Tentamen i TME010 Mekanik TD/I, 2020-01-16 kl. 8.30–12.30

Jourhavande: Peter Folkow ankn. 1521, tel. 0729-617241 (salarna besöks 9.45 och 11.15)
Lösningar anslås på M2, avd. Dynamik, och på kurshemsidan senast den 17/1.
Preliminärt rättningsresultat anslås på M2 senast den 4/2.
Rättningsgranskning och utlämning av tentor sker på M2, avd. Dynamik, 5/2 samt 6/2 kl. 12.00–13.00.

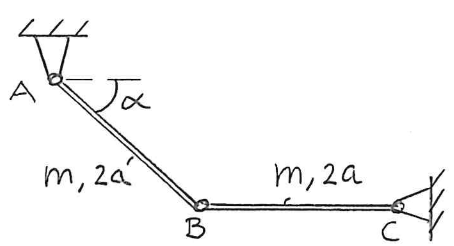
Tillåtna hjälpmedel: Formelsamling i mekanik av M.M. Japp (delas ut vid tentan),
Matematiska handböcker (t ex Beta) eller utdrag därur,
Chalmersgodkänd räknare är tillåten.

Betygsgränser: Uppgift 1-5 ger maximalt 3 poäng vardera. Uppgift 6-8 ger maximalt 5 poäng vardera. Betyget på tentamen ges enligt följande tabell:

		Poäng på uppgift 1–5 (inkl. bonuspoäng)						
		0–7	8	9	10	11	12	13–18
Poäng på uppgift 6–8	0–4	U	U	U	U	U	3	3
	5–8	U	U	U	U	3	3	4
	9	U	U	U	3	3	4	4
	10–11	U	U	3	3	4	4	5
	12–15	U	3	3	4	4	5	5

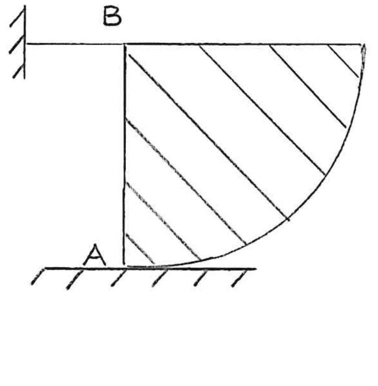
UPPSTÄLLDA EKVATIONER SKALL MOTIVERAS.

1.



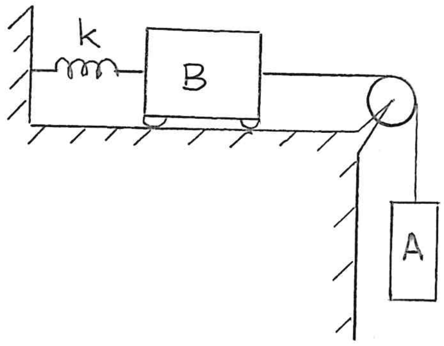
En balk AB, massa m och längd $2a$ och lutningsvinkel α, är förbunden med en likadan horisontell balk BC via leden i B enligt figur. Systemet är i jämvikt.
a) Frilägg balksystemet ABC som en helhet och ställ upp 3 oberoende jämviktsekvationer. (2 poäng) (Observera att ekvationerna *inte* behöver lösas.)
b) Bestäm vertikala stödkraften i C verkande på balk BC. (1 poäng)

2.



En homogen skiva med massa m har formen av en kvartscirkel med radie R och tjocklek b. Skivan vilar på ett strävt underlag vid A medan det fäster en horisontell lina i B. Punkten B är rakt ovanför A.
Bestäms ett numeriskt värde för minsta tillåtna friktionskoefficient vid A för möjlig jämvikt. (3 poäng)

3.



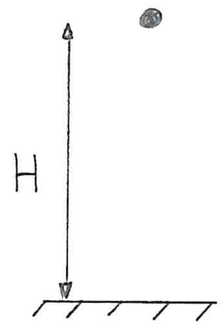
En hängande kropp A, massa m, är förbunden med en kropp B, massa $2m$, via en lina som löper över en masslös trissa. Kropp B är i sin tur förbunden med en fjäder, styvhet k enligt figur. Systemet är från början i jämvikt.

a) Bestäms fjäderns förlängning (från ospänt läge) i detta jämviktsläge. (1 poäng)

b) Om linan kapas (t.ex. precis till höger om B), vad blir omedelbart därefter accelerationen för B? (1 poäng)

c) Om istället fjädern kapas (t.ex. precis till vänster om B), vad blir omedelbart därefter accelerationen för B? (1 poäng)

4.



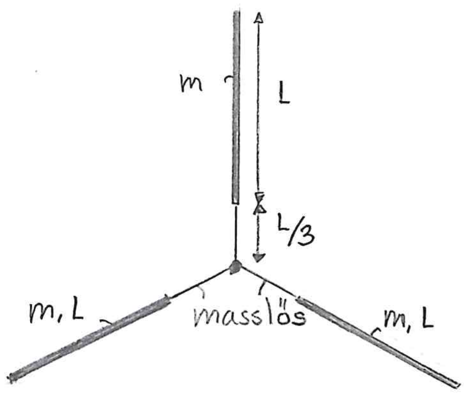
En kula släpps från vila på höjden H enligt figur (bortse från luftmotstånd). Studsen mot underlaget är inte fullständigt elastisk, varvid kulans fart omedelbart *efter* stöten är $3/4$ av vad den var omedelbart *före* stöten.

a) Bestäm kulans maximala höjd efter denna första studs. (1 poäng)

b) Bestäm den tid det tar från det att kulan släpps från startläget till dess den når marken för *andra* gången. (2 poäng)

(Observera att ekvationer skall motiveras, använd inga färdiga formler som inte finns i Formelsamlingen.)

5.

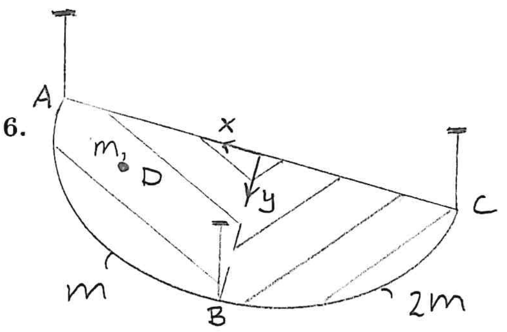


Figuren visar schematiskt den centrala delen av ett vindkraftverk, där snurran antas bestå av en masslös del i mitten och tre likadana blad, vardera med massa m och längd L enligt figur. Snurran roterar med konstant rotationshastighet, där ett helt varv tar tiden τ.

a) Bestäm den högsta farten hos någon punkt på snurran. (1 poäng)

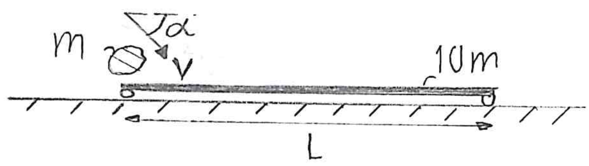
b) Bestäm snurrans rörelseenergi om varje blad kan modelleras som en smal stång. (2 poäng)

6.



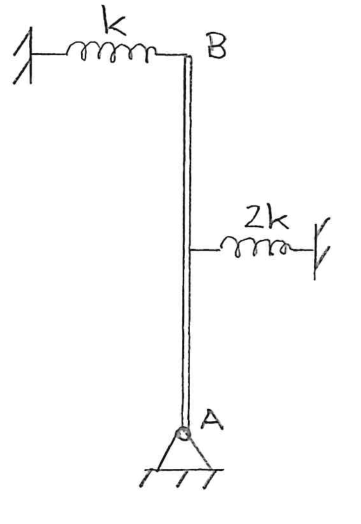
En halvcirkelskiva med radie R består av två lika stora delar med olika massor enligt figur (m respektive $2m$). Skivan hålls horisontell via tre vertikala linor fästade i A, B och C. En partikel med massa m skall placeras i en punkt D så att de tre linkrafterna är lika stora. Bestäm läget för D, d.v.s. (x_D, y_D). (5 poäng)

7.



En kropp med massa m faller in med farten v, vinkeln $\alpha = 45°$, mot en lättrörlig vagn. Vagnen har massa $10m$ och är initialt i vila. Föremålet glider under friktion och lämnar slutligen vagnens högra ände med farten $v/2$ relativt vagnen. Bestäm härur friktionskraftens arbete. (5 poäng)

8.



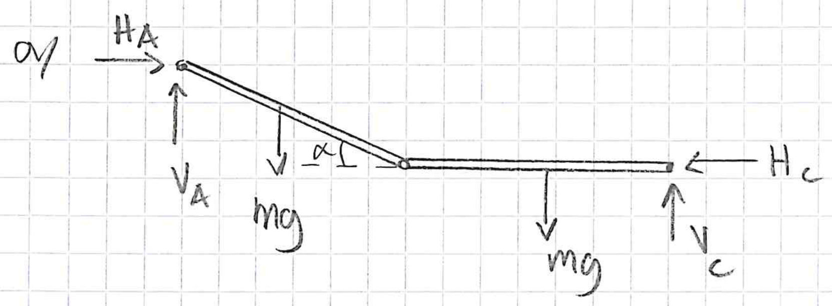
En stång AB, massa m och längd L, kan rotera kring A. En fjäder med styvhet k är fäst i toppen, medan en fjäder med styvhet $2k$ är fäst mitt på stången. Fjädrarna är ospända i figurläget.

a) Bestäm ett villkor för att stången skall kunna utföra små svängningar kring figurläget. (4 poäng)

Ledning: Härled differentialekvationen för svängningar.

b) Om detta villkor är uppfyllt, vad är då svängningstiden? (1 poäng)

① a/



$\rightarrow$: $H_A - H_c = 0$ (1) $\uparrow$: $V_A + V_c - 2mg = 0$ (2)

$\curvearrowleft C$: $H_A 2L\sin\alpha + V_A(2L\cos\alpha + 2L) - mg(L\cos\alpha + 2L)$

$-mgL = 0$ (3)

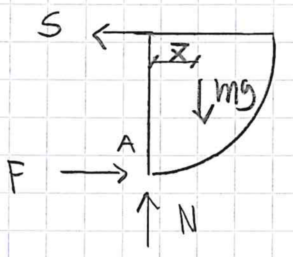
b/ Frilägg BC:

$\curvearrowleft B$: $V_c \cdot 2L - mgL = 0$

$\Rightarrow V_c = mg/2$ //

---

②



$\rightarrow$: $F - S = 0$ (1)

$\uparrow$: $N - mg = 0$ (2)

$\curvearrowleft A$: $SR - mg\bar{x} = 0$ (3)

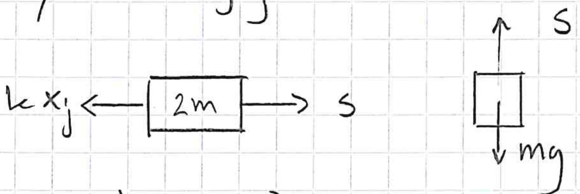
$\bar{x} = 4R/3\pi$ enl. FS. 15 fall 4.

(3) $\Rightarrow$ $S = 4mg/3\pi$ (4)

$|F|/|N| \le \mu_s \Rightarrow \mu_{s,min} = |F|/|N| =$

ins. (1) och (2) m.h.a. (4)

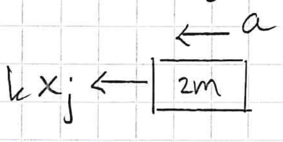
③ a/ Frilägg:



$\rightarrow$: $S - kx_j = 0$

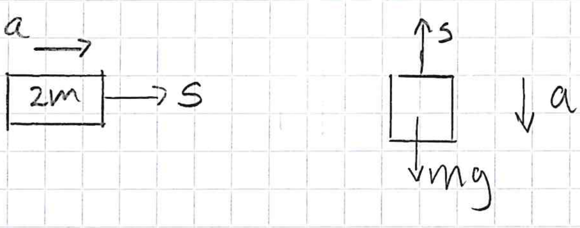
$\uparrow$: $S - mg = 0 \Rightarrow S = mg \Rightarrow x_j = mg/k$ (1)

b/ Frilägg



$\leftarrow$: $kx_j = 2ma \Rightarrow a = \frac{kx_j}{2m}$ = anv. (1) = $g/2$ //

c/ Frilägg

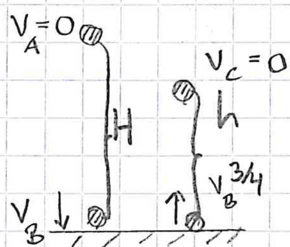


$\rightarrow$: $S = 2ma$

$\downarrow$: $mg - S = ma$ $\Rightarrow mg - 2ma = ma \Rightarrow a = g/3$ //

[Kan ses som kraften mg drar system med massa 3m]

④ a/



$T_1 + V_1 + W^{(ik)} = T_2 + V_2$ (1)

Mellan A och B ($W^{(ik)} = 0$):

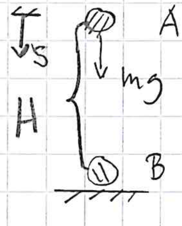
$T_1 = 0$ $V_1 = mgH$ $T_2 = \frac{1}{2} m v_B^2$ $V_2 = 0$

(1) $\Rightarrow$ $v_B = \sqrt{2gH}$ (2)

Mellan B och C ($W^{(ik)} = 0$):

$T_1 = \frac{1}{2} m \left(\frac{3}{4} v_B\right)^2$ $V_1 = 0$ $T_2 = 0$ $V_2 = mgh$

(1) $\Rightarrow$ $h = \frac{9}{32} v_B^2 / g$ = ins. (2) = $\frac{9}{16} H$ //

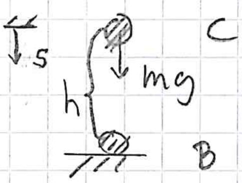
b/ 

$\downarrow: mg = ma \Rightarrow a = g \Rightarrow v = gt + c_1$

$\Rightarrow s = gt^2/2 + c_1 t + c_2 \quad (1)$

där $c_1 = c_2 = 0$ då $v(0) = s(0) = 0$,

Så, $t_{AB} = \sqrt{2H/g} \quad (2)$



Samma resonemang för sträckan CB ger $t_{CB} = \sqrt{2h/g} \quad (3)$

Totala tiden $t = t_{AB} + t_{BC} + t_{CB} = [t_{BC} = t_{CB}]$

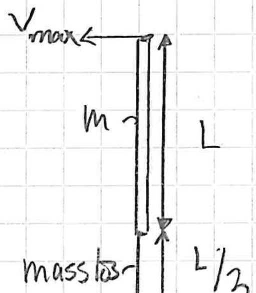
$t_{AB} + 2t_{CB} = $ (ins. (2) och (3)) $=$

$\sqrt{2H/g} + 2\sqrt{2h/g} = $ ins. $h = \frac{9}{16}H$ ur a/

$= \frac{5}{2}\sqrt{2H/g}$ //

---

(5) Studera ett blad:



a/ Farten "$v = R\omega$" enl. FS s. 5

Här är $\omega = 2\pi f$ med

$f = 1/\tau \Rightarrow \omega = 2\pi/\tau \quad (1)$

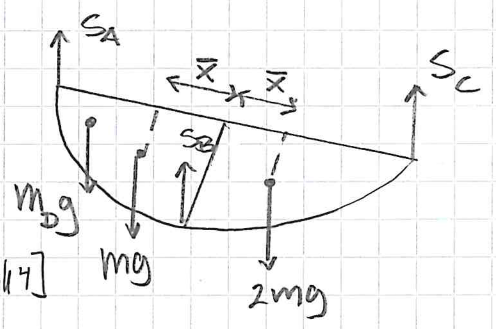
"R_{max}" är $L/3 + L = 4L/3$, varvid $v_{max} = 8L\pi/(3\tau)$ //

b/ Ett blad: $I_{o,m} = \bar{I} + md^2 \; (2)$ där $\bar{I} = mL^2/12$ [FS s. 16, tal 14]

och $d = L/2 + L/3 = 5L/6 \Rightarrow$ ins. i (2) $\Rightarrow I_{o,m} = \frac{7}{9}mL^2 \quad (3)$

$T = \frac{1}{2}I_o\omega^2 = [\text{ins. } I_o = 3I_{o,m} \text{ samt } (1)] = \frac{14}{3}\pi^2 mL^2/\tau^2$ //

⑥ Frilägg:



$m_D = m$

Delskivornas tp

$\bar{X} = 4R/3\pi$ (1) [FS s.15 fall 4]

$\uparrow$: $S_A + S_B + S_C - 4mg = 0$ (2)

$\curvearrowright \bar{x}$: $S_B \cdot R - mg\bar{y} - 2mg\bar{y} - m_D g \cdot y_D$ (3)

med $\bar{y} = \bar{x}$ (4)

$\curvearrowright \bar{y}$: $S_C R - S_A R - 2mg\bar{x} + mg\bar{x} + m_D g x_D = 0$ (5)

Enl. föruts. $S_A = S_B = S_C = S$ in i (5) $\Rightarrow$

$X_D = \bar{X}$ (6) // $\quad$ (2) $\Rightarrow S = 4mg/3$

(3) $\Rightarrow 4mgR/3 - 3mg\bar{y} - mg\,y_D = 0 \Rightarrow$ [ins. (4) i (1)]

$\Rightarrow y_D = 4\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{\pi}\right)R \approx 0{,}06R$ (7)// $(X_D; Y_D)$ ur (6,7).

---

⑦ Inga yttre krafter på syst. $m + 10m$ i sidled $\Rightarrow P_x$ bevaras.

Före: $P_f = mV/\sqrt{2} + M \cdot 0$ [$M = 10m$ i vila].

Efter:

$$P_e = m(V_M + V/2) + MV_M$$

$P_f = P_e \Leftrightarrow mV/\sqrt{2} = 11mV_M + mV/2 \Rightarrow$

$$V_M = V(\sqrt{2} - 1)/22 \quad (1) \quad (\approx 0{,}02V)$$

Energilagen ger $T_1 + \bar{V}_1 + W^{(ik)} = T_2 + \bar{V}_2$ (2)

Före: $T_1 = \frac{1}{2} m v^2$ (M vila). $\bar{V}_1 = 0$

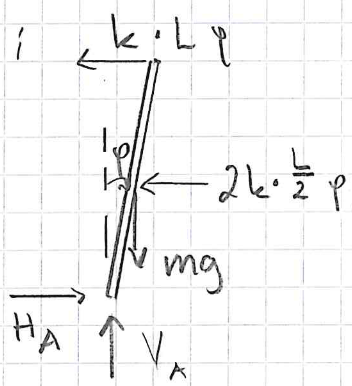
Efter: $T_2 = \frac{1}{2} m (v_M + v/2)^2 + \frac{1}{2} M v_M^2$ $\bar{V}_2 = 0$

Efter förenkling $T_2 = 3mv^2/22$ m.h.a. (1).

(2) $\Rightarrow \frac{1}{2} m v^2 + W^{(ik)} = \frac{3}{22} m v^2 \Rightarrow W^{(ik)} = -\frac{8}{22} m v^2$ //

---

(8) Frilägg i



$\sin\varphi \approx \varphi$ $\cos\varphi \approx 1$

$\overset{\curvearrowleft}{A}$: $mg \cdot L/2\, \varphi - 2k \frac{L}{2} \varphi \cdot \frac{L}{2} - kL\varphi \cdot L = I_A \ddot{\varphi} \Leftrightarrow$

$mg\, L/2\, \varphi - 2kL^2 \varphi = I_A \ddot{\varphi} \Rightarrow$

$$\ddot{\varphi} \underline{\underline{+}} \frac{(2kL - mg/2)L}{I_A} \varphi = 0 \quad (1)$$

↑OBS!

Jmf. $\ddot{x} \underline{\underline{+}} \omega^2 x = 0$. Då $\omega^2 > 0$ så ger

OBS!

a/ (1) att $2kL - mg/2 > 0 \Rightarrow 4kL > mg$ //

b/ Svängningstid $\tau = 2\pi/\omega$ där $\omega^2 = \frac{(2kL - mg/2)}{I_A}$

där $I_A = \frac{1}{3} m L^2$, så $\tau = 2\pi \sqrt{\frac{2mL^2}{3(4kL - mg)}}$ //