Tentamen i TME010 Mekanik TD/I, 2019-08-28 kl. 14.00–18.00

Jourhavande: Björn Andersson tel. 0730-659489 (salarna besöks 15.15 och 16.45)
Lösningar anslås på M2, avd. Dynamik, och på kurshemsidan senast den 29/8.
Preliminärt rättningsresultat anslås på M2 senast den 13/9.
Rättningsgranskning och utlämning av tentor sker på M2, avd. Dynamik, 19/9 samt 20/9 kl. 12.00–13.00.

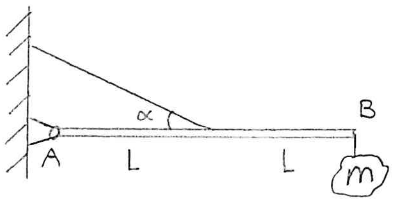
Tillåtna hjälpmedel: Formelsamling i mekanik av M.M. Japp (delas ut vid tentan),
Matematiska handböcker (t ex Beta) eller utdrag därur,
Chalmersgodkänd räknare är tillåten.

Betygsgränser: Uppgift 1-5 ger maximalt 3 poäng vardera. Uppgift 6-8 ger maximalt 5 poäng vardera. Betyget på tentamen ges enligt följande tabell:

		Poäng på uppgift 1–5 (inkl. bonuspoäng)						
		0–7	8	9	10	11	12	13–18
Poäng på uppgift 6–8	0–4	U	U	U	U	U	3	3
	5–8	U	U	U	U	3	3	4
	9	U	U	U	3	3	4	4
	10–11	U	U	3	3	4	4	5
	12–15	U	3	3	4	4	5	5

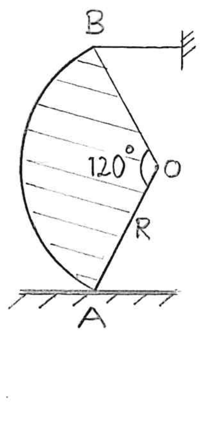
UPPSTÄLLDA EKVATIONER SKALL MOTIVERAS.

1.



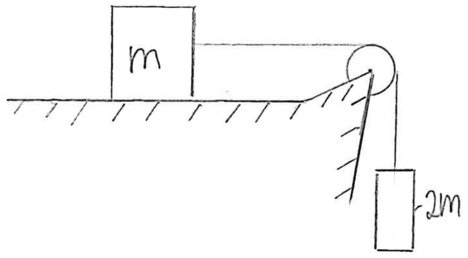
En masslös balk AB med längd $2L$ uppbär en massa m i sin högra ände. Mitt på balken fäster en lina med lutningsvinkel α enligt figur.
a) Frilägg balken AB. (1 poäng)
b) Bestäm stödkrafter och ev. stödmoment i A samt linkraften för möjlig jämvikt.
(2 poäng)

2.



En skiva med massa m har formen av en cirkelsektor med radie R och tjocklek b. Skivans medelpunktsvinkel är 120° enligt figur. Skivan vilar på ett strävt underlag vid A medan det fäster en horisontell lina i B. B är rakt ovanför A.
a) Bestäm horisontella avståndet till skivans tyngdpunkt mätt från spetsen O. (1 poäng)
b) Frilägg skivan och ställ upp de ekvationer ur vilka minsta tillåtna friktionskoefficient för möjlig jämvikt kan bestämmas. (2 poäng)
(Observera att ekvationerna *inte* behöver lösas, men det skall vara möjligt att bestämma den sökta storheten uttryckt i kända storheter.)

3.

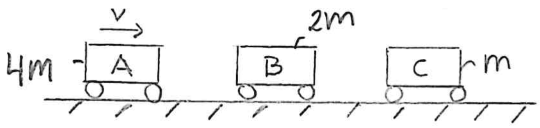


En hängande kropp, massa $2m$, är förbunden med en låda, massa m. Lådan är på ett strävt underlag, friktionskoefficient $\mu = 0.5$ ($\mu = \mu_s = \mu_k$). Systemet släpps från vila. Bestäm för den hängande massan

a) accelerationen, (2 poäng)

b) farten då den fallit sträckan L. (1 poäng)

4.

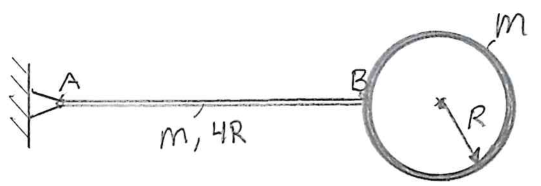


Figuren visar tre kroppar A, B och C som har massorna $4m$, $2m$, respektive m. Från början har A farten v åt höger medan B och C är stilla. Efter stöt 1 mellan A och B så halveras A:s fart åt höger. Kropp B kommer då i rörelse, varefter stöt 2 inträffar mellan B och C. Efter denna stöt så halveras B:s fart åt höger. Bestäm

a) farten hos kropp C efter stöt 2, (1 poäng)

b) mängden mekanisk energi som sammanlagt gått förlorad i de två stöterna. (2 poäng)

5.

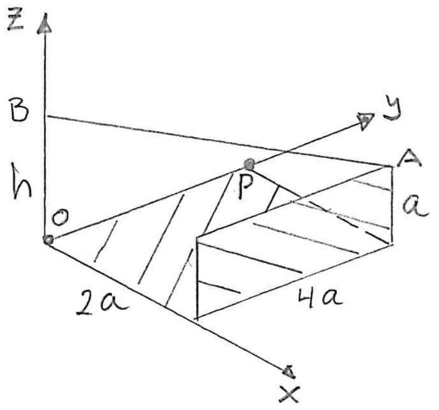


En pendel består av en tunn cirkel, massa m och radie R, fäst i en smal stång, massa m och längd $4R$. Stången är ledad i A. I figurläget roterar pendeln medurs, där punkt B har farten v nedåt.

a) Bestäm kroppens masströghetsmoment kring rotationspunkten A. (1 poäng)

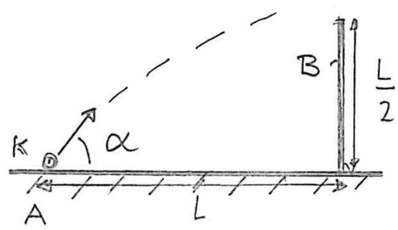
b) Bestäm accelerationsvektorn hos punkt B. (2 poäng)

6.



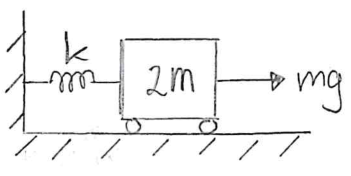
En rektangulär skiva med massa m är böjd enligt figur. Skivan är lagrad i kulleder i O och P. För att möjliggöra jämvikt så är en lina fäst i skivans ena hörn A, samt rakt ovanför O i punkten B. Bestäm minsta möjliga avstånd h (mellan O och B) så att linkraften inte överskrider mg. (5 poäng)

7.



Ett föremål K (partikel) slängs iväg från A med elevationsvinkeln $\alpha = 45°$, varvid K nätt och jämt når över muren B enligt figur. Om föremålet istället slängs med samma fart men med elevationsvinkeln $\alpha = 60°$, hur långt ovanför muren passerar då K? (5 poäng)

8.

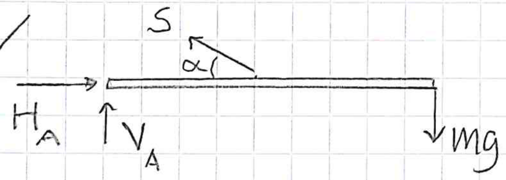


Figuren visar ett system som startar med ospänd fjäder från vila. Om fjädern bara klarar av kraften mg, när brister denna? (5 poäng)

Ledning: Studera svängningsförloppet.

Lösning Mekanik 190828

1) a/



b/ $\rightarrow: \quad H_A - S\cos\alpha = 0 \quad (1)$

$\uparrow: \quad V_A + S\sin\alpha - mg = 0 \quad (2)$

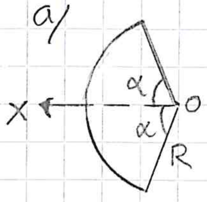
$\overset{\curvearrowleft}{A}: \quad S\sin\alpha \cdot L - mg \cdot 2L = 0 \quad (3)$

$(3) \Rightarrow S = 2mg/\sin\alpha$ //

$(2) \Rightarrow V_A = -mg$ // $\qquad (1) \Rightarrow H_A = 2mg\cot\alpha$ //

---

2) a/

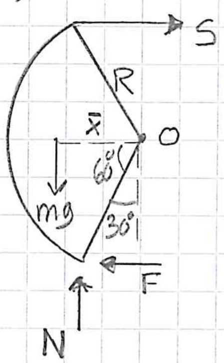


Vi har $\alpha = 60^\circ = \pi/3$ rad. FS s.15 fall 3

$\bar{x} = \dfrac{2R\sin\alpha}{3\alpha} \quad (1)$ där α i radianer.

(1) ger $\bar{x} = \dfrac{2R \cdot \sqrt{3}/2}{3 \cdot \pi/3} = R\dfrac{\sqrt{3}}{\pi}$ // $(\approx 0{,}55R)$

b/



$\rightarrow: \quad S - F = 0 \quad (1)$

$\uparrow: \quad N - mg = 0 \quad (2)$

$\overset{\curvearrowleft}{O}: \quad N \cdot R\sin 30^\circ + FR\cos 30^\circ$

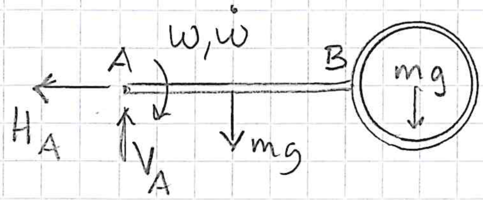
$+ SR\cos 30^\circ - mg\bar{x} = 0 \quad (3)$

$F/N \leq \mu_s \quad (4)$

[$(2) \Rightarrow N = mg$; (1) och $(3) \Rightarrow S = F = mg\left(1/\pi - 1/2\sqrt{3}\right)$;

$(4) \Rightarrow \mu_s \geq \left(1/\pi - 1/2\sqrt{3}\right) \approx 0{,}03$]

(5)



Vid friläggning (för b/).

a/ $I_A = I_{A,s} + I_{A,c}$ (1)

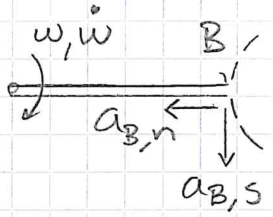
<u>Stång</u>: $I_{A,s} = \frac{1}{3} m (4R)^2$ enl. FS s.16 fall 4.

<u>Cirkel</u>: $I_{A,c} = \bar{I}_c + m(4R+R)^2 =$ (se FS s.17 fall 3)

$= mR^2 + m25R^2 = 26mR^2$

(1) $\Rightarrow$ $I_A = 94/3\ mR^2$ //

b/ För punkt B har vi:



$a_{B,n} = 4R\omega^2 = V^2/4R$ // (2)

$a_{B,s} = 4R\dot\omega$ (3). Vi får $\dot\omega$ ur:

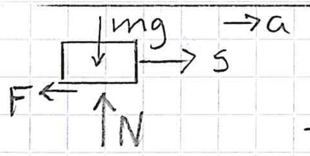
$\overset{\curvearrowright}{A}$: $mg \cdot 2R + mg(4R+R) = I_A\dot\omega \Rightarrow \dot\omega = 7mgR/I_A$

$=$ anv a/ $= 21g/94R$ (4). (3) $\Rightarrow a_{B,s} = 84g/94$ //

---

(3) a/

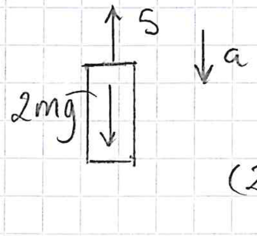
<u>m</u>:



$\uparrow$: $N - mg = 0 \Rightarrow N = mg$ (1)

$\rightarrow$: $S - F = ma$ (2)

<u>2m</u>:



$\downarrow$: $2mg - S = 2ma$ (3)

(2) + (3) $\Rightarrow$ $2mg - F = 3ma$. $F = \mu N$ då glid,

så (1) $\Rightarrow$ $2mg - \mu mg = 3ma \Rightarrow a = g/2$ //

b/ $\underline{a = dv/dt} = \underline{v\,dv/ds}$ $\Rightarrow$ $a\,ds = v\,dv$ $\Rightarrow$

$\int_0^L g/2\,ds = \int_0^V v\,dv \Leftrightarrow gL/2 = V^2/2 \rightarrow V = \sqrt{gL}$ // (Energiekv. också möjlig.)

⑥ Teckna linkraften mellan AB som vektor:

$$\mathbf{S}_{AB} = S\,\mathbf{e}_{AB} \quad (1) \quad \text{med} \quad \mathbf{e}_{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} \quad (2)$$

där $\overrightarrow{AB} = (-2a, -4a, h-a)$ (3)

Skriv för enkelhets skull $h - a = \alpha a$ (4)

$$(1)-(4) \Rightarrow \mathbf{S}_{AB} = \frac{S(-2a, -4a, \alpha a)}{d} \quad (5)$$

där $d^2 = 4a^2 + 16a^2 + \alpha^2 a^2 = (20 + \alpha^2)a^2$ (6)

Vi skall studera $\Sigma M_{OP} = \Sigma M_y = 0$ (7)

För linkraften har vi

$$\mathbf{M}_{O,S} = \overrightarrow{OA} \times \mathbf{S}_{AB} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 2a & 4a & a \\ S_x & S_y & S_z \end{vmatrix} =$$

$$= (\underbrace{4aS_z - aS_y}_{M_{x,S}}, \underbrace{aS_x - 2aS_z}_{M_{y,S}}, \underbrace{2aS_y - 4aS_x}_{M_{z,S}}) \quad (8).$$

Enligt (7) så är $M_{y,S}$ i (8) av intresse.

Vad är mg:s moment m.a.p. OP ?

Skivans massa uppdelas enligt 2m/3 för horisontella delen, och m/3 för vertikala delen.

$M_{y,mg} = 2mg/3 \cdot a + mg/3 \cdot 2a = 4mga/3$ (9)

(8) och (9) i (7) ger

$\Sigma M_y = M_{y,S} + M_{y,mg} = aS_x - 2aS_z + 4mga/3 = 0$

d.v.s. $\dfrac{2Sa}{d}(1+\alpha) = 4mg/3$ (10) ur (5).

Kvadrera båda sidor av (10) ⇒

$S^2 a^2 (1+\alpha)^2 = 4/9\, m^2 g^2 d^2 = 4/9\, m^2 g^2 (20+\alpha^2) a^2$

ur (6). Insatt att $S = mg$ enl. uppgift ⇒

$(1+\alpha)^2 = 4/9\,(20+\alpha^2)$ som förenklas

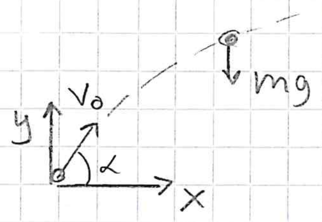
$\alpha^2 + \frac{18}{5}\alpha - \frac{71}{5} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\alpha}} = -\frac{9}{5} \overset{+}{(-)} \left[\frac{81}{25} + \frac{71}{5}\right]^{1/2}$

$= (\sqrt{436} - 9)/5 \approx 2{,}376$ (11)

Ekv. (4) ⇒ $h = (1+\alpha)\,a \approx 3{,}376a$ //

(vilket alltså är h_{min})

7



$\rightarrow: a_x = 0 \Rightarrow V_x = V_0 \cos\alpha \Rightarrow S_x = V_0 t \cos\alpha$ (1)

$\uparrow: a_y = -g \Rightarrow V_y = -gt + V_0 \sin\alpha \Rightarrow S_y = -\frac{gt^2}{2} + V_0 t \sin\alpha$ (2)

$\alpha = 45^\circ$

Vid $x = L$ så är $y = L/2$.

$(1) \Rightarrow L = V_0 t_L \cos 45^\circ \Rightarrow t_L = \sqrt{2}\, L / V_0$ (3)

$(2) \Rightarrow L/2 = -g t_L^2/2 + V_0 t_L \sin 45^\circ =$ insatt (3) $=$

$-gL^2/V_0^2 + L \Rightarrow V_0 = \sqrt{2gL}$

$\alpha = 60^\circ$

Vid $x = L$ så är $y = ?$

$(1) \Rightarrow L = V_0 t^* \cos 60^\circ = \sqrt{2gL}\, t^* \, 1/2 \Rightarrow t^* = \sqrt{2L/g}$

$(2) \Rightarrow y = -g t^{*2}/2 + V_0 t^* \sin 60^\circ =$

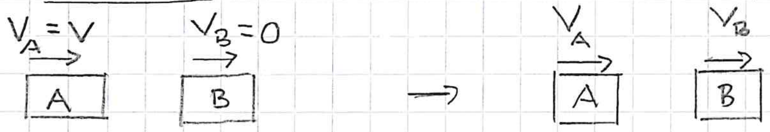
$-L + \sqrt{2gL}\,\sqrt{2L/g}\,\sqrt{3}/2 = (\sqrt{3} - 1)L \approx 0{,}73L$

Alltså passeras muren med marginal

$(2\sqrt{3} - 3)L/2 \approx 0{,}23\,L$ //

④ Stöt 1

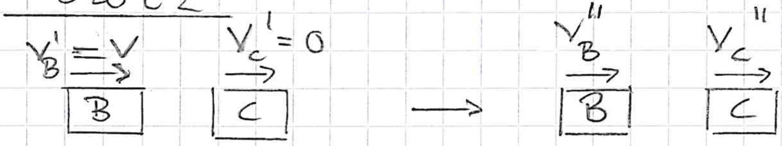
a/



Syst. rörelsemängd bev.

$\longrightarrow: \; 4mV = 4mV_A' + 2mV_B' \; ; \qquad V_A' = V/2 \Rightarrow V_B' = V \quad (1)$

Stöt 2



$\longrightarrow: \; 2mV = 2mV_B'' + mV_C'' \; ; \; V_B'' = V/2 \Rightarrow V_C'' = V \quad (2) \; //$

b/ Före stötar: $V_A = V \; ; \; V_B = V_C = 0 \qquad (3)$

Efter stöt 2: $V_A' = V/2 \; ; \; V_B'' = V/2 \; ; \; V_C'' = V \quad (4)$ [ur (1)–(2)]

$T_1 + V_1 + W^{(ik)} = T_2 + V_2 \quad (5) \qquad V_1 = V_2 = 0$

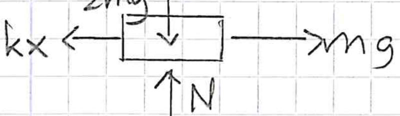
$T_1 = \frac{1}{2} 4mV^2 = 2mV^2 \qquad$ ur (3)

$T_2 = \frac{1}{2} 4m (V/2)^2 + \frac{1}{2} 2m (V/2)^2 + \frac{1}{2} mV^2 = \frac{5}{4} mV^2$ ur (4)

$(5) \Rightarrow 2mV^2 + W^{(ik)} = \frac{5}{4} mV^2 \Rightarrow W^{(ik)} = -\frac{3}{4} mV^2 \; //$

---

⑧ Frilägg, inför x från ospänd fjäder:



$\longrightarrow: \; mg - kx = 2m\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \underbrace{\frac{k}{2m}}_{\omega^2} x = \frac{g}{2} \quad (1)$

(1) lösning $x = x_h + x_p = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t) + \frac{g}{2\omega^2} \quad (2)$

BV: $x(0) = 0 \Rightarrow B = -g/2\omega^2$ ur (2). $\dot{x}(0) = 0 \Rightarrow A = 0$.

$(2) \Rightarrow x(t) = \frac{g}{2\omega^2} [1 - \cos(\omega t)] \quad (3)$

Fjäderkraft $kx = mg$ m.h.a. (3) ger vid $t = t^*$

$mg = gk/2\omega^2 [1 - \cos(\omega t^*)] \equiv mg [1 - \cos(\omega t^*)]$

$\Rightarrow \cos(\omega t^*) = 0 \Rightarrow \omega t^* = \pi/2 \Rightarrow t^* = \pi/2\omega \; //$