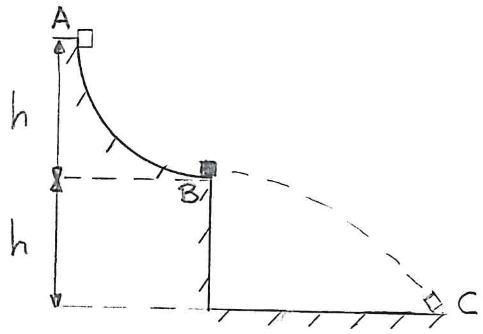


En kropp A med massa m är förbunden med kropp B och C via linor och masslösa trissor enligt figur. Friktion råder mellan A och underlaget med friktionskoefficient μ (där $\mu_s = \mu_k = \mu$). Bestäm för fallet $m_C = 3m$

a) tillåtna värden för m_B (intervall) så att systemet är i statisk jämvikt, (2 poäng)

b) accelerationen för kropp C om kropp B plötsligt lossnar. (1 poäng)

4.



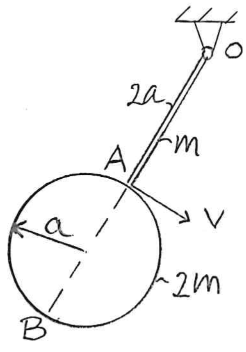
En partikel med massa m släpps från vila i A och glider friktionsfritt längs en kvartscirkelbåge AB. I punkten B påbörjas en flygfärd, varvid kroppen landar i C; mått enligt figur.

a) Vilken horisontell hastighet har kroppen precis före nedslag i C? (1 poäng)

b) Vilken vertikal hastighet har kroppen precis före nedslag i C? (1 poäng)

c) Hur lång är horisontella sträckan mellan B och C? (1 poäng)

5.

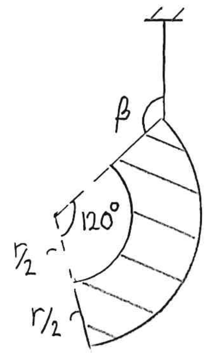


En pendel består av en smal stång med längd $2a$ och massa m och ett homogent sfäriskt klot med radie a och massa $2m$ enligt figuren.

a) I figurläget har punkten A farten v. Hur stor är då punkten B:s fart? (1 poäng)

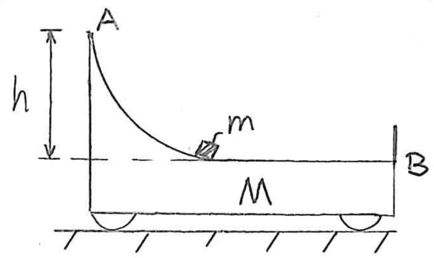
b) Bestäm pendelns kinetiska energi i figurläget. (2 poäng)

6.



Ur en cirkelsektor med vinkeln 120° och radie r har en cirkelsektor med radie $r/2$ skurits ut. Kroppen hängs upp i en lina enligt figur. Bestäm vinkeln β vid jämvikt. (5 poäng)

7.

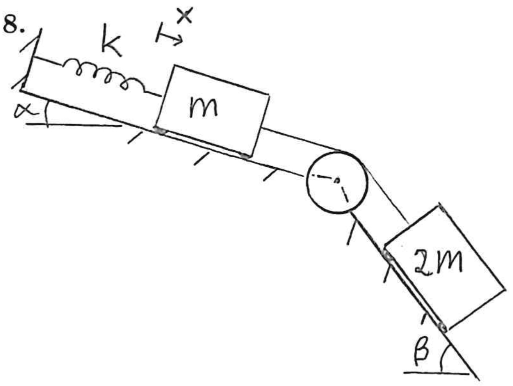


En partikel, massa m, är placerad på en vagn, massa M. Partikeln släpps från vila vid A (höjden h) och glider mot vagnens främre ände B. All friktion kan försummas. Bestäm

a) vagnens hastighet (storlek och riktning) precis innan partikeln når B, (3 poäng)

b) den mekaniska energi som går förlorad då partikel slår i kanten B och fastnar där. (2 poäng)

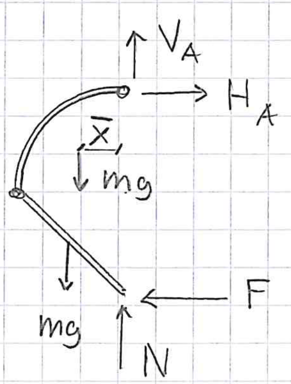
8.



Två kroppar, massor m respektive $2m$, kan rulla friktionsfritt på var sitt lutande plan, vinklar α och β. Kropparna är förbundna med varandra via en otänjbar lina som löper över en lätt, friktionsfri trissa. Den övre kroppen är i sin tur förbunden med en fjäder, fjäderstyvhet k. Hela systemet släpps från vila vid $t = 0$ då fjädern är ospänd ($x = 0$ mätt för den övre kroppen). Bestäm rörelsen $x(t)$ för $t \geq 0$. (5 poäng)

Lösning Mek TD/I 21-01-14

1 a/



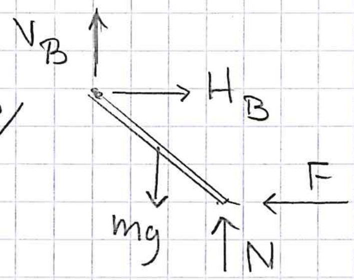
$\rightarrow: H_A - F = 0 \quad (1)$

$\uparrow: N + V_A - 2mg = 0 \quad (2)$

$\curvearrowleft A: mg\, r/2 + mg\, \bar{x} - F\, 2r = 0 \quad (3)$

där $\bar{x} = 2r/\pi$ ur FS s.15 fall 2.

b/



$\curvearrowleft B: N \cdot r - Fr - mg\, r/2 = 0 \quad (4)$

[Om (1) - (4) löses fås

$F = H_A = mg\,(1/\pi + 1/4)$; $N = mg\,(1/\pi + 3/4)$;

$V_A = mg\,(5/4 - 1/\pi)$]

---

2 a/ $F_{fj} = k\Delta$ (1) där Δ är fjäderförlängn.

Fjäderns längd är $[9a^2 + 4a^2 + a^2]^{1/2} = \sqrt{14}\,a$.

Så, $\Delta = \sqrt{14}\,a - 3a$ $(\approx 0{,}74a)$, Insätt i (1).

b/ $\mathbb{F} = F_{fj}\, \mathbf{e}_{BC}$ (2) där $\mathbf{e}_{BC} = \dfrac{\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|} =$

$= \dfrac{(-3a, -2a, a)}{\sqrt{14}\,a} = (-3, -2, 1)/\sqrt{14}$

c/ $\mathbb{M}_o = \mathbb{r} \times \mathbb{F}$ där $\mathbb{r} = (3a, 2a, 0)$

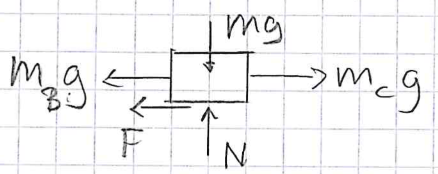
och $\mathbb{F} = \underbrace{k\Delta}_{F_{fj}}\, \mathbf{e}_{BC}$ ur (2) m.h.a. (1).

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \frac{F_{fj}}{\sqrt{14}} \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ 3a & 2a & 0 \\ -3 & -2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\frac{F_{fj}}{\sqrt{14}} (2a, -3a, 0) \quad \text{med } F_{fj} = k(\sqrt{14}-3)a$$

---

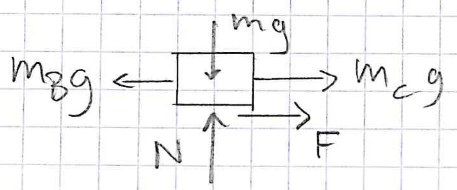
(3) a/ $m_C > m_B$:



$\uparrow$: $N - mg = 0$ (1)

$\rightarrow$ $m_C g - m_B g - F = 0$ (2)

$m_C < m_B$:



($\uparrow$: $N - mg = 0$)

$\leftarrow$: $m_B g - m_C g - F = 0$ (3)

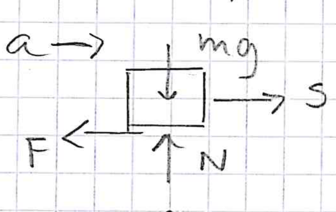
Precis före glid $\Rightarrow F = \mu N = \mu mg$ ur (1)

(2) $\Rightarrow$ $m_B = m_C - \mu m$ ($m_{B,min}$).

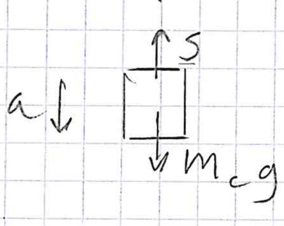
(3) $\Rightarrow$ $m_B = m_C + \mu m$ ($m_{B,max}$)

Så $3m - \mu m \leq m_B \leq 3m + \mu m$ //

b/



$\rightarrow$: $S - F = ma$ (4)



$\downarrow$: $m_C g - S = m_C a$ (5)

(4) och (5), med $m_C = 3m$:

$\underbrace{3mg - F = 4ma}$ $\Rightarrow [F = \mu mg] \Rightarrow a = (3g - \mu g)/4$ //

[Kunde inses direkt utan (4) o (5)]

(4) Mekaniska energin bevaras:

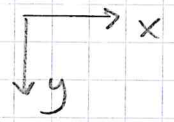
$$T_A + V_A = T_B + V_B = T_C + V_C \quad (1)$$

a/ $T_A = 0 \quad V_A = mgh \quad T_B = \frac{1}{2} m v_B^2 \quad V_B = 0$

$(1) \Rightarrow mgh = \frac{1}{2} m v_B^2 \Rightarrow v_B = \sqrt{2gh}.$

Vi har v_x konstant mellan B och C,

så $v_{C,x} = v_B = \sqrt{2gh}$ //

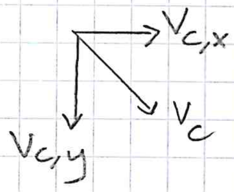


b/ Ev. med kaströrelse, se c/ nedan, men enklare med energi (1):

$T_C = \frac{1}{2} m v_C^2 \qquad V_C = -mgh.$

$(1) \Rightarrow mgh = \frac{1}{2} m v_C^2 - mgh \Rightarrow v_C = 2\sqrt{gh}$

Vi har $v_C^2 = v_{C,x}^2 + v_{C,y}^2$ [Pyth.] ur



så $v_{C,y} = \sqrt{2gh}$ //

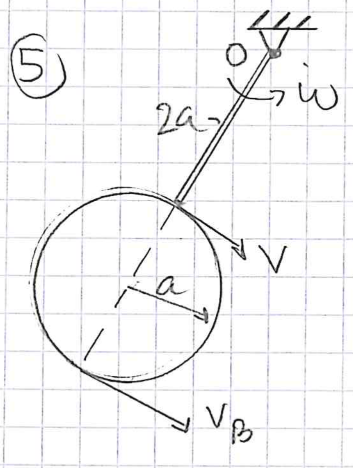
c/ $a_y = g \Rightarrow v_y = gt \Rightarrow s_y = gt^2/2$
$\quad a_x = 0 \Rightarrow v_x = v_B \Rightarrow s_x = v_B \cdot t$ (från B)

Med $s_y = h$ fås $h = g t_{BC}^2/2 \Rightarrow t_{BC} = \sqrt{2h/g}$

Insatt i $s_x = v_B \sqrt{2h/g} = 2h$ // ur a/

[Vi får $v_y = g t_{BC} = g\sqrt{2h/g} = \sqrt{2gh}$, d.v.s. som b/]

(5)



a/ Vi har rot. kring O:

$V_A = 2a\omega \Rightarrow \omega = V/2a$ (1)

$V_B = 4a\omega \Rightarrow V_B = 2V$ //

b/ $T = \frac{1}{2} I_0 \omega^2$ (2) [Stel kropp kring O]

$I_0 = I_{0,m} + I_{0,2m}$ (3)

$I_{0,m} = \frac{1}{3} m (2a)^2 = \frac{4}{3} ma^2$ [FS s, 16 fall 4]

$I_{0,2m} = \bar{I}_{2m} + 2m(3a)^2$ ur Steiner.

$\bar{I}_{2m} = \frac{2}{5} 2ma^2 = \frac{4}{5} ma^2$ [FS s. 18 fall 1]

Så $I_{0,2m} = \frac{4}{5} ma^2 + 18 ma^2 = \frac{94}{5} ma^2$

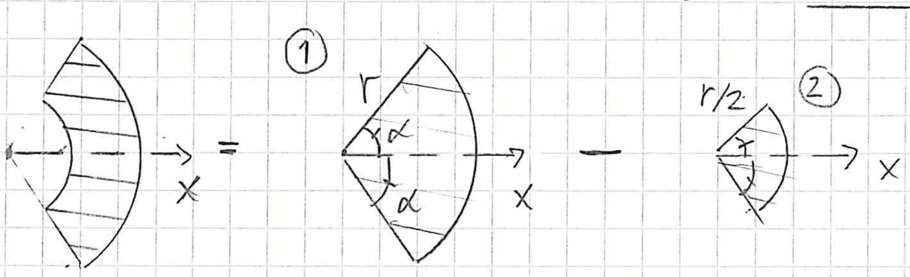
$(3) \Rightarrow I_0 = \frac{4}{3} ma^2 + \frac{94}{5} ma^2 = \frac{302}{15} ma^2$

Insatt i (2) m.h.a. (1) $\Rightarrow$

$T = \frac{151}{15} ma^2 \left(V^2/4a^2 \right) = \frac{151}{60} mV^2$ //

(6) Studera tp läge:

$\alpha = 60° = \underline{\pi/3 \text{ rad.}}$



$$\bar{x} = (m_1 \bar{x}_1 - m_2 \bar{x}_2) / (m_1 - m_2) \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} m_1 &= \sigma A_1 = \sigma r^2 \pi/3 \quad [\sigma \text{ massa/yta}] \\ m_2 &= \sigma A_2 = \sigma (r/2)^2 \pi/3 = \sigma r^2 \pi/12 \end{aligned}\right\} (2)$$

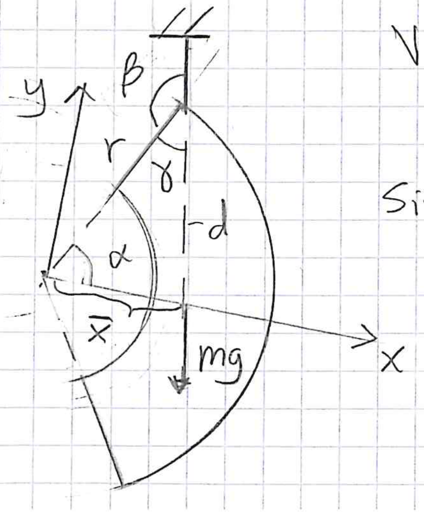
$$\bar{x}_1 = 2r \sin\alpha / 3\alpha = 2r \cdot \sqrt{3}/2 \Big/ 3 \cdot \pi/3$$

$$\left.\begin{aligned} &= r\sqrt{3}/\pi \\ \bar{x}_2 &= 2(r/2)\sin\alpha/3\alpha = .. = r\sqrt{3}/2\pi \end{aligned}\right\} (3)$$

(2) och (3) i (1) $\Rightarrow$

$$\bar{x} = \frac{\sigma r^3 \left(\pi/3 \cdot \sqrt{3}/\pi - \pi/12 \cdot \sqrt{3}/2\pi\right)}{\sigma r^2 \left(\pi/3 - \pi/12\right)} =$$

$$= r\, 7\sqrt{3}/(6\pi) \approx 0{,}64\, r.$$



Vi har $d^2 = [r^2 + \bar{x}^2 - 2r\bar{x}\cos\alpha]^{1/2}$

$\Rightarrow d \approx 0{,}88\, r$ (cosinus-sats)

Sinussats: $\dfrac{\sin\gamma}{\bar{x}} = \dfrac{\sin\alpha}{d} \Rightarrow \gamma \approx 39°$

$\beta = 180° - \gamma \approx 141°$ //

b/

7 a/ Inga förluster, så $T_1 + V_1 = T_2 + V_2$ (1)

$T_1 = 0$ (vila) $V_1 = mgh$

Precis för m framme vid B:

$T_2 = \frac{1}{2} m v_m^2 + \frac{1}{2} M V_M^2$

$V_2 = 0$

(1) $\Rightarrow mgh = \frac{1}{2}(m v_m^2 + M V_M^2)$ (2)

Inga yttre krafter på m + M i sidled $\Rightarrow P_x$ bevaras: $P_{x,1} = P_{x,2}$ (3)

$P_{x,1} = 0$ (vila) $P_{x,2} = m v_m - M V_M$

(3) $\Rightarrow v_m = M V_M / m$ (4)

(4) i (2) $\Rightarrow V_M = [2m^2gh/(Mm + M^2)]^{1/2}$ //

b/ Fortfarande inga yttre krafter på m + M i sidled $\Rightarrow P_x$ bevaras

$P_{x,1} = 0$ (vila) $P_{x,3} = (m+M) V_{tot}$

då m och M har samma fart.

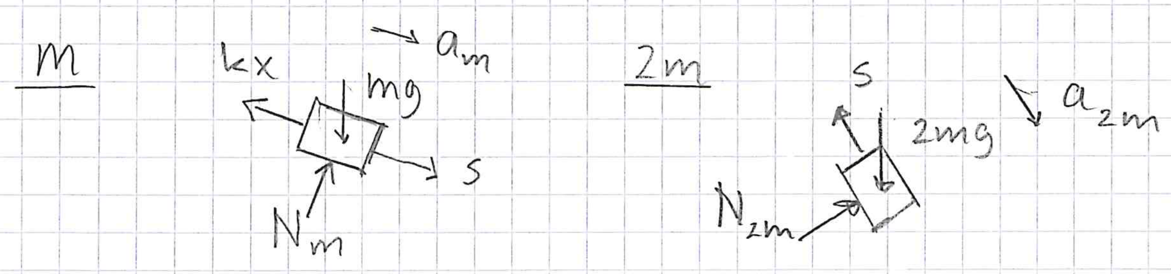
$P_{x,1} = P_{x,3} \Rightarrow V_{tot} = 0$! (vila igen!).

$T_1 + V_1 + W^{(ik)} = T_3 + V_3$ (5)

Då $T_3 = V_3 = 0$ så ger (5) att

$W^{(ik)} = -mgh$ //

(8) Frilägg kropparna var för sig



m ↘ : $S + mg\sin\alpha - kx = ma_m$ (1)

2m ↘ : $2mg\sin\beta - S = 2ma_{2m}$ (2)

Tag (1) + (2), med $a_m = a_{2m} = a$:

$mg\sin\alpha - kx + 2mg\sin\beta = 3ma \Rightarrow [a = \ddot{x}]$

$\Rightarrow \ddot{x} + \underbrace{\frac{k}{3m}}_{\omega^2} x = g/3\,(\sin\alpha + 2\sin\beta)$ (3)

$x = x_h + x_p$ där FS s.ll ger lösn. till (3):

$x_h = C_1\sin(\omega t) + C_2\cos(\omega t)$ (4)

$x_p = g/(3\omega^2)\,(\sin\alpha + 2\sin\beta)$ (5)

$x(0) = 0 \Leftrightarrow x_h(0) + x_p(0) = 0 \Rightarrow$

$C_2 + x_p = 0 \Rightarrow C_2 = -x_p$ (6)

$\dot{x}(0) = 0 \Rightarrow \dot{x}_h(0) + \dot{x}_p(0) = 0 \Rightarrow$

$C_1\omega = 0 \Rightarrow C_1 = 0$ (7)

(6) och (7) i (4), samt med (5), $\Rightarrow$

$x(t) = x_p[1 - \cos(\omega t)]$ // med x_p ur (5)