

Tentamen i TME0101 Mekanik TD/I, 2019-01-17 kl. 8.30–12.30

Jourhavande: Peter Folkow tel 1521 och 0729-617241 (salarna besöks 9.45 och 11.15)

Lösningar anslås på M2, avd. Dynamik, och på kurshemsidan senast den 18/1.

Preliminärt rättningsresultat anslås på M2 senast den 5/2.

Rättningsgranskning och utlämning av tentor sker på M2, avd. Dynamik, 6/2 och 7/2 kl. 12.00–13.00.

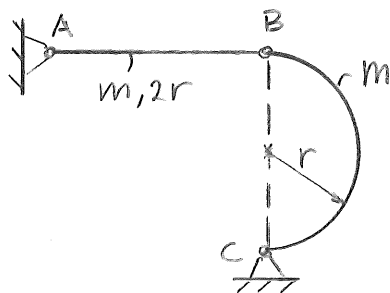
Tillåtna hjälpmedel: Formelsamling i mekanik av M.M. Japp,
Matematiska handböcker (t ex Beta) eller utdrag därur,
Chalmersgodkänd räknare är tillåten.

Betygsgränser: Uppgift 1-5 ger maximalt 3 poäng vardera. Uppgift 6-8 ger maximalt 5 poäng vardera. Betyget på tentamen ges enligt följande tabell:

		Poäng på uppgift 1-5 (inkl. bonuspoäng)						
		0-7	8	9	10	11	12	13-18
Poäng på uppgift 6-8	0-4	U	U	U	U	U	3	3
	5-8	U	U	U	U	3	3	4
	9	U	U	U	3	3	4	4
	10-11	U	U	3	3	4	4	5
	12-15	U	3	3	4	4	5	5

UPPSTÄLLDA EKVATIONER SKALL MOTIVERAS.

1.

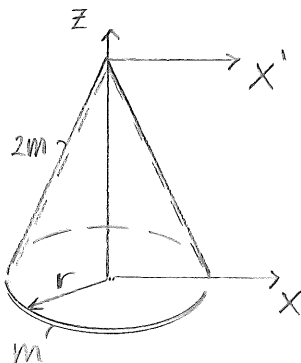


En struktur består av en rak stång AB, massa m och längd $2r$, som via en friktionsfri led i B är förenad med en halvcirkulär stång BC, massa m och radie r .

- Frilägg stängerna var för sig. (1 poäng)
- Ställ upp jämviktsekvationerna för respektive stång. (2 poäng)

(För korrekt svar krävs att det i princip skall vara möjligt att bestämma samtliga obekanta krafter/moment med hjälp av jämviktsekvationerna. Observera att ekvationerna *inte* behöver lösas)

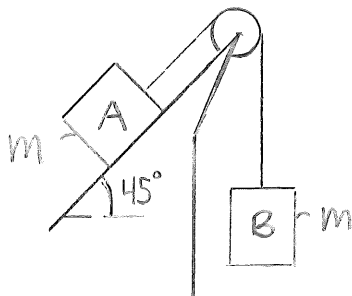
2.



En kropp består av ett tunt koniskt skal, massa $2m$, radie r och höjd $2r$, och en tunn bottenkiva med massa m .

- Bestäm kroppens tyngdpunkt $\bar{z}$. (1 poäng)
- Bestäm kroppens masströghetsmoment m.a.p. x' -axeln. (2 poäng)

3.



Två kroppar A och B, vardera med massa m , är förbundna med en lina enligt figur. Kropp A befinner sig på ett strävt lutande plan.

a) Frilägg A respektive B vid statisk jämvikt och bestäm minsta tillåtna friktionskoefficient μ som möjliggör jämvikt. (2 poäng)

b) Man klipper av linan ovanför kropp B. Bestäm efterföljande accelerationen hos kropp A med användning av den från a) uträknade friktionskoefficienten μ (antar alltså $\mu_s = \mu_k$). (1 poäng)

4.



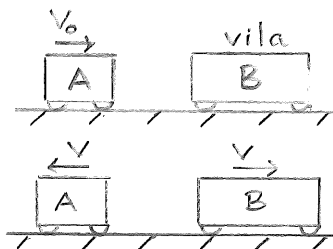
En lätttrörlig vagn A, massa m , skjuts iväg från vila genom en fjädrande katapult, styvhet k . När vagnen lämnat katapulten har den farten v_0 enligt figur a.

a) Vilken hoptryckning av fjädern krävs för detta? (1 poäng)

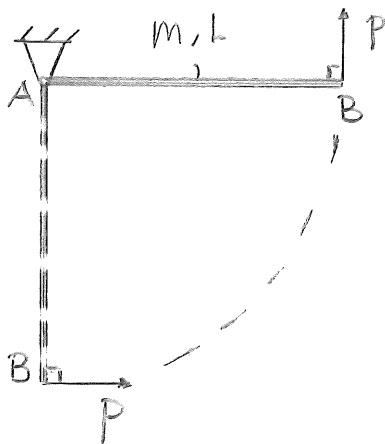
b) Vagnen krockar sedan med en annan, från början stillastående, vagn B med massa $5m$. Efter krock får båda vagnar samma fart enligt figur b; bestäm denna fart. (1 poäng)

c) Hur mycket mekanisk energi har gått förlorad under hela förloppet (från start till efter krock)? (1 poäng)

b)



5.

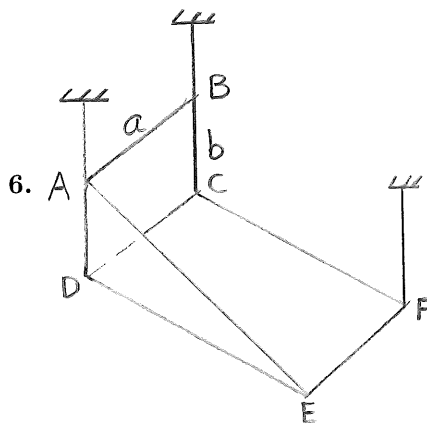


En smal stång AB, längd L och massa m , är hängande i vila då en konstant vinkelrät kraft $P = mg$ börjar verka i änden B enligt figur. Stången börjar därefter att rotera, och passerar läget då stången är horisontell. Bestäm i detta horisontella läge

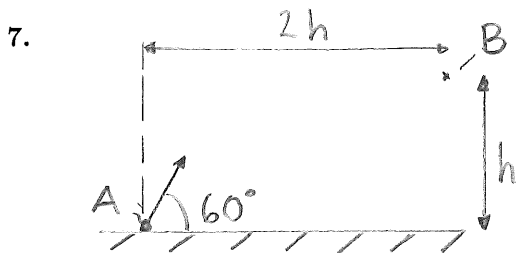
a) stångens vinkelhastighet ω , (1 poäng)

b) stångens vinkelacceleration $\dot{\omega}$, (1 poäng)

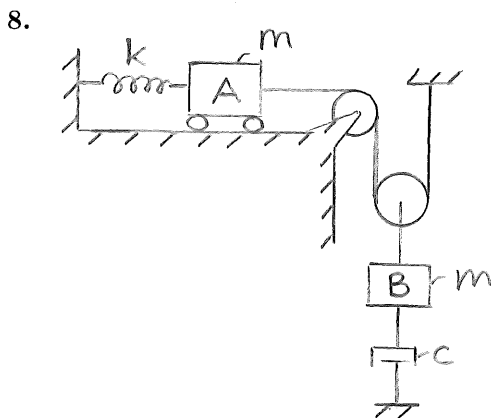
c) B:s accelerationsvektor. (1 poäng)



En kropp är sammansatt av tre tunna skivor med samma massa per ytenhet. Skivorna ABCD och CDEF är rektangulära, medan skivan ADE har formen av en rätvinklig triangel. Kroppen hängs upp i tre vertikala linor (i A, B och F) så att CDEF är horisontell. Hur lång får sidan CF (och DE) högst vara för att detta skall vara möjligt? (5 poäng)



En partikel skjuts iväg från punkten A med elevationsvinkeln 60° och träffar ett mål i punkten B. Vilken är partikelns högsta höjd under luftfärden? (5 poäng)



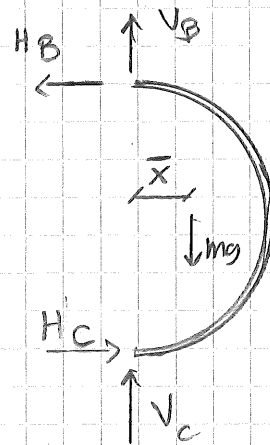
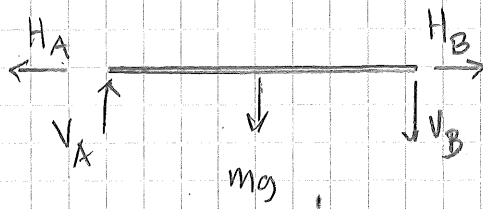
Figuren visar ett svängande system bestående av kropparna A och B, vardera med massan m , en fjäder med styvhet k samt en dämpare.

a) Bestäm dämpkonstanten c så att systemet blir kritiskt dämpat. (4 poäng)

b) Om systemet släpps från vila med ospänd fjäder, vilken acceleration får B omedelbart därefter? (1 poäng)

Ledning för b): Studera differentialekvationen.

① a/



b/

AB

$$\rightarrow : H_B - H_A = 0 \quad (1)$$

$$\uparrow : V_A - V_B - mg = 0 \quad (2)$$

$$\curvearrowright B : V_A \cdot 2r - mg r = 0 \quad (3)$$

BC

$$\rightarrow : H_C - H_B = 0 \quad (4)$$

$$\uparrow : V_B + V_C - mg = 0 \quad (5)$$

$$\curvearrowright B : H_C \cdot 2r - mg \bar{x} = 0 \quad (6); \quad \bar{x} = 2r / \pi \quad [\text{FS S.17 f.4}]$$

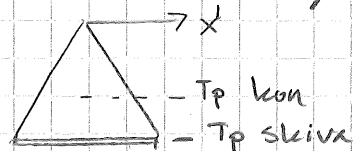
$$[H_A = H_B = H_C = mg / \pi; V_A = mg / 2; V_B = -mg / 2; V_C = 3mg / 2]$$

② a/ Kon : $\bar{z}_1 = 2r / 3$ [FS S.19 f.3] Skiva : $\bar{z}_2 = 0$

$$\bar{z} = (m_1 \bar{z}_1 + m_2 \bar{z}_2) / (m_1 + m_2) = 2m \cdot 2r / 3 / 3m = \frac{4}{9} r //$$

b/ $I_{x'} = I_k + I_s \quad (1)$

$$\left[\frac{2 \cdot 2r}{3} \right]$$



$$I_k = \bar{I}_k + 2m \left(\frac{4r}{3} \right)^2 = [\text{FS S.19}]$$

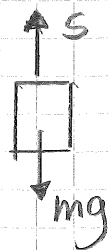
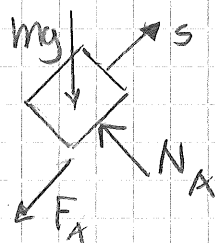
$$= \frac{1}{4} (2m) r^2 + \frac{1}{18} (2m) (2r)^2 + 2m \left(\frac{4r}{3} \right)^2 = \frac{9}{2} m r^2 \quad (2)$$

$$I_s = \bar{I}_s + m (2r)^2 = [\text{FS S.17 f.1}] = \frac{1}{4} m r^2 + m (2r)^2 = \frac{17}{4} m r^2 \quad (3)$$

(2) och (3) i (1) $\Rightarrow I_{x'} = \frac{35}{4} m r^2 //$

③

a/



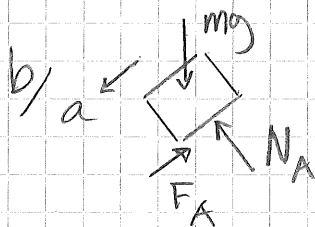
A: $\nwarrow: N_A - mg/\sqrt{2} = 0 \Rightarrow N_A = mg/\sqrt{2}$ (1)

$\nearrow: S - F_A - mg/\sqrt{2} = 0$ (2)

B: $\uparrow: S - mg = 0 \Rightarrow S = mg$ (3)

(2) $\Rightarrow F_A = \frac{(\sqrt{2}-1)mg}{\sqrt{2}}$ (4)

$\mu_{s,min} = |F_A| / |N_A| = (\sqrt{2}-1) \approx 0,41 //$



$\uparrow: N_A - mg/\sqrt{2} = 0 \Rightarrow N_A = mg/\sqrt{2}$ (1)

$\swarrow: mg/\sqrt{2} - F_A = ma$ (5)

Insat $|F_A| = \mu_k |N_A| \Rightarrow F_A = \frac{(\sqrt{2}-1)mg}{\sqrt{2}}$ (4)

(5) $\Rightarrow a = \frac{(2-\sqrt{2})}{\sqrt{2}} g = (\sqrt{2}-1)g \approx 0,41g$

④ a/ $\vec{T}_1 + \vec{V}_1 + \vec{W}_{=0}^{(ik)} = \vec{T}_2 + \vec{V}_2$ (1)

$V_1 = \frac{1}{2} k \Delta^2$ $T_2 = \frac{1}{2} m V_0^2$ (1) $\Rightarrow \Delta = \sqrt{\frac{m}{k}} V_0 //$

b/ Rörels emängd bevaras för systemet:

$P_{före} = m V_0$ $P_{efter} = 5m V - m V = 4m V$

$P_{före} = P_{efter} \Rightarrow V = V_0/4 //$

4c) Använd (1) där startläge (läge 1) ³⁽⁶⁾
och slutläge (läge 2).

$$T_1 = 0 ; V_1 = \frac{1}{2} k \Delta^2 = [\text{anv. a/}] = \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$V_2 = 0 ; T_2 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} 5m v^2 = 3m v^2 = [\text{anv. b/}]$$

$$= \frac{3}{16} m v_0^2$$

$$\text{Elev. (1)} \Rightarrow W^{(ik)} = \frac{3}{16} m v_0^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = -\frac{5}{16} m v_0^2$$

d.v.s. $\frac{5}{16} m v_0^2$ har gått förlorat.

$$\textcircled{5} T_1 + V_1 + W^{(ik)} = T_2 + V_2 \quad (1)$$

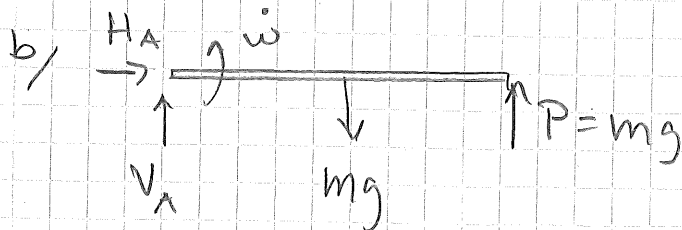
$$\text{a/ } T_1 = 0 ; V_1 = -mgL/2 ; T_2 = \frac{1}{2} I_A \omega^2 ; V_2 = 0$$

$$W^{(ik)} \text{ är P:s arbete ; d.v.s. } W^{(ik)} = PL\pi/2$$

$$(1) \Rightarrow -mg \frac{L}{2} + mgL \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} I_A \omega^2 \Rightarrow$$

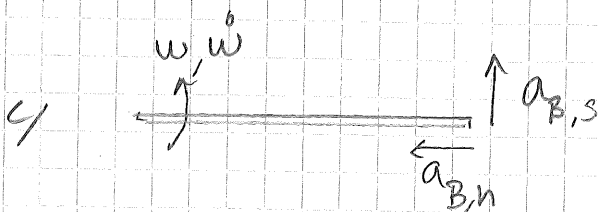
$$\omega^2 = mgL(\pi - 1) / I_A \Rightarrow [I_A = \frac{1}{3} mL^2] \Rightarrow$$

$$\omega = \sqrt{3g(\pi - 1)/L} //$$



$$\circlearrowleft : PL - mg \frac{L}{2} = I_A \omega \Rightarrow$$

$$\omega = \frac{mgL/2}{I_A} = \frac{3}{2} \frac{g}{L} //$$

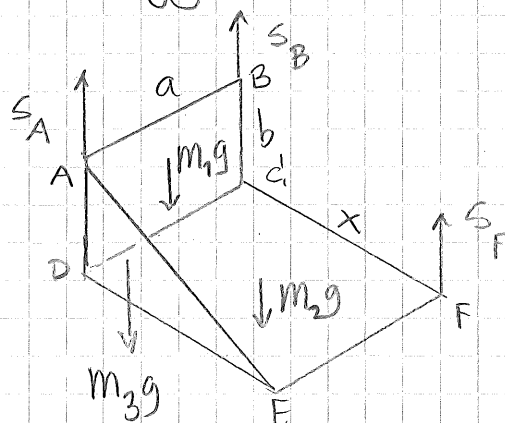


$$a_{B,h} = L\omega^2 \quad (\text{anv. a/})$$

$$a_{B,s} = L\omega \quad (\text{anv. b/})$$

(6) Inför σ (massa/ytenhet).

Förlägg:



$$m_1 = \sigma A_1 = \sigma ab$$

$$m_2 = \sigma A_2 = \sigma ax$$

$$m_3 = \sigma A_3 = \sigma bx/2$$

(1)

$$\uparrow: S_A + S_B + S_F - (m_1 + m_2 + m_3)g = 0 \quad (2)$$

$$\curvearrowleft: S_F \cdot x - m_2 g \cdot x/2 - m_3 g \cdot x/3 = 0 \Rightarrow \text{ins. (1)} \Rightarrow$$

$$S_F = \sigma g (ab/2 + bx/6) \quad (3)$$

$$\curvearrowleft: S_A \cdot a - m_3 g a - m_1 g a/2 - m_2 g a/2 = 0$$

$$\Rightarrow \text{ins. (1)} \Rightarrow S_A = \sigma g (bx/2 + ab/2 + ax/2) \quad (4)$$

S_B kan fås ur (2) m.h.a (3) o (4),

alt. ny momenteluv. (jag gör det senare):

$$\curvearrowleft: S_B \cdot a + S_F a - m_1 g a/2 - m_2 g a/2 = 0 \Rightarrow$$

$$S_B = -S_F + m_1 g/2 + m_2 g/2 = (\text{ins. (1) o (3)})$$

$$= \sigma g (ab/2 - bx/6) \quad (5)$$

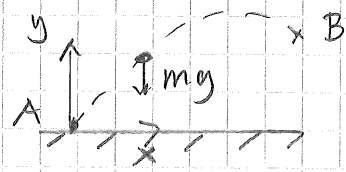
Studera linkefter ur eluv. (3), (4) och (5)

ger att bara S_B kan bli negativ ur (5).

S_B slårar (d.v.s $S_B = 0$) då $ab/2 = bx/6 \Rightarrow$

$$x = 3a \quad (\text{d.v.s. } x_{\max}) //$$

⑦ Frilägg partikel



5(6)

$$\rightarrow: 0 = ma_x \Rightarrow \boxed{V_x} = C_1 = V_0 \cos 60^\circ = V_0 \cdot 1/2 \quad (1)$$

där V_0 är utslakthastigheten (okänd).

$$(1) \Rightarrow \boxed{S_x} = V_0 \cdot 1/2 \cdot t + C_2^0 = V_0 \cdot 1/2 \cdot t \quad (2)$$

$$\uparrow: -mg = ma_y \Rightarrow \boxed{V_y} = -gt + C_3 = -gt + V_0 \sin 60^\circ =$$

$$= -gt + V_0 \sqrt{3}/2 \quad (3) \Rightarrow$$

$$\boxed{S_y} = -gt^2/2 + V_0 \sqrt{3}/2 \cdot t + C_4^0 = -gt^2/2 + V_0 \sqrt{3}/2 \cdot t \quad (4)$$

Antag att B nås vid $t = t^*$. Ins. i (2) $\rightarrow$

$$2h = V_0 t^*/2 \Rightarrow t^* = 4h/V_0 \quad (5)$$

Elw. (4) vid $t = t^*$ ger

$$h = -gt^{*2}/2 + V_0 t^* \sqrt{3}/2 = \text{ins. (5)} =$$

$$-8gh^2/V_0^2 + 2\sqrt{3}h \Rightarrow V_0^2 = \frac{8gh}{(2\sqrt{3}-1)} \quad (6)$$

Maxhöjd fås då $V_y = 0$. Antag $t = t_m$ i (3)

$$V_y(t_m) = -gt_m + V_0 \sqrt{3}/2 = 0 \Rightarrow t_m = V_0 \sqrt{3}/(2g) \quad (7)$$

$$\text{Ekvation (4)} \Rightarrow S_y(t_m) = -gt_m^2/2 + V_0 \sqrt{3}/2 \cdot t_m =$$

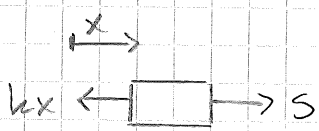
$$= \text{ins. (7)} = 3V_0^2/(8g) \quad (8)$$

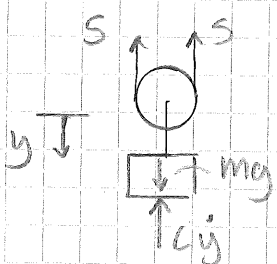
$$\text{Insatt (6) i (8)} \Rightarrow S_y(t_m) = \frac{3}{(2\sqrt{3}-1)} h \approx 1,22 h //$$

vilket är max S_y .

8) "Förlägg" A och B för sig: 6(6)

a/

A:  $\rightarrow: S - kx = m\ddot{x} \quad (1)$

B:  $\downarrow: mg - 2S - c\dot{y} = m\ddot{y} \quad (2)$

Kinematiskt samband: $x = 2y$.

Insatt i (1) $\Rightarrow S - 2ky = 2m\ddot{y} \Rightarrow$

$S = 2ky + 2m\ddot{y}$ insatt i (2) $\Rightarrow$

$mg - 4ky - 4m\ddot{y} - c\dot{y} = m\ddot{y} \Rightarrow$

$5m\ddot{y} + c\dot{y} + 4ky = mg \Rightarrow$

$\ddot{y} + \frac{c}{5m}\dot{y} + \frac{4k}{5m}y = g/5 \quad (3)$

Jmf " $\ddot{x} + 2\zeta\omega\dot{x} + \omega^2x = \zeta$ " där

$\frac{c}{5m} = 2\zeta\omega \Rightarrow \zeta = 10m\zeta\omega \quad (4) \text{ och}$

$\frac{4k}{5m} = \omega^2 \Rightarrow \omega = 2\sqrt{k/5m} \quad (5)$

(5) i (4) med $\zeta = 1 \Rightarrow$

$\zeta = \frac{20}{\sqrt{5}}\sqrt{mk} = 4\sqrt{5}\sqrt{mk} //$

b/ Vid start är $y=0$ och $\dot{y}=0$ (vila).

Elw. (3) $\Rightarrow \ddot{y} = g/5 //$