Tentamen i TME010 Mekanik TD/I, 2020-08-26 kl. 14.00–18.00
Jourhavande: Peter Folkow tel. 031-7721521 alt. 0729-617241.
Lösningar anslås på kurshemsidan senast den 27/8.
Preliminärt rättningsresultat anslås på M2 senast den 16/9.
Rättningsgranskning sker via mejl under vecka 39.

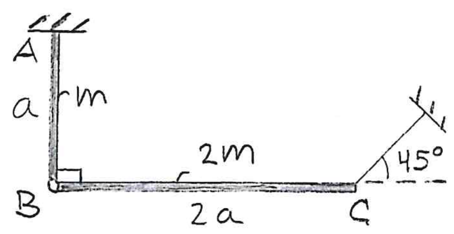
Tillåtna hjälpmedel: Allt som anses som enskilt arbete. Till exempel:
Mekanikformler, M.M. Japp. Läroboken. Gamla tentor och duggor.
Matematiska handböcker (t ex Beta) eller utdrag därur. Räknare.

Betygsgränser: Uppgift 1-5 ger maximalt 3 poäng vardera. Uppgift 6-8 ger maximalt 5 poäng vardera. Betyget på tentamen ges enligt följande tabell:

		Poäng på uppgift 1–5 (inkl. bonuspoäng)						
		0–7	8	9	10	11	12	13–19
Poäng på uppgift 6–8	0–4	U	U	U	U	U	3	3
	5–8	U	U	U	U	3	3	4
	9	U	U	U	3	3	4	4
	10–11	U	U	3	3	4	4	5
	12–15	U	3	3	4	4	5	5

UPPSTÄLLDA EKVATIONER SKALL MOTIVERAS.

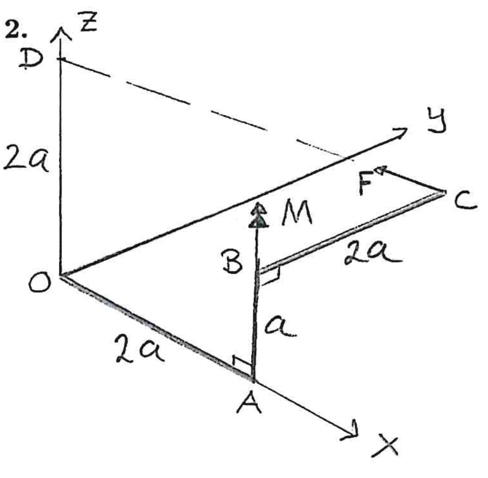
1.



En struktur i jämvikt är sammansatt av två stänger, AB med massa m och längd a, samt BC med massa $2m$ och längd $2a$. Strukturen är fast inspänd i A, friktionsfritt ledad i B och fäst i en lina i C.

a) Frilägg systemet ABC som helhet, samt frilägg delbalken BC. (1 poäng)
b) Bestäm linkraften verkande i C. (1 poäng)
c) Bestäm stödmomentet verkande på strukturen i A. (1 poäng)

2.



Figuren visar en masslös stång med längd $5a$. Delen AB är parallell med z-axeln, medan BC är parallell med y-axeln. En kraft F verkar i C, riktad mot punkten D på z-axeln. Det rena momentet verkar som synes i B och har beloppet $M = Fa$.

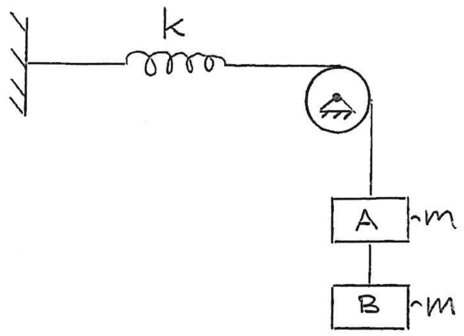
a) Bestäm kraften som en vektor $\mathbf{F}$. (1 poäng)
b) Bestäm systemets momentsumma med avseende på punkten O. (2 poäng)

3.

En partikel rör sig längs en rät linje (s-axeln) där farten ges av $v(s) = v_0\,\mathrm{e}^{-ks}$ där k är en given konstant. Partikeln passerar $s = 0$ vid tiden $t = 0$ (med farten v_0). Bestäm sträckan $s(t)$ för $t \geq 0$. (3 poäng)

Ledning: Bestäm först $t(s)$ varur $s(t)$ kan fås.

4.

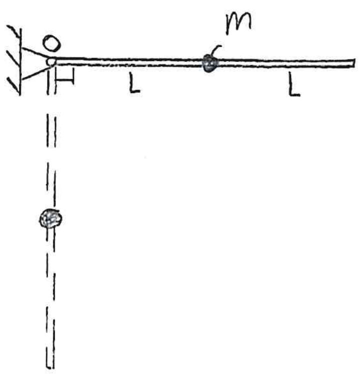


Systemet i figuren består av en fjäder, styvhet k, och två kroppar A och B med massa m vardera. Systemet är i vila då plötsligt kropp B lossnar.

a) Bestäm fjäderns utdragning före det att B lossnar. (1 poäng)

b) Efter att B lossnat, vad är kropp A:s fart då den har rört sig sträckan $h = mg/k$ uppåt? (2 poäng)

5.

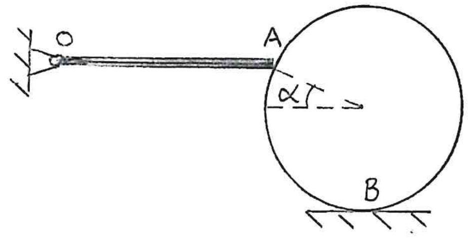


Mitt på en stång, massa m och längd $2L$, är en partikel med massa m fäst. Systemet släpps från vila i figurläget då stången är horisontell. Stången passerar därefter det vertikala läget. Bestäm i detta senare läge

a) farten hos partikeln, (2 poäng)

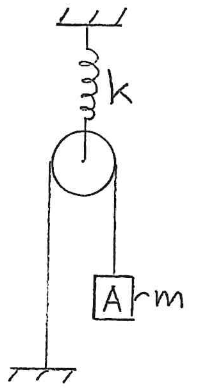
b) vertikala kraften i O verkande på balken. (1 poäng)

6.



En horisontell stång stöder mot en lika tung cylinder enligt figur med given vinkel α. Friktionskoefficienten är lika stor i A och B. Hur stor måste denna vara för möjlig jämvikt? (5 poäng)

7.

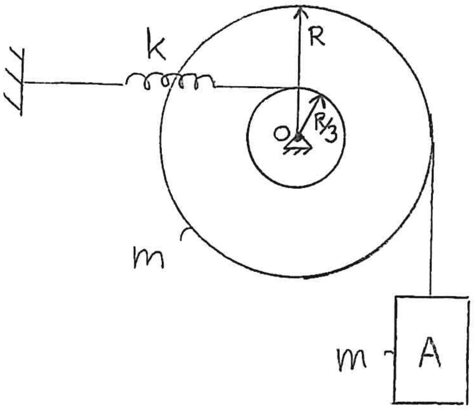


Systemet i figuren består av en lätt trissa, en fjäder med styvhet k samt en kropp A med massa m.

a) Bestäm rörelseekvationen (differentialekvationen) för kropp A. (3 poäng)

b) Bestäm lösningen till rörelseekvationen som funktion av tiden t om systemet släpps från vila vid $t = 0$ med fjädern utdragen sträckan mg/k från ospänt läge. (2 poäng)

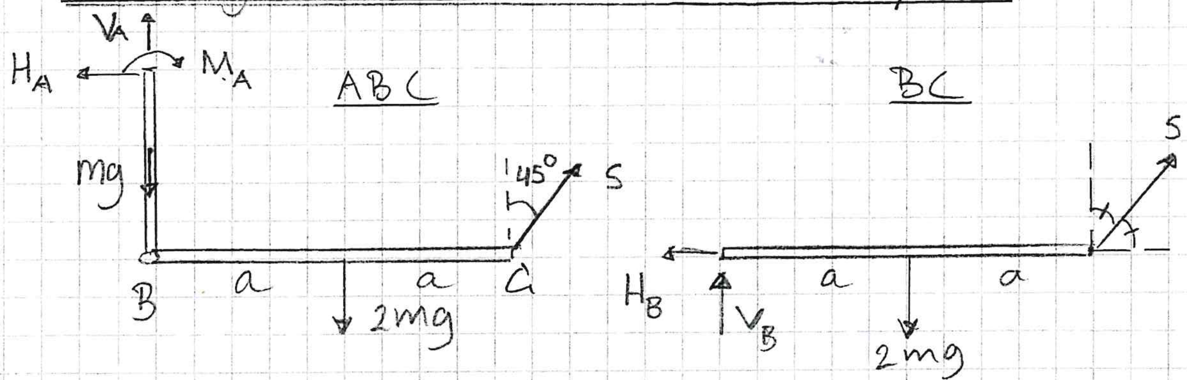
8.



Ett hjul med massa m och ytterradie R kan rotera utan friktion kring O, masströghetsmoment $I_O = mR^2$. En kropp A med massa m fäster i en lina lindad kring ytterradien. Kring hjulets inre axel, radie $R/3$, är en fjäder fäst med styvhet $k = 10mg/R$. Från början hålls kropp A (och hjulet) stilla i det läge då fjädern har dragits ut sträckan $R/3$ från ospänd längd. Om kropp A därefter plötsligt släpps, vad är krafterna i O verkande på hjulet precis vid påbörjad rörelse (omedelbart efter släpp)? (5 poäng)

Lösningar Mekanik 200826 SB; TD/I

① a/



b/ BC: Tag moment kring led B:

$\overset{\curvearrowright}{B}: 2mga - S/\sqrt{2} \cdot 2a = 0 \Rightarrow S = \sqrt{2}\,mg$ //

c/ ABC: Tag moment kring punkt A:

$\overset{\curvearrowright}{A}: M_A + 2mg\,a - S/\sqrt{2} \cdot 2a - S/\sqrt{2} \cdot a = 0$

$\Rightarrow M_A = mga$ // ur S enl. b/

---

② a/ $\mathbb{F} = F\,e_{CD}$; $e_{CD} = \dfrac{\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{CD}|} = \dfrac{(-2a,-2a,a)}{\sqrt{4a^2+4a^2+a^2}} = \dfrac{(-2,-2,1)}{3}$

Så, $\mathbb{F} = \dfrac{F}{3}(-2,-2,1)$ //

b/ $\Sigma \mathbb{M}_o = \mathbb{M} + \mathbb{r} \times \mathbb{F}$ (1) $\mathbb{M} = (0,0,Fa)$ (2)

Med $\mathbb{r} = \overrightarrow{OC} = (2a, 2a, a)$ och $\mathbb{F}$ enl. a/ $\Rightarrow$

$$\mathbb{r} \times \mathbb{F} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ 2a & 2a & a \\ -\frac{2F}{3} & -\frac{2F}{3} & \frac{F}{3} \end{vmatrix} = \frac{Fa}{3}(4,-4,0) \quad (3)$$

(2) och (3) i (1) $\Rightarrow \Sigma \mathbb{M}_o = \dfrac{Fa}{3}(4,-4,3)$ //

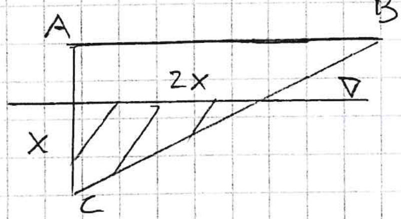
3,5B $\quad P = \bar{p} A \quad (1)$

a/ Här är $A = a \cdot 2a/2 = a^2 \quad (2)$

$\bar{p} = \rho_v g \bar{z} = \left[\bar{z} = \frac{a}{3} \text{ för tp läge från ytan} \right]$

$= \rho_v g \, a/3 \quad (3)$. $P_a = \rho_v g \, a^3/3$ ur (1) – (3).

b/ Vid medsänkning har vi:



Så, $A = x \cdot 2x/2 = x^2 \quad (4)$

$\bar{p} = \rho_v g \, x/3 \quad (5)$. Med (4) och (5) i (1) $\Rightarrow$

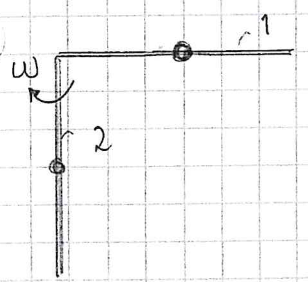
$P_b = \rho_v g x^3/3 \quad (6)$ Då $P_b = P_a/2$, d.v.s. ur (6) och a/

$\rightarrow \rho_v g x^3/3 = \rho_v g a^3/3 \cdot 1/2 \Rightarrow x^3 = a^3/2 \Rightarrow x = a/2^{1/3} \approx 0{,}8a$ //

---

5 $\quad T_1 + V_1 + \underbrace{W^{(ik)}}_{=0} = T_2 + V_2 \quad (1)$

a/



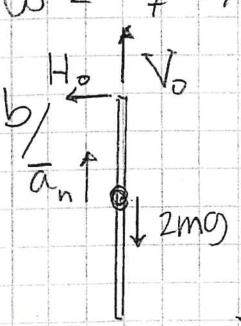
$$\left. \begin{array}{ll} T_1 = 0 & V_1 = 0 \quad \text{(noll-läge)}. \\ T_2 = \frac{1}{2} I_o \omega^2 & V_2 = -2mgL \end{array} \right\} (2)$$

$I_o = I_{o,2L} + I_{o,p} = \frac{1}{3} m (2L)^2 + mL^2 = \frac{7}{3} mL^2 \quad (3)$

(2) och (3) i (1) $\Rightarrow 0 = \frac{7}{6} mL^2 \omega^2 - 2mgL \Rightarrow$

$\omega^2 = \frac{12}{7} g/L \quad (4)$. $V_p = L\omega = \sqrt{12/7 \, gL}$ // ur (4)

b/



"$\Sigma F_n = m\bar{a}_n$" $\uparrow$: $V_o - 2mg = 2m\bar{a}_n \quad (5)$

Med $\bar{a}_n = L\omega^2$ och (4) så ger (5)

$V_o = 2mg + 24/7 \, mg = 38/7 \, mg$ //

["$\Sigma F_s = m\bar{a}_s$" $\leftarrow$: $H_o = 2m\bar{a}_s = 2mL\dot{\omega} = 0$ då $\dot{\omega} = 0$]

4,5B
3,TD

Vi har $v(s) = V_0 e^{-ks}$ (1)

Med $v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow dt = \frac{ds}{v(s)}$ (2)

Insatt (1) i (2), med $s=0$ då $t=0$:

$$\int_0^t dt = \int_0^s \frac{e^{ks}}{V_0} ds \Leftrightarrow t = \left[\frac{1}{kV_0} e^{ks}\right]_0^s, \text{ d.v.s.}$$

$t(s) = \frac{1}{kV_0}(e^{ks} - 1)$. Så, $e^{ks} = t \cdot kV_0 + 1$

$\Rightarrow ks = \ln(tkV_0 + 1) \Rightarrow s(t) = \frac{1}{k}\ln(1 + tkV_0)$ //

4,TD a) Dragkraften på fjädern är $2mg$.

Fjädern förlängs därför $\Delta = 2mg/k$ //

b) Använd $T_1 + V_1 + \underbrace{W^{(ik)}}_{=0} = T_2 + V_2$ (1)

Startläge: $T_1 = 0$; $V_1 = \frac{1}{2}k\Delta^2 = 2(mg)^2/k$

Sökt läge: $T_2 = \frac{1}{2}mv^2$; $V_2 = \frac{1}{2}k(\Delta - h)^2 + mgh$ (2)

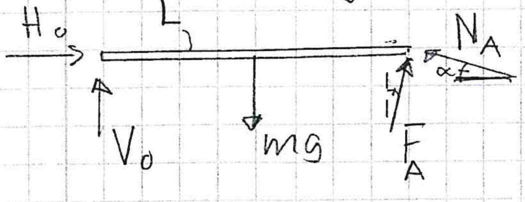
Med $h = mg/k$ fås

$V_2 = \frac{1}{2}k(mg/k)^2 + mg \cdot mg/k = \frac{3}{2}(mg)^2/k$ (3)

(2) med (3) in i (1) $\Rightarrow$

$2(mg)^2/k = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{2}(mg)^2/k \Rightarrow v = \sqrt{\frac{m}{k}}\, g$ //

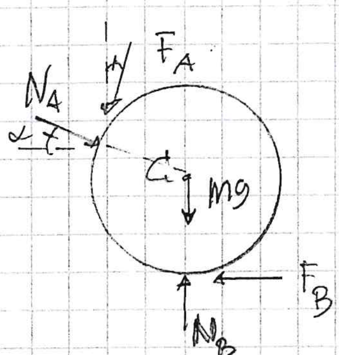
(6) Frilägg stång OA:



$$\overset{\curvearrowleft}{O}: mg\frac{L}{2} - F_A\cos\alpha \cdot L - N_A \sin\alpha \cdot L = 0 \quad (1)$$

(L och m okänd)

Frilägg cylindern:



$$\overset{\curvearrowleft}{C}: F_A \cdot R - F_B R = 0 \Rightarrow F_A = F_B \quad (2)$$

$$\rightarrow: N_A\cos\alpha - F_A\sin\alpha - F_B = 0 \quad (3)$$

$$\uparrow: N_B - mg - F_A\cos\alpha - N_A\sin\alpha = 0 \quad (4)$$

Vi vet ej var glidning riskerar att ske.

$$F_A/N_A \leq \mu \quad \text{och} \quad F_B/N_B \leq \mu \quad (*)$$

Ekv. (3) $\Rightarrow N_A\cos\alpha = F_A(1+\sin\alpha)$ m.h.a. (2) $\Rightarrow$

$F_A/N_A = \cos\alpha/(1+\sin\alpha) \leq \mu$ (5). F_B/N_B ?

Tag t.ex. Ekv. (4)$\times$L minus ekv. (1) $\Rightarrow$

$$N_B L - mgL - mg\,L/2 = 0 \Rightarrow N_B = \tfrac{3}{2}mg \quad (6)$$

Ekv. (1) ger $mg/2 = F_A\cos\alpha + N_A\sin\alpha = $ [insatt $N_A = F_A(1+\sin\alpha)/\cos\alpha$ ur (5)] $= F_A\left(\cos\alpha + (1+\sin\alpha)\tan\alpha\right)$

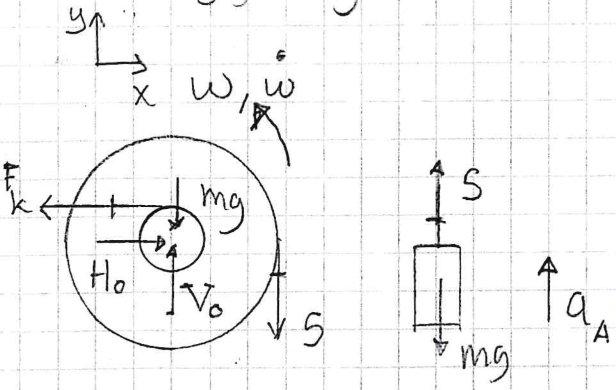
$\Rightarrow \frac{mg}{2}\cdot\cos\alpha = F_A(1+\sin\alpha)$ m.h.a. "trig. ettan". (7)

F_B $(=F_A$ ur (2)$) = mg\cos\alpha/2(1+\sin\alpha)$ (8) [ur (7)]

$F_B/N_B = \cos\alpha/3(1+\sin\alpha) \leq \mu$ (9) ur (6) & (8).

Ekv. (5) & (9) $\Rightarrow \mu_{min} = \cos\alpha/(1+\sin\alpha)$ //

(8) Frilägg cylinder och A separat:



Påbörjad rörelse uppåt i det sökta läget.

Cylinder

$\rightarrow$: $H_0 - F_k = m\bar{a}_x = 0$ (1)

$\uparrow$: $V_0 - S - mg = m\bar{a}_y = 0$ (2)

(Punkt O ej rörelse)

$\circlearrowleft O$: $F_k \cdot R/3 - SR = I_0 \dot{\omega}$ (3)

Kropp A

$\uparrow$: $S - mg = ma_A$ (4),

Vi har $F_k = kR/3 = [k = 10mg/R] = 10mg/3$ (5)

$a_A = R\dot{\omega}$ i (4) $\Rightarrow S = mg + mR\dot{\omega}$ (6)

(1) m.h.a. (5) $\Rightarrow H_0 = 10mg/3$ //

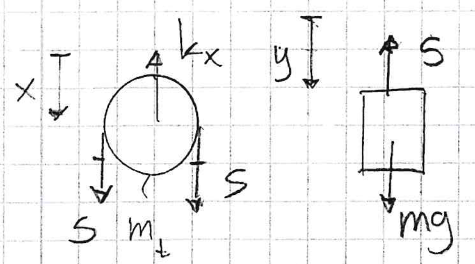
Med $I_0 = mR^2$ i (3) ger m.h.a. (6)

$F_k R/3 - mgR - mR^2\dot{\omega} = mR^2\dot{\omega} \Rightarrow \dot{\omega} = \frac{1}{18} g/R$ (7).

(6) $\Rightarrow S = 19/18\, mg$ varvid ekv. (2) ger

$V_0 = S + mg = 37/18\, mg$ //

7, TD Frilägg trissa och massa separat:

a) 

Här mäts x och y från läget med ospänd fjäder.

Trissa $\downarrow$: $2S - kx = m_t \cdot \ddot{x} = 0 \quad (m_t = 0)$

$\Rightarrow S = kx/2 \quad (1)$

Massa $\downarrow$: $mg - S = m\ddot{y} \Leftrightarrow mg - kx/2 = m\ddot{y} \quad (2)$

ur ekv. (1).

Kinematik: Fjäder förlängs x ⇒ massa flyttas

$\underline{y = 2x}$. Insatt att $x/2 = y/4$ i (2) ⇒

$mg - ky/4 = m\ddot{y} \Rightarrow \ddot{y} + \underbrace{\frac{k}{4m}}_{\omega^2} y = g \quad (3)$ //

[Vi ser från (3) att $y_{jmv} = g/\omega^2 = 4mg/k$ ur $\ddot{y}_{jmv} = 0$]

b) Vid $t=0$ har vi $x = mg/k \Rightarrow y = 2mg/k$.

Lösning till (3): $y(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t) + g/\omega^2 \quad (4)$

$y(0) = 2mg/k \Rightarrow B = -2mg/k$; $\dot{y}(0) = 0 \Rightarrow A = 0$

Insatt i (4) ⇒ $y(t) = 2mg/k\,[2 - \cos(\omega t)]$ //