Tentamen i TME010 Mekanik TD/I, 2020-04-08 kl. 8.30–12.30
Jourhavande: Peter Folkow ankn. 1521, tel. 0729-617241
Lösningar anslås på M2, avd. Dynamik, och på kurshemsidan senast den 9/4.
Preliminärt rättningsresultat anslås på hemsidan senast den 24/4.
Rättningsgranskning och utlämning av tentor Se kommande info på kurshemsidan.

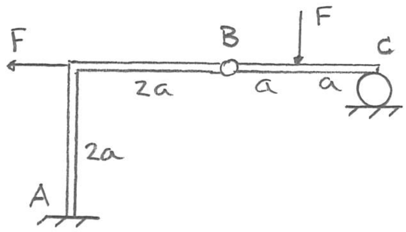
Tillåtna hjälpmedel: Se Chalmers generella regler vid hemtentamen.

Betygsgränser: Uppgift 1-5 ger maximalt 3 poäng vardera. Uppgift 6-8 ger maximalt 5 poäng vardera. Betyget på tentamen ges enligt följande tabell:

		Poäng på uppgift 1–5 (inkl. bonuspoäng)						
		0–7	8	9	10	11	12	13–18
Poäng på uppgift 6–8	0–4	U	U	U	U	U	3	3
	5–8	U	U	U	U	3	3	4
	9	U	U	U	3	3	4	4
	10–11	U	U	3	3	4	4	5
	12–15	U	3	3	4	4	5	5

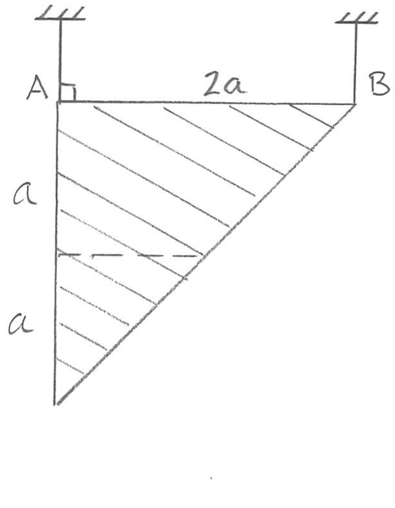
UPPSTÄLLDA EKVATIONER SKALL MOTIVERAS.

1.



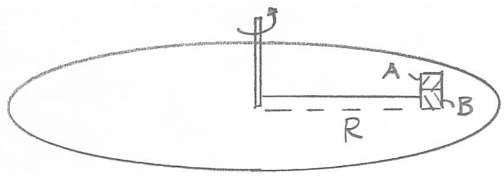
En böjd balk AB, längd $4a$, är fast inspänd i A och förbunden med en horisontell balk BC, längd $2a$, via leden i B. Två krafter F verkar på strukturen enligt figuren. Systemet är masslöst och i jämvikt.
Bestäm samtliga stödkrafter och stödmoment verkande på systemet i A och C. (3 poäng)

2.



En homogen triangulär skiva med massa m har kantlängder $2a$. Skivan hänger i jämvikt med vertikala linor i A och B.
a) Bestäm linkrafterna. (1 poäng)
b) Om skivans spets kapas enligt den streckade linjen, vad blir då krafterna i linorna?
(2 poäng)

3.



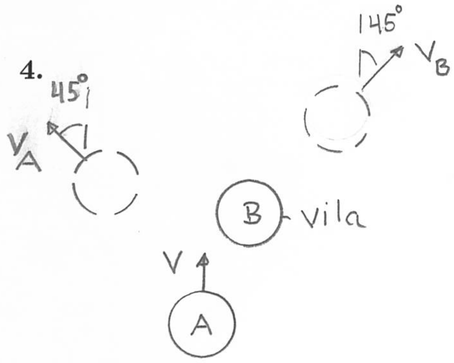
På en roterande skiva (konstant vinkelhastighet) är på radien R två partiklar, A och B med massa m vardera, placerade ovanpå varandra. I kropp B är en horisontell lina fästad. Mellan A och B råder friktion μ_1, medan mellan B och skivan råder friktion μ_2 ($\mu_1 \geq \mu_2$).

a) Bestäm skivans vinkelhastighet om glidning mellan A och B precis inte inträffar. (1 poäng)

b) Bestäm för denna vinkelhastighet den *minsta* möjliga linkraften som skulle kunna råda utan glidning. (1 poäng)

c) Bestäm för denna vinkelhastighet den *största* möjliga linkraften som skulle kunna råda utan glidning. (1 poäng)

4.

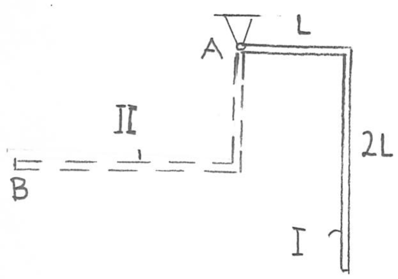


En kropp A, massa m, glider på ett friktionsfritt underlag med farten v. Kroppen krockar därefter med en vilande kropp B, massa $2m$, varefter A och B rör sig enligt figuren.

a) Bestäm farten hos kropp A (v_A) och hos kropp B (v_B) efter stöten. (2 poäng)

b) Hur stor mekanisk energi försvinner i stötögonblicket? (1 poäng)

5.

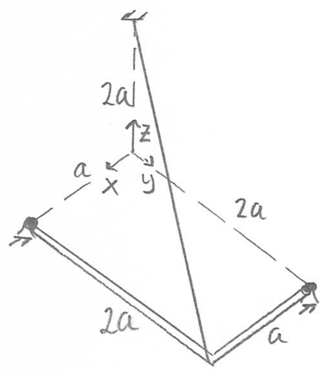


Figuren visar en böjd balk, massa m och längd $3L$, som kan rotera i ett vertikalplan kring friktionsfria leden A. Kroppen släpps från vila då balkdelen med längd L är horisontell (figur I).

a) Bestäm kroppens masströghetsmoment med avseende på A. (1 poäng)

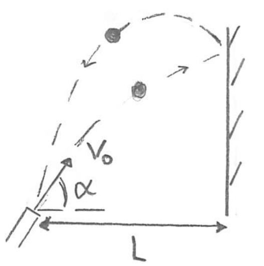
b) Bestäm farten hos ändpunkten B då kroppen passerar det andra figurläget (figur II). (2 poäng)

6.



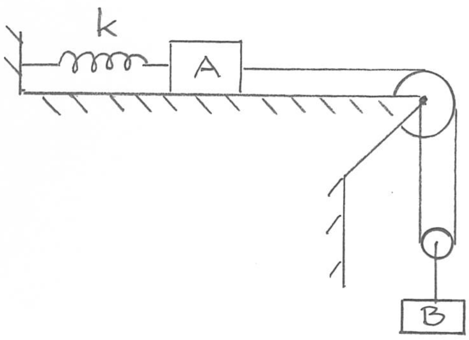
En L-formad balk, massa m, hålls horisontell genom två kulleds-stöd och en lina enligt figur. Bestäm linkraften.

7.



En leksakskanon skjuter iväg en boll med farten v_0 och vinkel $\alpha = 60°$. Bollen studsar mot en glatt vägg, avstånd L, och hamnar därefter återigen i kanonens mynning. Vilken fart har då kulan vid återkomsten? (5 poäng)

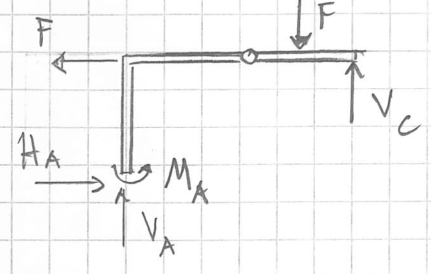
8.



Systemet i figuren består av två kroppar A och B med massor m och $3m$ förenade via lätta linor och trissor. En fjäder k fäster i A enligt figur. Det råder friktion, μ, mellan A och underlaget. Systemet släpps från vila då fjädern är ospänd. Bestäm A:s största hastighet därefter (påbörjad rörelse förutsätts).
(5 poäng)

Lösningar Mek TD/I 20-04-08

① **Frilägg ABC**

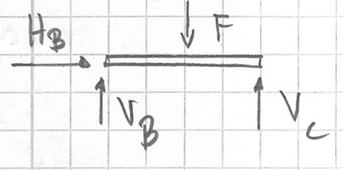


$\rightarrow: \; H_A - F = 0 \Rightarrow H_A = F$ //

$\uparrow: \; V_A + V_C - F = 0 \quad (1)$

$\curvearrowleft A: \; M_A + V_C \cdot 4a - F \cdot 3a + F\,2a = 0 \quad (2)$

Frilägg delbalk, t.ex. BC:

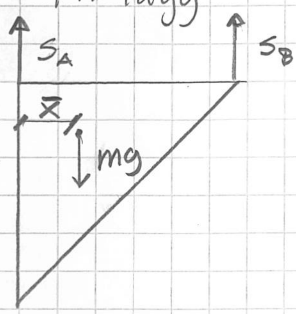


$\curvearrowleft B: \; V_C \cdot 2a - F\,a = 0 \Rightarrow V_C = F/2$ //

$(1) \Rightarrow V_A = F/2$ // $\quad (2) \Rightarrow M_A = -Fa$ //

---

② a/ Frilägg



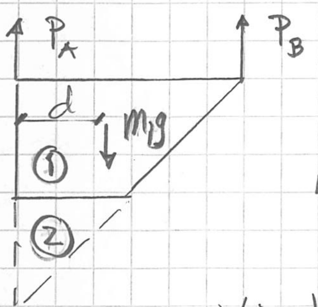
$\uparrow: \; S_A + S_B - mg = 0 \quad (1)$

$\curvearrowleft A: \; S_B \cdot 2a - mg\,\bar{x} = 0 \quad (2)$

$\bar{x} = 2a/3$ enl. FS s.16 fall 2.

$(2) \Rightarrow S_B = mg/3$ // $\quad (1) \Rightarrow S_A = 2mg/3$ //

b/



$\uparrow: \; P_A + P_B - m_1 g = 0 \quad (3)$

$\curvearrowleft A: \; P_B \cdot 2a - m_1 g\,d = 0 \quad (4)$

Vi behöver m_1 och d.

m_1 prop. mot arean, så om $m = \sigma A$

så är $m_1 = \sigma A_1$ (där $A = A_1 + A_2$).

$A = 4a^2/2 = 2a^2$; $\quad A_1 = A - A_2 = 2a^2 - a^2/2 = 3a^2/2$;

[σ är massa/ytenhet]

Därmed fås $m_1 = 3/4\ m$ (5).

Tyngdpunkt fås enligt $[d = \bar{x}_1]$

$$\bar{x}_1 = \frac{m\bar{x} - m_2\bar{x}_2}{\underbrace{m - m_2}_{m_1}} \quad (6)$$

$m_2 = \sigma A_2 = \sigma a^2/2$; $\bar{x}_2 = a/3$ [FS s. 16 fall 2].

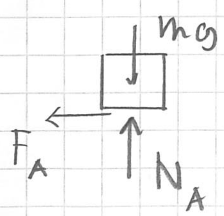
(6) ger $\bar{x}_1 = \dfrac{\sigma 2a^2 \cdot 2a/3 - \sigma a^2/2 \cdot a/3}{\sigma 3a^2/2} = \dfrac{7}{9}a$ (7)

$(4) \Rightarrow P_B \cdot 2a - \frac{3}{4} mg \frac{7}{9} a = 0 \Rightarrow P_B = \frac{7}{24} mg$ //

$(3) \rightarrow P_A = \frac{11}{24} mg$ // $\left[S_B = \frac{8}{24} mg \text{ och } S_A = \frac{16}{24} mg \right]$

---

(3) a) Frilägg A:



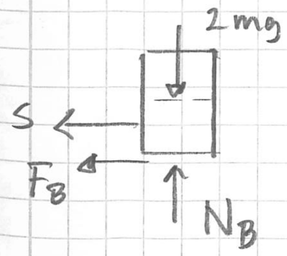
$\uparrow: N_A - mg = 0 \Rightarrow N_A = mg$ (1)

$\leftarrow: F_A = ma_n = mR\omega^2$ (2)

Fullt utvecklad friktion: $F_A = \mu_1 N_A$.

Ekv. (1) i (2) $\Rightarrow \mu_1 mg = mR\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\mu_1 g/R}$ //

b) Frilägg AB (alt bara B):



$\uparrow: N_B - 2mg = 0 \Rightarrow N_B = 2mg$ (3)

$\leftarrow: S + F_B = 2m a_n = 2mR\omega^2$ (4)

$|F_B| \leq \mu_2 N_B = \mu_2 2mg$

Alltså $F_{B,max} = \mu_2 2mg$; $F_{B,min} = -\mu_2 2mg$ (5)

Ekv. (4), med ω enl. a/ ger

$$S = \mu_1 2mg - F_B \qquad (6).$$

b/ S_{min} fås ur (6) med $F_{B,max}$ ur (5)

så $S_{min} = 2mg(\mu_1 - \mu_2)$ // [där $\mu_1 \geq \mu_2$ enl. uppg.]

[Detta är S för att förhindra att AB glider utåt]

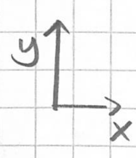
c/ S_{max} fås ur (6) med $F_{B,min}$ ur (5)

så $S_{max} = 2mg(\mu_1 + \mu_2)$ //

[Detta är S som är på gränsen att AB dras inåt, t.ex. om linan är spänt elastiskt band]

---

(4) Utnyttja att systemets rörelsemängd $\mathbf{p}$ bevaras vid stöt (stötkrafter inre krafter på system A + B).



a/

Före: $\quad p_{f,x} = 0 \qquad p_{f,y} = mv \qquad (1)$

Efter:

$$\left.\begin{aligned} p_{e,x} &= 2mv_B/\sqrt{2} - mv_A/\sqrt{2} \\ p_{e,y} &= 2mv_B/\sqrt{2} + mv_A/\sqrt{2} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

$$\therefore \quad p_{f,x} = p_{e,x} \quad \text{och} \quad p_{f,y} = p_{e,y} \qquad (3)$$

I x-riktning av (3) fås m.h.a. (1) & (2)

$V_A = 2\,V_B$ (4)

I y-riktning av (3) fås m.h.a. (1) och (2)

$V = 2V_B/\sqrt{2} + V_A/\sqrt{2} = \text{ins. } (4) = 4V_B/\sqrt{2}$

$\Rightarrow V_B = V/(2\sqrt{2})$ // ; $(4) \Rightarrow V_A = V/\sqrt{2}$ //

b/ Energi ekv. $T_1 + \bar{V}_1 + W^{(ik)} = T_2 + \bar{V}_2$ (5)

Sätt $\bar{V}_1 = \bar{V}_2 = 0$ (ev. lägesenergi).

Före: $T_1 = \frac{1}{2} m v^2$ (B i vila).

Efter: $T_2 = \frac{1}{2} m V_A^2 + \frac{1}{2}\, 2m\, V_B^2 = \text{ins. ur a/}$

$= \frac{1}{2} m (V^2/2) + \frac{1}{2}\, 2m\,(V^2/8) = \frac{1}{2} m (3V^2/4)$

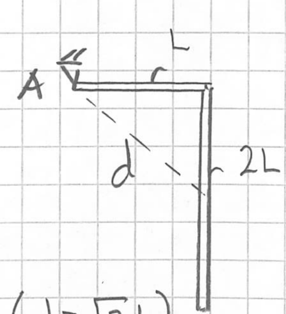
$(5) \Rightarrow W^{(ik)} = T_2 - T_1 = -\frac{1}{2} m (v^2/4) = -mv^2/8$ //

5

a/ $I_A = (\text{kallat } I) = I_L + I_{2L}$ (1)

där $m_L = m/3$ och $m_{2L} = 2m/3$.

Studera t.ex. figur läge I :



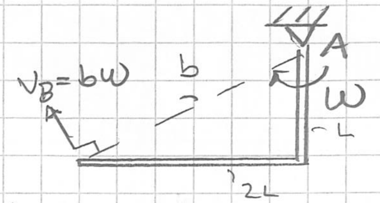
$I_L = \frac{1}{3} m_L \cdot L^2 = \frac{1}{9} mL^2$ [FS s.16 fall 4]

$I_{2L} = \bar{I}_{2L} + m_{2L} d^2 = \frac{1}{12} m_{2L} (2L)^2 + m_{2L}\, 2L^2$ $(d = \sqrt{2}L)$

$= \frac{7}{3} m_{2L} L^2 = \frac{14}{9} mL^2$

$(1) \Rightarrow I_A = \frac{15}{9} mL^2 = \frac{5}{3} mL^2$ //

b/ I figurläge II:



$v_B = b\omega$ (2) där $b = \sqrt{5}\,L$.

ω ur energibevarande: $T_I + V_I = T_{II} + V_{II}$ (3)

$T_I = 0$ (vila) $V_I = \underbrace{m_L g \cdot 0}_{V_{I,L}} - \underbrace{m_{2L} g \cdot L}_{V_{I,2L}} = -\frac{2}{3} mgL$

(Noll-nivå vid A).

$T_{II} = \frac{1}{2} I_A \omega^2 = \frac{5}{6} mL^2\omega^2$ ur a/.

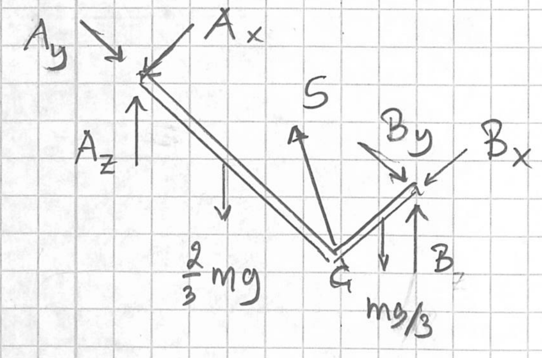
$V_2 = \underbrace{-m_L g \frac{L}{2}}_{V_{II,L}} \underbrace{- m_2 g L}_{V_{II,2L}} = -\frac{5}{6} mgL$

$(3) \Rightarrow -\frac{2}{3} mgL = \frac{5}{6} mL^2\omega^2 - \frac{5}{6} mgL \Rightarrow \omega = \sqrt{g/5L}$

$(2) \Rightarrow V_B = \sqrt{gL}$ //

---

(6) Frilägg balken



Vi har 7 obekanta, men kan etablera bara 6 ekv.

Bästa metod är smart val av momentjämvikt.

Tag $\Sigma M_{AB} = 0$, då varken krafter i A eller B kommer att bidra.

Vi får $\Sigma M_{AB} = \Sigma \mathbf{M}_A \cdot \mathbf{e}_{AB}$ $(= \Sigma \mathbf{M}_B \cdot \mathbf{e}_{AB})$. (1)

För $\Sigma \mathbb{M}_A$ räcker det att studera $\Sigma \mathbb{M}_{A,S}$ samt $\mathbb{M}_{A,mg}$ då B-kraftens bidrag kommer försvinna i nästa skede enligt (1).

$\underline{\mathbb{M}_{A,mg}}$:

Vi ser direkt att [varje delbalk för sig]

$$\mathbb{M}_{A,mg} = \left(-\tfrac{2}{3}mg \cdot a, 0, 0\right) + \left(-\tfrac{1}{3}mg\, 2a, -\tfrac{1}{3}mg \tfrac{a}{2}, 0\right) =$$

$$= mga\left(-4/3, -1/6, 0\right) \qquad (2)$$

$\underline{\mathbb{M}_{A,S}}$:

Här är $\mathbb{M}_{A,S} = \mathbb{r} \times \mathbb{S}$ (3) lämpligast.

$\mathbb{r} = \overrightarrow{AC} = 2a\,\mathbb{e}_y$; $\mathbb{S} = S\,\mathbb{e}_{CO}$ (4) där O är linans fästpunkt i väggen.

$$\mathbb{e}_{CO} = \frac{\overrightarrow{CO}}{|\overrightarrow{CO}|} = \frac{(-a, -2a, 2a)}{3a} = \frac{(-1, -2, 2)}{3} \qquad (5)$$

Ekv. (3) - (5) $\Rightarrow$

$$\mathbb{M}_{A,S} = \begin{vmatrix} \mathbb{e}_x & \mathbb{e}_y & \mathbb{e}_z \\ 0 & 2a & 0 \\ S_x & S_y & S_z \end{vmatrix} = (2aS_z, 0, -2aS_x) =$$

$$= \frac{2aS}{3}(2, 0, 1) \qquad (6)$$

För (2) och (6) i (1) så

behövs $e_{AB} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \dfrac{(-a, 2a, 0)}{\sqrt{5}\,a} = \dfrac{(-1, 2, 0)}{\sqrt{5}}$ (7)

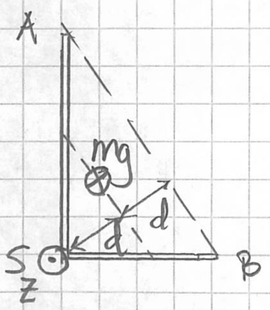
$M_{AB,mg} = \mathbb{M}_{A,mg} \cdot e_{AB} =$ ins. (2) och (7) $=$

$mga(-4/3, -1/6, 0) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}(-1, 2, 0) = mga/\sqrt{5}$ (8)

$M_{AB,S} = \mathbb{M}_{A,S} \cdot e_{AB} =$ ins. (6) och (7) $=$

$\dfrac{2aS}{3}(2, 0, 1) \cdot \dfrac{1}{\sqrt{5}}(-1, 2, 0) = -\dfrac{4}{3\sqrt{5}} Sa$ (9)

[(8) och (9) kan ses ur enkel figur:



Då $d = a/\sqrt{5}$ så blir

$M_{AB,mg} = mg \cdot d$ enl. (8).

$M_{AB,S} = -S_z \cdot 2d$ enl. (9)

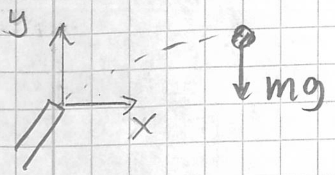
med $S_z = S \cdot 2/3$ ur (4) o (5)]

Ekv (1) med $\Sigma M_{AB} = M_{AB,mg} + M_{AB,S} = 0$

$= mga/\sqrt{5} - 4Sa/(3\sqrt{5}) = 0 \Rightarrow$

$S = 3mg/4$ //

7) Frilägg partikeln, ställ upp NII.



$\uparrow$: $-mg = ma_y \Rightarrow a_y = -g \Rightarrow$ int.

$\Rightarrow V_y = -g t + V_{0,y}$ (1) $\Rightarrow$ int.

$\Rightarrow S_y = -g t^2/2 + V_{0,y} t + C_1$ (2)

$\rightarrow$: $0 = ma_x \Rightarrow a_x = 0 \Rightarrow$ int. $\Rightarrow V_x = V_{0,x}$ (3)

$\Rightarrow$ int. $\Rightarrow S_x = V_{0,x} t + C_2$ (4)

Vi har $V_{0,x} = V_0 \cos\alpha = V_0/2$ samt $V_{0,y} = V_0 \sin\alpha = V_0\sqrt{3}/2$.

Före studs: Sätt $t=0$ vid utskjut.

Tid t_1 att nå väggen fås ur (4) $[C_2=0]$

$$L = V_0/2 \cdot t_1 \Rightarrow t_1 = 2L/V_0 \quad (5)$$

Höjden vid studs mot vägg fås ur (2) $[C_1=0]$

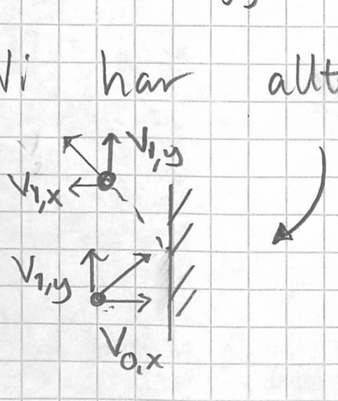
$$H = -g t_1^2/2 + V_0\sqrt{3}/2 \cdot t_1 = \sqrt{3}L - 2gL^2/V_0^2 \quad (6)$$

Farten i y-led precis före studs ur (1)

$$V_{1,y} = -g t_1 + V_0\sqrt{3}/2 = V_0\sqrt{3}/2 - g\, 2L/V_0 \quad (7)$$

Glatt vägg $\Rightarrow V_{1,y}$ bevaras vid stöten

Vi har alltså,



Låt nu $t=0$ vid stöt och koord. syst. (x, y) i stötpunkt.

Vi kan revidera (1) − (4)

och får då

Efter studs:

$V_y = -gt + V_{1,y} \quad (1^*)$

$S_y = -gt^2/2 + V_{1,y}t \quad (2^*) \quad [C_1^* = 0]$

$V_x = V_{1,x} \quad (3^*) \quad$ [okänd]

$S_x = V_{1,x}t \quad (4^*) \quad [C_2^* = 0]$

Mha ekv (2^*) fås [Tid t_2 tillbaka]

$$-H = -gt_2^2/2 + V_{1,y}t_2 \Rightarrow$$

$$t_2^2 - \frac{2V_{1,y}}{g}t_2 - \frac{2H}{g} = 0 \Rightarrow$$

$$t_2 = \frac{V_{1,y}}{g} (\pm) \Bigg[\underbrace{\frac{V_{1,y}^2}{g^2} + \frac{2H}{g}}_{\frac{3}{4}V_0^2/g^2} \Bigg]^{1/2} = \text{ins. } (7) \text{ och } (6)$$

$$= \sqrt{3}\, V_0/g - 2L/V_0 \quad (8)$$

Ekv. (4^*) ger då

$$L = V_{1,x}t_2 \Rightarrow \underline{\underline{V_{1,x}}} = L/t_2 = \text{ins. } (8) =$$

$$= \frac{V_0 g L}{\sqrt{3}\, V_0^2 - 2gL} \quad //$$

Ur ekv (1^*) fås

$$\underline{\underline{V_{2,y}}} = -gt_2 + V_{1,y} = \text{ins. } (8) \text{ och } (7) =$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2}V_0 \quad //$$

Totala farten $V_2 = \sqrt{V_{1,x}^2 + V_{2,y}^2}$

(8) Uppgiften löses enklast med energibetraktelse [svängningsekv. går också, se nedan]

$$T_1 + V_1 + W^{(ik)} = T_2 + V_2 \quad (1)$$

$T_1 = 0$ (vila). $V_1 = 0$ (resp. nolläge).

$$\left.\begin{aligned} T_2 &= \tfrac{1}{2} m v_A^2 + \tfrac{1}{2} 3m v_B^2 \\ V_2 &= \tfrac{1}{2} k x_A^2 - 3mg y_B \\ W^{(ik)} &= -F_A x_A = -\mu m g x_A \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Störst v_A fås före vändläget p.g.a friktionens inverkan, så behöver bara studera då A rör sig åt höger.

Kinematik ger $x_A = 2y_B \Rightarrow v_A = 2v_B$

(2) ger då $T_2 = \frac{1}{2} m v_A^2 + \frac{1}{2} 3m (v_A/2)^2 =$

$= \frac{7}{8} m v_A^2 \quad (3)$; $V_2 = \frac{1}{2} k x_A^2 - \frac{3}{2} m g x_A \quad (4)$

(2) - (4) i (1) $\Rightarrow$

$$-\mu m g x_A = \frac{7}{8} m v_A^2 + \frac{1}{2} k x_A^2 - \frac{3}{2} m g x_A \Rightarrow$$

$$\frac{7}{4} m v_A^2 = \underbrace{(3-2\mu) m g x_A - k x_A^2}_{f(x_A)} \quad (5)$$

v_A max $\Rightarrow v_A^2$ max. Vilket x_A ger max i (5)?

Vi vet att $f(x_A)$ har extrempunkt $f'(x_A) = 0$.

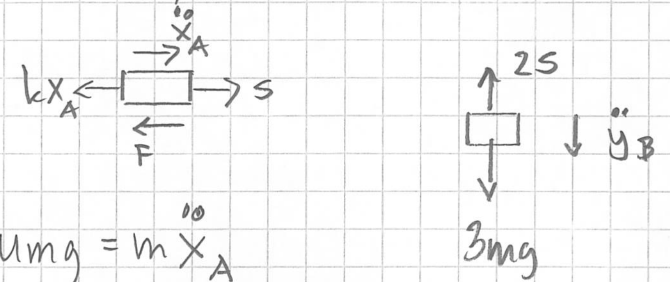
$$f'(x_A) = (3-2\mu)mg - 2k x_A = 0$$

$$\Rightarrow x_A = (3-2\mu)mg / (2k).$$

Så $f(x_A) = (3-2\mu)^2 m^2 g^2 / 4k$ så

(5) ger $V_{A,max} = \sqrt{\dfrac{m}{7k}}\,(3-2\mu)g$ //

[Svängning ur



$A \rightarrow: \; s - kx_A - \mu mg = m\ddot{x}_A$

$B \downarrow: \; 3mg - 2s = 3m\ddot{y}_B = \dfrac{3}{2}m\ddot{x}_A \qquad (\ddot{y}_B = \ddot{x}_A/2)$

Eliminera s $\Rightarrow$

$$\ddot{x}_A + \frac{4}{7}\frac{k}{m}x_A = \frac{2}{7}(3-2\mu)g \qquad (*)$$

Notera att (*) gäller då A åt höger,

så vi studerar bara denna del av svängn.

$x_A = x_{A,hom} + x_{A,part} = \qquad [\omega^2 = \frac{4}{7}k/m]$

$A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t) + \underbrace{\dfrac{mg}{k}(3-2\mu)/2}_{x_{part}}$

$x_A(0) = 0 \Rightarrow B = -x_{part}. \qquad \dot{x}_A(0) = 0 \Rightarrow A = 0$

$x_A(t) = x_{part}\,[1 - \cos(\omega t)] \Rightarrow \dot{x}_A = x_{part}\,\omega\sin(\omega t)$

Så $\dot{x}_{A,max}$ [då $\sin(\omega t) = 1$] $= x_{part}\cdot\omega =$

$= \sqrt{\dfrac{m}{7k}}\,(3-2\mu)g$ //]