

MEKANIK

Peter Folkow

peter.folkow@chalmers.se

KLASSISK MEKANIK

Mekanik = läran om materiella system i vilq/rörelse.

Handlar krafter

Modell = en förenkling av verkligheten.

- Matematisk: derivator, vektorer...
- Lösningen innehåller vanligen approximationer
- Viktigt att kunna bedöma rimlighet

KRAFTER

Kraft = påverkan från omgivningen på ett system

- × Gravitationskraften
- × Kontaktkraft (normalkraft)

Newtons 3 lagar:

1) Tröghetslagen

(NI)

Ingen verkande kraftresultant på en kropp $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ kroppen behåller sin hastighet o riktning

2) Accelerationslagen

(NII)

Kraftresultanten $\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a}$

3) Lagen om verkan o motverkan

(NIII)

Kraften uppträder alltid parvis,

är lika stora o motriktade

KRAFTGEOMETRI

Kraft är en vektor, med storlek o riktning

Addition o mult. m. skalär följer lagar för vektorer

Krafter, kan förskjutas längs sin verkningslinje (med en stel kropp)



Storleken av en kraft $\mathbf{F} = (F_x; F_y)$ är

$$|\mathbf{F}| = F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

$$F_x = F \cos \alpha, \quad F_y = F \sin \alpha$$

Projektion av en kraft $\mathbf{F}$ på en linje l

$$F_k = |\mathbf{F}| \cos \alpha = \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_l$$

där α = vinkeln mellan $\mathbf{F}$ o l och $\mathbf{e}_l \parallel l$, $|\mathbf{e}_l| = 1$

KRAFTMOMENT

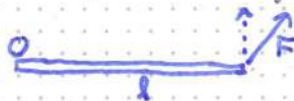
Vridverkan på en kropp

Beräknas lättast genom att dela upp kraften i komponenter.

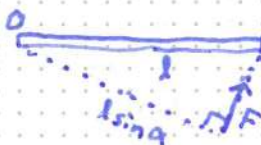
$M = F_\perp \cdot l$ där $F_\perp \perp$ hävarmen, l är längden på hävarmen

Beräkna momentet i O

$$M_O = \underbrace{F \sin \alpha \cdot l}_{= F_\perp} + F \cos \alpha \cdot 0$$



Alternativ lösning



KRAFT- O MOMENTSUMMA

Kraftsumma $\sum \mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots$

Momentsumma $\sum M_O = M_{O1} + M_{O2} + \dots$

där $M_{O,n}$ är kraftmoment från $\mathbf{F}_n$

Tag hänsyn till momentets riktning (medurs/moturs)

KRAFTPAR

Kraftpar = två lika stora motriktade krafter

$$\cdot \sum \mathbf{F} = 0$$

• Kan ge vridningsmoment



$$\sum M_A = \sum M_B = Fa = M$$

i alla punkter B

KRAFTER I 3 DIMENSIONER

En kraft i 3D kan representeras som

• komponenter $\mathbf{F} = (F_x; F_y; F_z)$

• längd och riktning $\mathbf{F} = F \cdot \mathbf{e}$ där $|\mathbf{e}| = 1$

Projektion på en linje λ ges av

$$|\mathbf{F}_\lambda| = |\mathbf{F}| \cdot |\mathbf{e}_\lambda| = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_\lambda) \mathbf{e}_\lambda = \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_\lambda}{|\mathbf{v}_\lambda|^2} \mathbf{v}_\lambda$$

MOMENT I 3 DIMENSIONER

I 3D får vi beskriva moment som vridning kring respektive koordinataxel var för sig

- Högerskruvsregeln kan användas för att bestämma om momentet är positivt eller negativt

Det totala momentet blir en vektor, momentvektorn

$$\mathbf{M} = (M_x; M_y; M_z)$$

• Ritas som en dubbelpil $\rightarrow\rightarrow$

Kan beräknas med kryssprodukt

En kraft $\mathbf{F}$ som appliceras i P ger upphov till momentet

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad \text{där} \quad \mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$$

i punkten O

Moment projiceras analogt som för kraft

En kraft kan alltid flyttas utmed sin verkningslinje

- Påverkar inte momentet

JÄMVIKT

Om ett system är i jämvikt är alla delar i fortvarig vila.

Definition

Ett system är i jämvikt om det bildar ett nollsystem.

dvs. $\sum \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad \text{och} \quad \sum \mathbf{M} = \mathbf{0} \quad \forall \text{ punkten}$

Om $\sum \mathbf{F} = \mathbf{0}$ räcker det att kolla $\sum \mathbf{M}_O = \mathbf{0}$ i en punkt så $\Rightarrow \sum \mathbf{M} = \mathbf{0} \quad \forall \text{ punkten}$

Arbetsgång vid jämviktsproblem

1) Identifiera systemet som ska studeras

2) Frilägg systemet

- Rita upp systemet

- Inför alla yttre krafter och moment

3) Ställ upp jämviktsekvationerna

- $\sum \mathbf{F} = \mathbf{0}$, $\sum \mathbf{M}_O = \mathbf{0}$ i godk. punkt O

4) Lös ekvationssystemet

5) Kontrollera svarets rimlighet

2-DIMENSIONELL JÄMVIKT

Kan endast ställa upp 3 ekvationer:

$$1) \sum F_x = 0$$

$$2) \sum F_y = 0$$

$$3) \sum M_O = 0 \quad \text{för godk. punkt } O$$

$\Rightarrow$ Kan endast bestämma 3 obekanta

Kroppar i kontakt ger upphov till tvång

- Vid friläggning ersätts tvången med krafter/moment (se standardsymboler)

Standardsymboler

friläggs som

	Hindrar <u>vertikal</u> förflyttning Alternativt	
Gångjärn 	Hindrar <u>förflyttning</u>	
Fast inspänd 	Hindrar <u>förflyttning</u> och <u>vridning</u>	
Led 	Två stela kroppar sitter ihop Hindrar <u>förflyttning</u> <u>sinsemellan</u>	

3-DIMENSIONELL JÄMVIKT

Kan ställa upp 6 ekvationer

1) $\sum IF = 0$

2) $\sum IM_0 = 0$

för godk. punkt 0

Standardsymboler

Kulled 	Hindrar <u>förflyttning</u>	
Axiallager 	Hindrar <u>förflyttning</u> och <u>vridning</u> runt <u>2 axlar</u>	
Fast inspänd 	Hindrar <u>förflyttning</u> och <u>vridning</u>	

(fler finns på s.127)

MASSCENTRUM

Masscentrum är medelpunkten för en kropps massa

Tyngdpunkt är medelpunkten för tyngdkraftens verkan

I ett homogent tyngdkraftfält är dessa samma.

PUNKTMASSOR

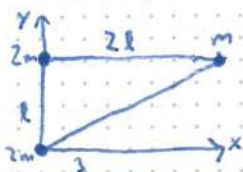
Definition

Ett system bestående av n st punktmassor har

masscentrum $\vec{r}$:

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i = \vec{r} \cdot m_{\text{tot}}$$

där m_i är massan, $\vec{r}_i$ är Ortsvektorn till punktmassan i



3 punktmassor sammantagna med masslösa stänger. Var är masscentrum?

$$\vec{r} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{m_{\text{tot}}} = \frac{2m \begin{pmatrix} 0 \\ l \end{pmatrix} + 2m \begin{pmatrix} 0 \\ l \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 2l \\ l \end{pmatrix}}{5m} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2l \\ 3l \end{pmatrix}$$

KONTINUERLIGA KROPPAR

En kropp kan ofta delas in i delkroppar där varje dels masscentrum och massa är kända.

$$\sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{r}_i = m_{\text{tot}} \cdot \vec{r}$$

där m_i är massan och $\vec{r}_i$ är masscentrum för delkropp i ,

$\vec{r}$ är kroppens masscentrum och m_{tot} är kroppens massa

I en symmetrisk kropp finns alltid masscentrum på symmetrilinjen.

Masscentrum för några standardgeometrier finns i formelbladet

Om man har hål i en kropp görs beräkning på hela kroppen minus den bortskurna biten

Massan av hålet kan ses som negativ.

INFINITESIMALA ELEMENT

När systemet består oregelbundna geometrien delas det in i oändligt små element.

$$\int \vec{r}_c dm = m_{\text{tot}} \cdot \vec{r}$$

ARBETSGÅNG

- 1) Utnyttja symmetrier
- 2) Dela in i enklare delkroppar
- 3) Beräkna massa m_i och massacentrum $\vec{r}_i$ för varje delkropp
- 4) Använd $\vec{r} = \frac{\sum m_i \cdot \vec{r}_i}{m_{\text{tot}}}$

FRIKTION

- Uppkommer då ytor är i kontakt
- Motverkar rörelse eller tendens till rörelse

Glatte = friktionsfritt



Svårt att avgöra exakt var friktionskraften och normalkraften verkar

- Därför används sällan momentekvationen

Friktionskraften är begränsad, beroende på underlaget

$$|F_f| \leq \mu_s |F_N|$$

där F_M är friktionskraften, F_N är normalkraften, och μ_s är den statiska friktionskoefficienten

Den statiska friktionskoefficienten

- Beror på vilka material det är
- Finns tabeller i boken

Vid fullt utvecklad friktion är systemet precis på gränsen att börja röra på sig.

$$\bullet \text{ Då } |F_M| = \mu_s |F_N|$$

När systemet glider så gäller

$$|F_M| = \mu_k |F_N|$$

där μ_k är den kinetiska friktionskoefficienten

FRIKTION I TRE DIMENSIONER

I 3D måste man ta hänsyn till att krafter är vektorer

$$|F_M| \leq \mu_s |F_N|$$

KINEMATIK

Kinematiken beskriver rörelse utan hänsyn till krafter.

Vi studerar partiklar

= kroppar som är små i jämförelse med intressanta avstånd
x jorden i bana runt solen.

Rätlinjig rörelse = rörelse längs en rät linje

• sträcka, hastighet o acceleration är positiva ot samma håll

HASTIGHET

En kropp har hastigheten

$$v = \frac{ds}{dt}$$

där s är sträckan, t är tiden.

Vi kan beräkna tillryggelagd sträcka med

$$\int_{t_0}^t v(t) dt = s - s_0$$

där $[t_0; t]$ är tidsintervallet som sträckan beräknas under.
 $v(t)$ är hastigheten vid tiden t , och $s_0 = s(t_0)$. Eller med

$$\int_{s_0}^s \frac{1}{v(s)} ds = t - t_0$$

där $v(s)$ är hastigheten vid sträckan s .

ACCELERATION

En kropp har accelerationen

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot v$$

där v är hastigheten, s är sträckan, t är tiden.

INTEGRATION

Tillryggslagd sträcka kan bestämmas givet en hastighet,
hastighet kan bestämmas givet en acceleration

Metod

1) Skriv hastighet/acceleration som derivata

$$v(t) = \frac{ds}{dt}$$

2) Flytta över bld i ena ledet och sträcka/hastighet i andra

$$v(t) dt = ds$$

3) Integrera båda led

$$\int_{t_0}^t v(t) dt = \int_{s_0}^s ds \quad \text{där } s(t_0) = s_0$$

4) Lös ut sökt variabel

$$s = s_0 + \int_{t_0}^t v(t) dt$$

Hastighet givet en acceleration kan bestämmas med

$$\int_{t_0}^t a(t) dt = v - v_0$$

eller med

$$\int_{s_0}^s a(s) ds = \frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2}$$

KRÖKLINJIG RÖRELSE

Vi tecknar en partikels lägesvektor $r(t)$ relativt ett
fixt origo O , vid tiden t .

Då fås hastighetsvektorn v som

$$v = \frac{dr}{dt}$$

Accelerationsvektorn a fås som

$$a = \frac{dv}{dt}$$

Ibland beskrivs r med hjälp av kartesiska koordinater

$$r(t) = x(t)e_x + y(t)e_y + z(t)e_z = (x; y; z)$$

Ibland beskrivs r med naturliga koordinater

• Vi utnyttjar att hastighetsvektorn v är riktad längs tangenten e_s

$$v(t) = v(t) \cdot e_s(t)$$

där v är farten.

• Notera att e_s har konstant längd (=1) men varierande riktning

$$a = v'(t)e_s + v \cdot e_s'(t) \quad (\text{enl. produktregeln})$$

där $e_s'(t)$ bildas genom att införa en enhetsvektor

$e_n \perp e_s$ som är riktad in mot krökningscentrum. Då

$e_s' = \frac{v}{\rho} e_n$ där ρ är krökningsradien. Detta ger

$$a = v'(t)e_s + \frac{v^2}{\rho} e_n$$

där e_s kallas tangentriktningen och påverkar farten

och e_n kallas normalriktningen och påverkar riktningen

CIRKELRÖRELSE

I specialfallet med cirkelrörelse, konstant radie r , kan vi använda vinkeln ϕ mätt från någon referenspunkt. Då

$$s(t) = r \cdot \phi(t)$$

$$v(t) = r \cdot \omega(t) = r \cdot \phi'(t)$$

$$a(t) = r \cdot \omega'(t)e_s + r \cdot \omega^2 e_n$$

där r är cirkels radie och $\omega = \dot{\phi}$ är vinkelhastigheten

KINETIK

Kinetiken beskriver rörelse med hänsyn till krafter.

PARTIKELNS KINETIK

Newtons tredje lag ger att kraftresultanten ΣF på en kropp är

$$\Sigma F = m \cdot a$$

där m är massa och a är acceleration

Detta gäller endast i inertialsystem, dvs system i vila eller med konstant rätlinjig hastighet

* Jorden anses vara ett inertialsystem

FRIKTION

Vid kinetik gäller

$$\frac{|F_f|}{|N|} = \mu_k$$

där F_f är friktionskraft, N är normalkraft, μ_k är den kinetiska friktionskoefficienten

* I regel är $\mu_k < \mu_s$

RÖRELSEMÖTSTÅND

Rörelsemotstånd är ett motstånd på grund av rörelse

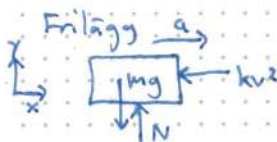
* i luft / vatten

* Ofta linjärt ($F = kv$) eller kvadratisk ($F = kv^2$)



Bestäm bromstiden t_B från

$v = v_0$ till $\frac{v_0}{2}$ vid kvadratisk luftmotstånd



$$\Sigma F = m \cdot a$$

$$\rightarrow: -kv^2 = ma \quad (1)$$

$$\uparrow: N - mg = 0 \quad (2)$$

$$\begin{aligned}
 & \text{Vi vet } a = \frac{dv}{dt} \stackrel{①}{\Leftrightarrow} -\frac{kv^2}{m} = \frac{dv}{dt} \Leftrightarrow -\frac{k}{m} dt = \frac{dv}{v^2} \Rightarrow \\
 & \Rightarrow \int_0^{t_B} -\frac{k}{m} dt = \int_{v_0}^{v_{0/2}} \frac{1}{v^2} dv \Rightarrow \frac{k}{m} t_B = \left[\frac{1}{v} \right]_{v_0}^{v_{0/2}} \Rightarrow t_B = \boxed{\frac{m}{kv_0}}
 \end{aligned}$$

MASSLÖSA KOMPONENTER

Vissa kroppar antas ofta ha försumbar massa.

* Linor, trösser

* Då antas också kraften $IF = 0$

Kan uppstå kinematiska samband, dvs geometriska rörelsesamband

* Kan bli klurigt... Öva på detta!

KRÖKLINJIG RÖRELSE

Vid cirkulär rörelse används ofta naturliga koordinater

KASTRÖRELSE

Lämpligen används kartesiska koordinater

Om luftmotståndet är försumbart (vilket det är) så beskriver kastbanan en parabel (konstant fart i x-led)

Lösningsmetod

1. Sätt upp kraftekvationen i två riktningar mha NII
2. Integrera m.a.p. tiden $\rightarrow$ får hastigheten
3. Integrera m.a.p. tiden $\rightarrow$ får sträckan

ENERGI

Ur Newtons andra lag kan andra lagar härledas

ARBETE

Arbete W är kraft applicerad över en sträcka

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

där W är arbetet utfört av kraften $\mathbf{F}$ över sträckan $d\mathbf{s}$

- Endast kraftkomponenten i rörelseriktningen räknas
- Arbetet över en kurva C blir då

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{s_1}^{s_2} F_s ds$$

där F_s är kraftkomponenten i rörelseriktningen,

$F_s = |\mathbf{F}| \cos \alpha$, där α är vinkeln mellan kraftens verkningsriktning & rörelseriktningen

EFFEKT

Effekt P är en krafts förmåga att utföra arbete över tid

$$P = \frac{dW}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \Leftrightarrow W = \int P dt$$

där W är arbetet som utförs per tidsenhet t ,

$\mathbf{F}$ är kraft, $\mathbf{v}$ är hastighet

Verkningsgrad η är kvoten mellan nyttig effekt P_{ut} och tillförd effekt P_{in}

$$\eta = \frac{P_{ut}}{P_{in}}$$

KINETISK ENERGİ

En partikel har kinetisk energi (rörelseenergi), T

$$T = \frac{m \cdot v^2}{2}$$

där m är massa, v är fart

Arbete kan då uttryckas

$$W = \Delta T = T_2 - T_1$$

POTENTIELL ENERGİ

Ett centkraft kraftfält är ett fält där kraftens verkningslinje går genom en fix punkt och beloppet endast beror på avståndet från den punkten

x Fjäderkraft, gravitationskraft

Fjäderenergi

- En fjäder ger upphov till kraften $F = k \cdot \Delta r$ där k är fjäderkonstanten, Δr är förändring av fjäderns längd relativt normallängden.
- Potentiella energin är

$$V = \frac{k \cdot r^2}{2}$$

- Arbete blir då

$$W = -\Delta V = -(V_2 - V_1)$$

Gravitationsenergi

- Gravitationskraften $F = \frac{GmM}{r^2} \approx mg$ där m, M är massa, r är avstånd mellan kropparna, $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg s}^2$, $g = 9,82 \text{ m/s}^2$
- Potentiella energin är

$$V = \frac{GmM}{r} = mgr$$

- Arbetet blir då

$$W = -\Delta V$$

Mekanisk energi är konservativ

= Energin är konstant

⇒ Potentiell energi kan övertas som kinetisk energi

- För att öka energin i ett system måste icke-konservativt arbete tillföras

$$\star \quad \Delta T + \Delta V = W_{ik}$$

där W_{ik} är det icke-konservativa arbetet

RÖRELSEMÄNGD

Rörelsemängd $\mathbf{p}$, definieras enligt

$$\mathbf{p} = m \cdot \mathbf{v}$$

där m är massa, $\mathbf{v}$ är hastighet

Från NII får vi (lagen för rörelsemängd)

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}$$

där $\mathbf{F}$ är kraft

Integration ger (lagen för impuls)

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt = m(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) = \Delta \mathbf{p}$$

där $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ är hastighet vid tiden t_1, t_2

RÖRELSEMÄNGDSMOMENT

Rörelsemängdsmoment $\mathbf{L}_0$ som en partikel ger upphov till i punkten O definieras som

$$\mathbf{L}_0 = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

där $\mathbf{r}$ är avstånd från partikeln till O , och $\mathbf{p}$ är partikels rörelsemängd

Deriverar vi båda led får vi

$$\mathbf{L}'(t) = \mathbf{IM}$$

där $\mathbf{IM}$ är moment

(lagen för rörelsemängdsmoment)

Integration ger

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{IM} dt = \mathbf{L}_2 - \mathbf{L}_1$$

(lagen för impulsmoment)

Notera likheterna med rörelsemoment

Används främst vid "cirkelbanor"

x Planeter i elliptiska banor

SVÄNGNINGAR

Swängning = regelbunden rörelse kring ett svängningscentrum

Vi studerar svängning i mekaniska system

x Pendel, fjäder med massa

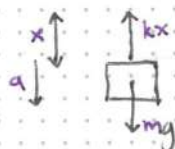
ODÄMPAD SVÄNGNING

Standardsystem

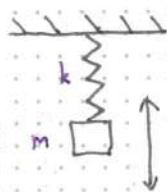
1) Frlägg massan

2) Inför koordinatsystem från ospänd fjäderlängd m

3) Vid förflyttning sträcker x har vi



$$\downarrow: mg - kx = ma \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = g \quad (*)$$



Lösningen till (*) ges av

$$x = x_{hom} + x_{part} \quad \text{där}$$

$$x_{hom} = C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t) = A \sin(\omega t + \delta)$$

där konstanterna bestäms utifrån begynnelsevillkor

x_{part} bestäms genom att ansätta $x = C \rightarrow x_{part} = \frac{mg}{k}$

SVÄNGNINGENS EGENSKAPER

- Vinkelfrekvens ω [rad/s] $= \sqrt{\frac{k}{m}}$
- Frekvens f [Hz] $= \frac{\omega}{2\pi}$
- Amplitud A $= \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$
- Fäsvinkel φ $= \arctan \frac{C_2}{C_1}$

Generellt kan ekvationen skrivas

$$\ddot{x} + \omega^2 x = C$$

med lösningen

$$x = C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t) + \frac{C}{\omega^2}$$

där C_1, C_2 bestäms utifrån begynnelsevillkor.

Ibland är det lättare att mäta från jämviktsläget. Vi sätter då

$$y = x - x_{jmv} = x - \frac{mg}{k}$$

Differentialekvationen får då endast en lösning

$$y = C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t)$$

DÄMPADE SVÄNGNINGAR

Ofta linjär viskös dämpning, dvs kraft motriktad rörelsen

$$F = c \cdot v$$

där v är hastighet, c är dämpningskonstant

Ritas 



Arbetsgången är som vid odämpad svängning, men med differentialekvationen

$$\ddot{x} + \frac{c}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = g$$

vilken generellt skrivs som

$$\ddot{x} + 2\epsilon\omega \dot{x} + \omega^2 x = C$$

där ϵ är dämpningskoefficienten

Den har lösningen

$$x = x_{\text{hom}} + \frac{C}{\omega^2}$$

x_{hom} bestäms genom att lösa karakteristiska ekvationen

$$r^2 + 2\epsilon\omega r + \omega^2 = 0 \quad \rightarrow r_1, r_2$$

Om $r_1 \neq r_2$ får vi $x_{\text{hom}} = B_1 e^{r_1 t} + B_2 e^{r_2 t}$

Om $r_1 = r_2$ får vi $x_{\text{hom}} = (B_1 t + B_2) e^{r_1 t}$

där B_1, B_2 bestäms utifrån begynnelsevillkoren

Alternativt kan vi studera 3 fall:

• $\epsilon < 1$: Svag dämpning

$$x_{\text{hom}} = e^{-\epsilon\omega t} (C_1 \sin(\omega_d t) + C_2 \cos(\omega_d t))$$

där $\omega_d = \omega \sqrt{1 - \epsilon^2}$ är den dämpade vinkel frekvensen

Periodisk dämpad svängning

• $\epsilon = 1$: Kritisk dämpning

$$x_{\text{hom}} = e^{-\omega t} (C_1 t + C_2)$$

Ej periodisk svängning

• $\epsilon > 1$: Stark dämpning

$$x_{\text{hom}} = e^{-\epsilon\omega t} (C_1 e^{\omega \sqrt{\epsilon^2 - 1} t} + C_2 e^{-\omega \sqrt{\epsilon^2 - 1} t})$$

Ej periodisk svängning

PÅTVINGADE SVÄNGNINGAR

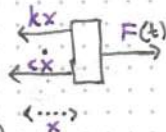
Rörelsen påverkas av en yttre inverkan.

- Vi får en exciterad rörelse

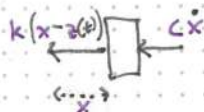
Exciterande kraft



$$\ddot{x} + \frac{c}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{F(t)}{m}$$



Exciterande rörelse



$$\ddot{x} + \frac{c}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{z(t)k}{m}$$

Allmänt kan vi skriva

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x = Q(t)$$

med lösningen

$$x = x_{hom} + x_{part}$$

- Endast partikulärlösningen påverkas

Vid periodisk excitation, $Q(t) = Q_0 \sin(\Omega t)$ antar vi

$$x_{part} = B_1 \sin(\Omega t) + B_2 \cos(\Omega t)$$

Lösning till detta finns i formelsamlingen

Efter lång tid går $x_{hom} \rightarrow 0$ ty dämpning

- Då kan vi ignorera homogentlösningen

Vid periodisk excitation, om den pålagda frekvensen matchar svängningens ($\Omega \approx \omega$) ökar rörelsen snabbt.

• Detta kallas resonans.

PARTIKELSYSTEM

Vi studerar ett system av N st partiklar

$$\text{Systemets massa } m = \sum_{i=1}^N m_i$$

Från formeln för tyngdpunkt får vi

$$m \vec{r} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i$$

där m_i är massa, $\vec{r}_i$ är tyngdpunkt för partikel i

Kraft

(lagen om tyngdpunktens rörelse)

$$\vec{F} = m \vec{a} = m \ddot{\vec{r}}$$

där $\vec{a}$ är tyngdpunktens acceleration

Arbete

$$W_{ik} = \Delta T + \Delta V$$

där kinetisk energi $T = \sum_{i=1}^N T_i$, potentiell energi $V = \sum_{i=1}^N V_i$
och det icke-konservativa arbetet $W_{ik} = \sum_{i=1}^N W_i^{(ik)}$

Rörelsemängd

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i$$

där $\vec{v}$ är tyngdpunktens hastighet

Rörelsemängdsmoment

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

STELA KROPPAR

Stel kropp = en kontinuerlig kropp som inte deformeras
Antas bestå av ∞ antal partiklar

ROTATION KRING FIX AXEL

Rörelsen beskrivs m.h.a. vinkel ϕ

Mäts relativt godtyckligt referensstillstånd (här OP)



$$\dot{\phi} = \omega \quad \text{är vinkelhastighet}$$

$$\ddot{\phi} = \dot{\omega} \quad \text{är vinkelacceleration}$$

Dessa är samma för alla punkter i kroppen



Vinkelhastighet $\hat{=}$ -acceleration kopplas till hastighet $\hat{=}$ acceleration

$$v = R \cdot \omega$$

$$a_s = R \cdot \dot{\omega}$$

$$a_n = R \cdot \omega^2$$

där R är avstånd till punkten

Allmänt gäller

$$v = \omega \times r$$

$$a = \dot{\omega} \times r + \omega \times (\omega \times r)$$

där r är vektor till punkten

KINETISK ENERGI

Vi summerar över delkropparnas kinetiska energier

$$T_0 = \frac{\omega^2}{2} I_0$$

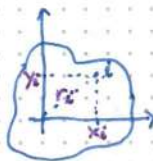
där $I_0 = \sum_i m_i r_i^2$ är masströghetsmoment kring punkten O , som kroppen roterar kring, där m_i är massa, r_i är avstånd till delkropp i från O

MASSTRÖGHETSMOMENT

Vi delar in kroppen i ∞ många delkroppar

$$I = \sum_i m_i r_i^2 = \int r^2 dm$$

$$\text{där } r_i^2 = x_i^2 + y_i^2$$



Vi använder formelsamlingen för att bestämma

Masströghetsmomentet är alltid minst kring tyngdpunkten

Masströghetsmomentet kring punkten O är (Steiners sats)

$$I_0 = \bar{I} + m d_{O,TP}^2$$

där $\bar{I}$ är masströghetsmoment kring tyngdpunkten, m är kroppens massa, $d_{O,TP}$ är avståndet från O till tyngdpunkten

Masströghetsmoment är additivt

Arbetsgång

- 1) Identifiera enkla kroppar $\odot$ använd formelsamlingen
- 2) Ytstycka symmetrier, Steiners sats
- 3) Addera ihop bidragen (dra bort hål)

RÖRELSEMÄNGDSMOMENT

Vid rotation kring en fix punkt O summerar vi över delkröpparnas rörelsemängdsmoment runt O

$$L_O = \omega I_O$$

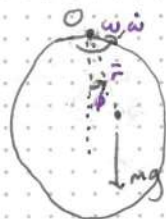
där ω är vinkelhastighet, I_O är massbäghetsmoment kring O

Vi vet att $\dot{L} = M$, vilket ger momentet runt O

$$M_O = \dot{\omega} \cdot I_O$$

PENDEL RÖRELSE

En kropp pendlar fram och tillbaka



$$\tau: -mgr \sin \phi = I_O \ddot{\phi}$$

För små vinklar har vi $\sin \phi \approx \phi$

$$\Rightarrow \ddot{\phi} + \frac{mgr}{I_O} \phi = 0$$

Vi jämför med $\ddot{\phi} + \omega^2 \phi = 0$ och får

$$\omega = \sqrt{\frac{mgr}{I_O}}$$

SYSTEM AV STELA KROPPAR

Offta är det fördelaktigt att studera hela systemet som en enhet

- Vridriken inre krafter

TILLÄMPNINGAR

Energilagen $W^{ik} = \Delta T + \Delta V$

- När hastighet (v, ω) söks
- Extra användbar om $W^{ik} = 0$ (förlustfritt)

Lagen för tyngdpunktens rörelse

$$F = m \cdot \bar{a}$$

- När krafter söks
- Extra användbar om $\bar{a} = 0$ (statik)

Lagen för rörelsemängdsmoment

$$M_0 = \dot{L}_0 = I_0 \dot{\omega}$$

- När en kropp roterar
- När acceleration $(a, \dot{\omega})$ söks
- Extra användbar om $M_0 = 0$ (rörelsemängdsmomentet bevaras)