

# Tentamen i TME0101 Mekanik TD/I, 2019-04-26 kl. 8.30–12.30

Jourhavande: Peter Folkow tel 1521 och 0729-617241 (salarna besöks 9.45 och 11.15)

Lösningar anslås på M2, avd. Dynamik, och på kurshemsidan senast den 29/4.

Preliminärt rättningsresultat anslås på M2 senast den 13/5.

Rättningsgranskning och utlämning av tentor sker på M2, avd. Dynamik, 20/5 och 21/5 kl. 12.00–13.00.

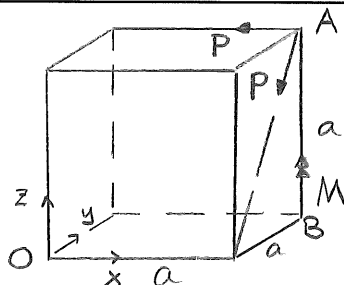
Tillåtna hjälpmedel: Formelsamling i mekanik av M.M. Japp,  
Matematiska handböcker (t ex Beta) eller utdrag därur,  
Chalmersgodkänd räknare är tillåten.

Betygsgränser: Uppgift 1-5 ger maximalt 3 poäng vardera. Uppgift 6-8 ger maximalt 5 poäng vardera. Betyget på tentamen ges enligt följande tabell:

|                      |       | Poäng på uppgift 1-5<br>(inkl. bonuspoäng) |   |   |    |    |    |       |
|----------------------|-------|--------------------------------------------|---|---|----|----|----|-------|
|                      |       | 0-7                                        | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13-18 |
| Poäng på uppgift 6-8 | 0-4   | U                                          | U | U | U  | U  | 3  | 3     |
|                      | 5-8   | U                                          | U | U | U  | 3  | 3  | 4     |
|                      | 9     | U                                          | U | U | 3  | 3  | 4  | 4     |
|                      | 10-11 | U                                          | U | 3 | 3  | 4  | 4  | 5     |
|                      | 12-15 | U                                          | 3 | 3 | 4  | 4  | 5  | 5     |

## UPPSTÄLLDA EKVATIONER SKALL MOTIVERAS.

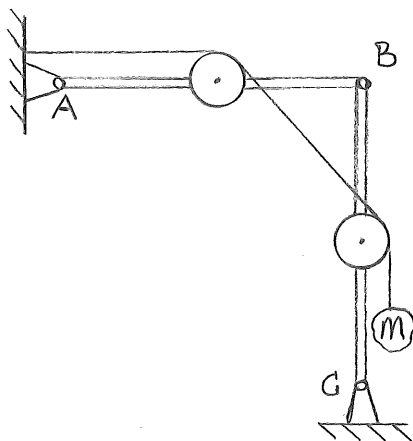
1.



Ett kraftsystem består av två krafter,  $P$  vardera, och ett rent moment  $M$  såsom figuren visar. Bestäm systemets

- kraftsumma, (1p)
- momentsumma m.a.p. origo O, (1p)
- momentsumma m.a.p. linjen AB. (1p)

2.

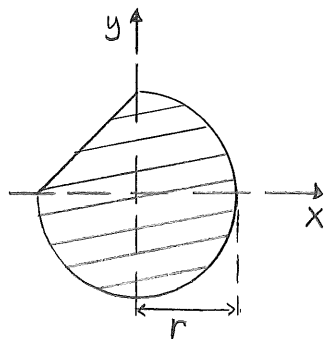


En struktur är sammansatt av två *masslösa* stänger AB och BC med längd  $2L$  vardera. Stängerna är förenade via en friktionsfri led i B. En massa  $m$  är fäst i ena änden av en lina som löper över två likadana masslösa trissor; dessa fäster mitt på respektive stång enligt figur.

- Frilägg hela systemet ABC (inklusive trissor, massa och lina). (1 poäng)
- Ställ upp jämviktsekvationer för hela systemet. (1 poäng)
- Frilägg det system som består av stång AB, övre trissan och tillhörande lindel. (1 poäng)

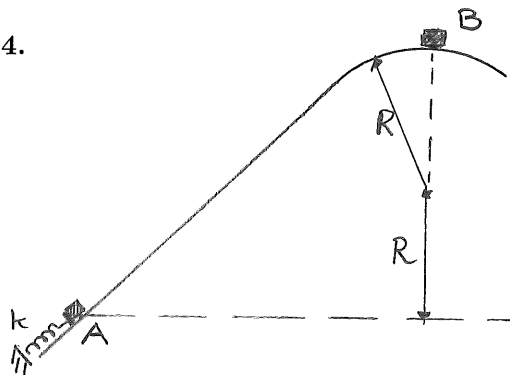
(För korrekt svar krävs att samtliga införda krafter ges konsekventa beteckningar, så att det i princip är möjligt att m.h.a. jämviktsekvationer till a) och c) bestämma samtliga obekanta. Observera att ekvationerna till b) *inte* behöver lösas)

3.



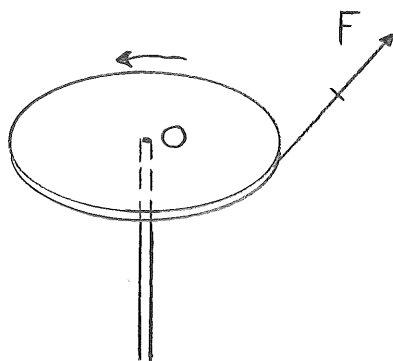
Figuren visar en homogen skiva. Bestäm  $x$ -koordinaten för kroppens tyngdpunkt. (3 poäng)

4.



I en katapultanordning kan en kropp, massa  $m$ , skjutas iväg uppför ett lutande friktionsfritt spår. Spåret är först rakt, men övergår senare i en krökt bana med radien  $R$ . Vid start från vila i läge A har fjädern, styvhet  $k = 20mg/R$ , tryckts ihop sträckan  $R/2$ . Bestäm i läge B  
a) kroppens fart, (2 poäng)  
b) normalkraften mellan kropp och underlag. (1 poäng)

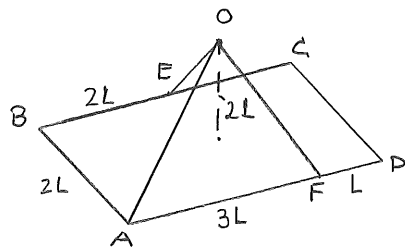
5.



En lätt lina är lindad kring en tunn horisontell skiva, massa  $m$  och radie  $r$ . Skivan kan rotera friktionsfritt kring en vertikal axel i O. Skivan är från början i vila då en horisontell konstant kraft  $F$  appliceras och drar ut linan sträckan  $L$ . Bestäm vid detta läge

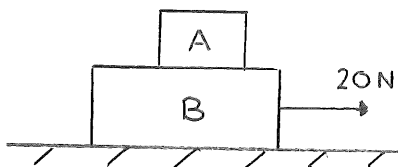
- a) skivans vinkelhastighet  $\omega$ , (2 poäng)  
b) skivans vinkelacceleration  $\dot{\omega}$ . (1 poäng)

6.



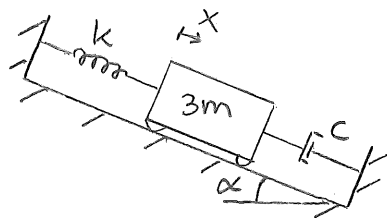
En rektangulär skiva ABCD (massa  $m$ , kantlängder  $2L$  och  $4L$ ) är upphängd i tre linor (OA, OE och OF). Bestäm linkrafterna om skivan är horisontell och i jämvikt med punkten O på avståndet  $2L$  ovanför skivans tyngdpunkt. (5 poäng)

7.



Figuren visar två kroppar: A med massa  $1\text{ kg}$  och B med massa  $3\text{ kg}$ . Det råder friktion mellan A och B, samt mellan B och underlaget. En kraft med beloppet  $20\text{ N}$  verkar på B så att kropparna sätts i rörelse. Om friktionskoefficienten mellan B och underlaget är  $0,4$ , hur stor måste friktionskoefficienten mellan A och B minst vara för att A inte skall glida relativt B? (5 poäng)

8.



Figuren visar en svängande kropp på ett lutande plane med vinkel  $\alpha$ . Systemet består av en kropp med massan  $3m$ , en fjäder med styvhet  $k$  samt en dämpare. Svängningen är kritiskt dämpat och påbörjas från vila vid tiden  $t = 0$  med ospänd fjäder ( $x = 0$ ).

- Bestäm dämpkonstanten  $c$ . (1 poäng)
- Bestäm rörelsen  $x(t)$  för  $t \geq 0$  (4 poäng)

① a/ Vi har krafter enligt:

$$P(-1, 0, 0) \quad \text{och} \quad P/\sqrt{2}(0, -1, -1) \Rightarrow$$

$$\Sigma \vec{F} = -P/\sqrt{2}(\sqrt{2}, 1, 1) //$$

b/ " $M_o = \vec{r} \times \vec{F}$ ". Båda krafterna i A,

så behandlas som en kraft enligt a/

$$\text{med } \vec{r} = \vec{OA} = (a, a, a).$$

$$\vec{r} \times \Sigma \vec{F} = \begin{array}{ccc} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ a & a & a \\ -P & -P/\sqrt{2} & -P/\sqrt{2} \end{array} = \frac{Pa}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}-1)(0, -1, 1) \quad (1)$$

$$\text{Rena momentet } M = M \hat{e}_z \quad (2)$$

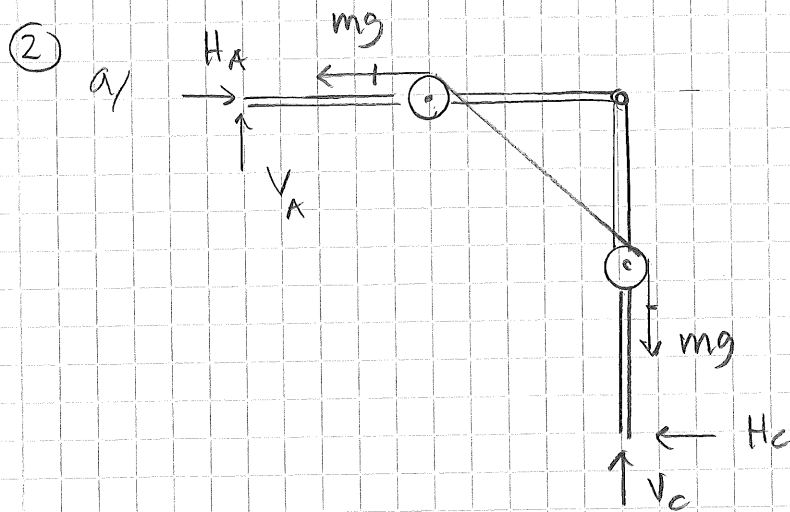
$$\text{Så, } \Sigma M_o = \vec{r} \times \Sigma \vec{F} + M // \text{ m.h.a. (1) och (2).}$$

$$c/ M_{AB} = \Sigma M_A \cdot \hat{e}_{AB} \quad (3)$$

$$\text{Då } \Sigma \vec{F} \text{ inte ger moment i A} \Rightarrow \Sigma M_A = M$$

$$\text{enligt (2), } \hat{e}_{AB} = -\hat{e}_z.$$

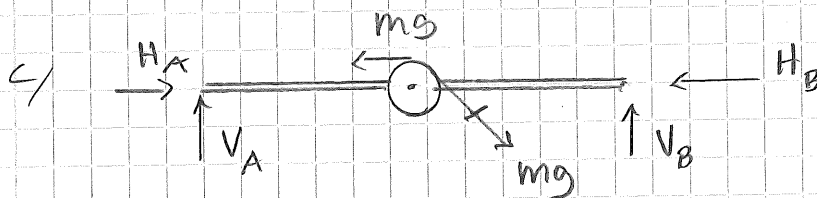
$$\text{Så, (3)} \Rightarrow M(0, 0, 1) \cdot (0, 0, -1) = -M //$$

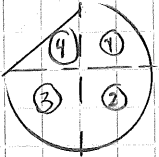


b/  $\rightarrow: H_A - mg - H_C = 0 \quad (1)$

$\uparrow: V_A - mg + V_C = 0 \quad (2)$

$\curvearrowright A: mg/r - mg(2L+r) + V_C \cdot 2L - H_C \cdot 2L = 0 \quad (3)$



③ Dela upp:  Infor  $\sigma$  (massa/ytenhet)

$m_1 = \sigma A_1 = \sigma r^2 \pi / 4 \quad \bar{x}_1 = 4r/3\pi \quad (\text{FS s.13 fall 4})$

$m_2 = m_3 = m_1 \quad ; \quad \bar{x}_2 = \bar{x}_1 \quad ; \quad \bar{x}_3 = -\bar{x}_1$

$m_4 = \sigma A_4 = \sigma r^2 / 2 \quad \bar{x}_4 = -r/3 \quad (\text{FS s.16 fall 2})$

$$\bar{X} = \frac{\sum m_i \bar{x}_i}{\sum m_i} = \frac{\sigma r^2 \pi / 4 \cdot 4r/3\pi - \sigma r^2 / 2 \cdot r/3}{3\sigma r^2 \pi / 4 + \sigma r^2 / 2} = \frac{2r}{9\pi + 6} \approx 0.06r //$$

3(6)

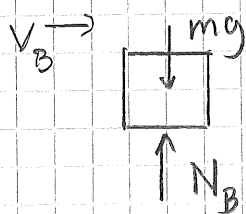
④ a/ Energin bevaras  $T_A + V_A = T_B + V_B$  (1)

$$T_A = 0 \quad V_A = \frac{1}{2} k (R/2)^2 = 5/2 mg R$$

$$T_B = \frac{1}{2} m v_B^2 \quad V_B = mg 2R$$

$$(1) \Rightarrow v_B = \sqrt{gR} //$$

b/ Frilägg:



$$\downarrow: mg - N_B = ma_n = m v_B^2 / R \quad (2)$$

$$(2) \Rightarrow N_B = mg - m v_B^2 / R = 0 // \text{ur a/}$$

⑤ Energilagen ger  $T_1 + V_1 + W^{(ch)} = T_2 + V_2$  (1)

a/ Kraften  $F$  utför ett arbete

$$W^{(ch)} = F \cdot L$$

$$T_1 = 0 ; V_1 = V_2 \quad (\text{sätts t.ex. till noll})$$

$$T_2 = \frac{1}{2} I_0 \omega^2$$

$$(1) \Rightarrow FL = \frac{1}{2} I_0 \omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{2FL / I_0} \quad (2)$$

$$I_0 = \frac{1}{2} m r^2 \quad (FS \text{ s. 17 fall 1}) \Rightarrow \omega = 2\sqrt{FL / m r^2} //$$

b/ Rotationslagen  $M_0 = I_0 \dot{\omega}$  (3)

$$M_0 = Fr \quad (3) \Rightarrow \dot{\omega} = Fr / I_0 =$$

$$= 2F / mr //$$

⑥ Utnyttja att  $\sum \mathbf{F} = 0$  (1)

$$S_{A0} = S_A \mathbf{e}_{A0} \quad \text{med} \quad \mathbf{e}_{A0} = \frac{(2L, L, 2L)}{\sqrt{9L^2}} = \frac{(2, 1, 2)}{3} \quad (2)$$

$$S_{E0} = S_E \mathbf{e}_{E0} \quad \text{med} \quad \mathbf{e}_{E0} = \frac{(0, -L, 2L)}{\sqrt{5L^2}} = \frac{(0, -1, 2)}{\sqrt{5}} \quad (3)$$

$$S_{F0} = S_F \mathbf{e}_{F0} \quad \text{med} \quad \mathbf{e}_{F0} = \frac{(-L, L, 2L)}{\sqrt{6L^2}} = \frac{(-1, 1, 2)}{\sqrt{6}} \quad (4)$$

Här använt x-axel längs AD, y-axel längs AB.

Använd (1) i varje riktning:

$$\sum F_x: S_A \cdot 2/3 - S_E / \sqrt{6} = 0 \quad (5)$$

$$\sum F_y: S_A / 3 - S_E / \sqrt{5} + S_F / \sqrt{6} = 0 \quad (6)$$

$$\sum F_z: S_A \cdot 2/3 - S_E \cdot 2/\sqrt{5} + S_F \cdot 2/\sqrt{6} - mg = 0 \quad (7)$$

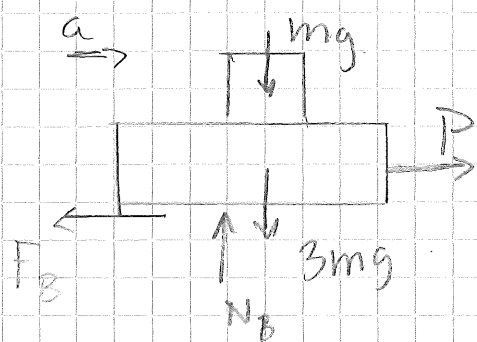
ur elw. (2) - (4). Elw. (5) - (7)  $\Rightarrow$

$$S_A = mg/4 // \quad S_E = \sqrt{5} mg/4 // \quad S_F = \sqrt{6} mg/6 //$$

[Alt. tag moment kring skivans axlar

$$\sum M_{AD}: S_E \cdot 2/\sqrt{5} \cdot 2L - mg \cdot L = 0 \quad \text{o.s.v.}]$$

⑦ Frlägg hela systemet (A glider inte relativt B):



$$\uparrow: N_B - 4mg = 0 \Rightarrow N_B = 4mg \quad (1)$$

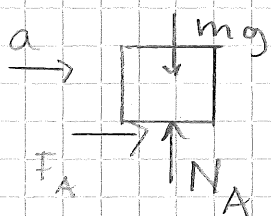
$$\rightarrow: P - F_B = 4m \cdot a \quad (2)$$

Då  $F_B = \mu_B N_B$  vid glidning

d.v.s.  $F_B = \mu_B 4mg$  ur (1). ( $\mu_B = 0,4$ )

$$\text{Ekr. (2)} \Rightarrow a = (P - F_B) / 4m = \dots = 1,08 \text{ m/s}^2$$

Frlägg A:



$$\uparrow: N_A - mg = 0 \Rightarrow N_A = mg \quad (3)$$

$$\rightarrow: F_A = ma \quad (4)$$

Vid gräns för glidning vid A

Så är  $F_A = \mu_A N_A = \mu_A mg$  m.h.a (3)

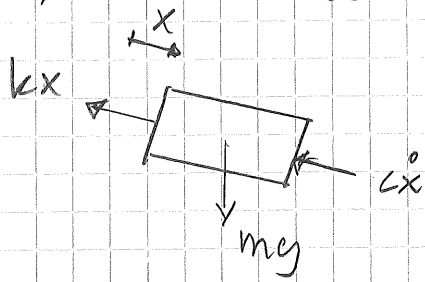
$$(4) \Rightarrow \mu_A mg = ma \Rightarrow \mu_A = a/g = 1,08/9,81 \approx 0,11$$

Så,  $\mu_{A,\min} = 0,11 //$



b(b)

⑧ a/ Frlägg massan:



$$\begin{aligned} & \rightarrow: 3mg \sin \alpha - kx - c\dot{x} = 3m\ddot{x} \\ \Rightarrow & \ddot{x} + \underbrace{\frac{c}{3m}}_{2\zeta\omega} \dot{x} + \underbrace{\frac{k}{3m}}_{\omega^2} x = g \sin \alpha \quad (1) \end{aligned}$$

$$\text{Då } \omega^2 = k/3m \quad \text{och} \quad 2\zeta\omega = c/3m \Rightarrow$$

$$c = 6m\zeta\omega = 6m\zeta\sqrt{k/3m} = 2\sqrt{3}\sqrt{mk} // \text{då } \zeta=1$$

$$b/ x = x_h + x_p \quad (2)$$

$$x_p = 3m/k \cdot g \sin \alpha \quad \text{m.h.a. elw. (1)}$$

$$x_h = e^{-\omega t} [C_3 t + C_4] \quad \text{ur Fs. s. 11.}$$

$$\text{Så } (2) \Rightarrow x(t) = \frac{3m}{k} g \sin \alpha + e^{-\omega t} [C_3 t + C_4] \quad (3)$$

$$x(0) = 0 \Rightarrow C_4 = -3m/k \cdot g \sin \alpha \quad (4)$$

$$\dot{x}(0) = 0 \Rightarrow \text{derivera (3), med } t=0 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} -\omega \cdot C_4 + C_3 &= 0 \Rightarrow C_3 = \omega C_4 = \\ &= -\sqrt{3m/k} g \sin \alpha \quad (5) \end{aligned}$$

$$(4) \text{ och } (5) \text{ i } (3) \Rightarrow$$

$$x(t) = \frac{3m}{k} g \sin \alpha \left\{ 1 - e^{-\sqrt{\frac{k}{3m}} t} \left[ \sqrt{\frac{k}{3m}} t + 1 \right] \right\} //$$