Föreläsning 10/12-13

Rummet $\mathbb{R}^n$ $\quad n \in \mathbb{Z}_+$

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$

$\lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \in \mathbb{R}$

$|\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$

$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \quad |\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$

$$|x_k| \leq |\mathbf{x}| \leq \sum_{l=1}^{n} |x_l|$$

Öppna delmängder av $\mathbb{R}^n$

$B(\mathbf{a}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < r\}$

$\forall \mathbf{a} \in O \ \exists r > 0 : B(\mathbf{a}, r) \subset O$

Slutna delmängder F av $\mathbb{R}^n$

$\complement F$ öppen mängd

Kompakta delmängder = slutna och begränsade delmängder

Givet godtycklig delmängd M av $\mathbb{R}^n$

a är inre punkt i M om $\exists r>0$ s.a.

$B(a,r) \subset M$

a är yttre punkt i M om $\exists r>0$ s.a.

$B(a,r) \subset \complement M$

a kallas randpunkt till M om a varken

är inre punkt i M eller yttre punkt till M

Vektorvärda funktioner av flera variabler

$D \subset \mathbb{R}^n$

$\mathbb{f} : D \longrightarrow \mathbb{R}^p \qquad n, p \in \mathbb{Z}+$

$\mathbb{f}(\mathbb{x}) = (f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots,$
$, f_p(x_1, x_2, \dots, x_n))$

Gränsvärdesdefinitionen

$\mathbf{a}$ inre punkt i D eller randpunkt till D

$\mathbb{A} \in \mathbb{R}^p$ $\qquad \mathbb{A} = (A_1, A_2, \ldots, A_p)$

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbb{A}$$

betyder att $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \mathbf{f}(\underbrace{B(\mathbf{a}, \delta) \cap D}_{\text{delmängd av } \mathbb{R}^n}) \subset \underbrace{B(\mathbb{A}, \varepsilon)}_{\text{delmäng av } \mathbb{R}^p}$

dvs. $|\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta$ och $\mathbf{x} \in D \Longrightarrow |\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbb{A}| < \varepsilon$

Notera

$$|f_j(\mathbf{x}) - A_j| \leq |\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbb{A}| \leq \sum_{\ell=1}^{p} |f_\ell(\mathbf{x}) - A_\ell|$$

$j = 1, 2, \ldots, p$

alltså

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbb{A} \iff \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} f_j(\mathbf{x}) = A_j \quad j = 1, 2, \ldots, p$$

Räkneregler för gränsvärde (se boken)

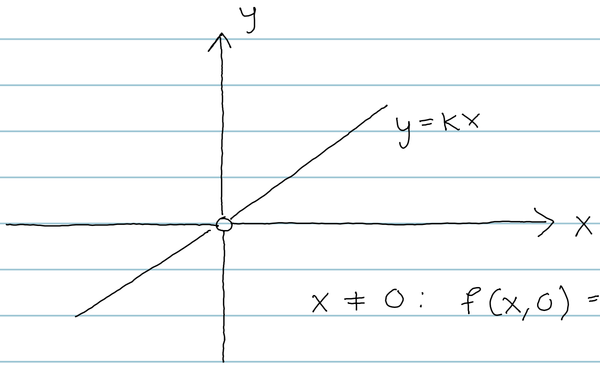
Ex: $(n = 2, p = 1)$

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \neq (0, 0)\}$$

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

Fråga $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \quad \exists\ ?$



$x \neq 0: \quad f(x,0) = 0 \longrightarrow 0, \ x \to 0$

Om $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existerar så

måste gränsvärdet vara $= 0$

$y \neq 0: \quad f(0,y) = 0 \longrightarrow 0, \ y \to 0$

$x \neq 0: \quad f(x,kx) = \dfrac{kx^2}{x^2+k^2x^2} = \dfrac{k}{1+k^2}$

$\not\longrightarrow 0$ för $k \neq 0$

Slutsats: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

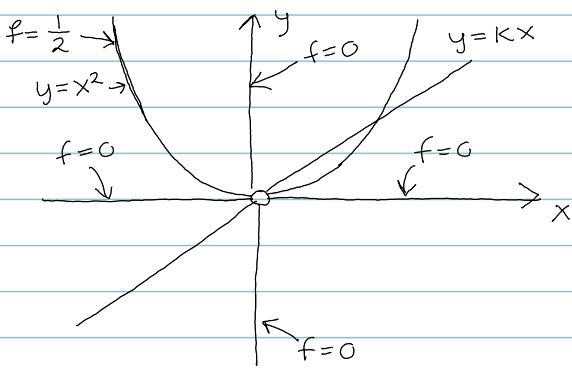
existerar ej

Ex: $(n=2,\ p=1)$

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \neq (0,0)\}$$

Fråga $? \exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$



$x \neq 0:\quad f(x,0) = 0 \to 0,\ x \to 0$

Om $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existerar så måste det vara $=0$

$y \neq 0:\quad f(0,y) = 0 \to 0,\ y \to 0$

$$x \neq 0:\ f(x,kx) = \frac{x^2 kx}{x^4 + k^2 x^2} = \frac{kx}{x^2 + k^2} \longrightarrow 0$$

då $x \to 0$

gäller både för $k=0$ och $k \neq 0$

Men

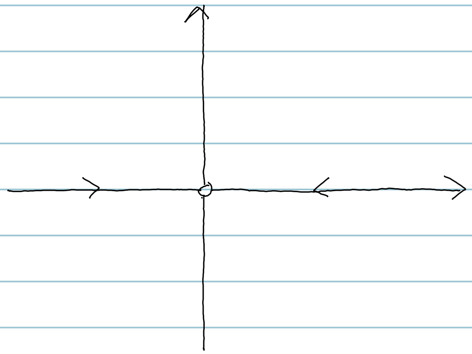
$$x \neq 0:\quad f(x,x^2) = \frac{x^2 \cdot x^2}{x^4 + x^4} = \frac{1}{2} \longrightarrow \frac{1}{2},\ x \to 0$$

Slutsats: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existerar ej

Ex: $f(x,y) = x \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2+y^2}$

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \neq (0,0)\}$

Fråga: $\overset{?}{\exists} \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$



$x \neq 0$: $f(x,0) = x \to 0, \quad x \to 0$

Om gränsvärdet existerar så måste det vara $= 0$

$y \neq 0$: $f(0,y) = 0 \to 0, \quad y \to 0$

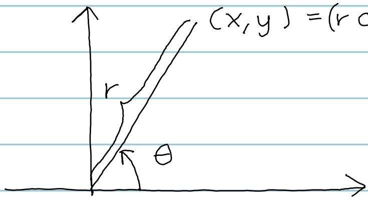
$y = kx$: $x \neq 0$: $f(x,kx) = x \cdot \frac{x^2 - k^2x^2}{x^2 + k^2x^2} =$

$= x \cdot \frac{1-k^2}{1+k^2} \to 0, \quad x \to 0$

Inför polära koordinater

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad 0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

$\longrightarrow$



$(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$

$r = \sqrt{x^2+y^2}$

För $r>0$ gäller

$$f(x,y) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}\cdot r\cos\theta$$

$$= r\cdot\cos\theta\cdot(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

Alltså

$$|f(x,y) - 0| = |r\cos\theta\cdot(\cos^2\theta - \sin^2\theta)| \cancel{\leq} =$$

$$\cancel{\leq} = r\underbrace{|\cos\theta|}_{\leq 1}\cdot\underbrace{|\cos^2\theta - \sin^2\theta|}_{\leq |\cos^2\theta| + |\sin^2\theta| \leq 2} \leq 2r \to 0,\ r\to 0$$

obercende av θ

Slutsats: $\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

Ex (forts.) $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$

Polära koordinater

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

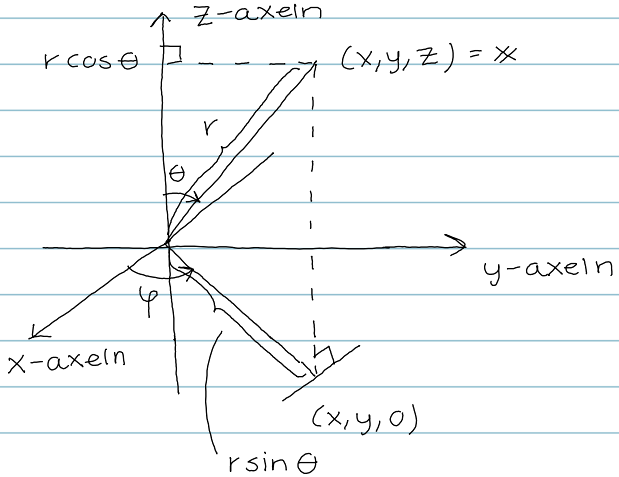
$\longrightarrow$

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r^2\cos^2\theta \cdot r\sin\theta}{r^4\cos^4\theta + r^2\sin^2\theta} =$$

$$= r\,\frac{\cos^2\theta \cdot \sin\theta}{r^2\cos^4\theta + \sin^2\theta}$$

Välj $\theta = r$

Sfäriska koordinater i $\mathbb{R}^3$ (motsvarigheten till polära koordinater i $\mathbb{R}^2$)



$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$$\begin{cases} x = r\sin\theta \cdot \cos\varphi \\ y = r\sin\theta \cdot \sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

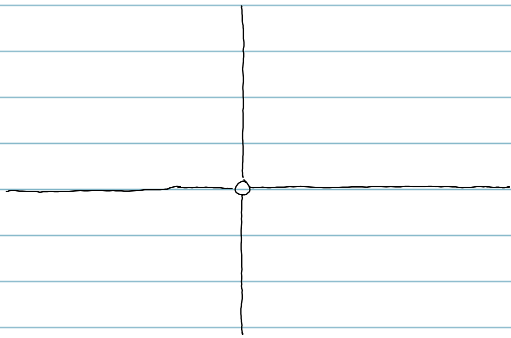
$r \in [0, \infty)$
$\theta \in [0, \pi]$
$\varphi \in [0, 2\pi)$

Motsvarighet i $\mathbb{R}^n$. Ett avstånd och $n-1$ vinklar.

Ex: $f(x,y) = \dfrac{x^4 y}{x^2 + (x+y)^2}$

$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \neq (0,0) \}$

Fråga: $? \exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$



$x \neq 0$: $f(x,0) = 0 \longrightarrow 0, \ x \to 0$

Om gränsvärdet existerar måste det vara $= 0$

$y = kx$: $x \neq 0$: $f(x,kx) = \dfrac{x^4 kx}{x^2 + (x+kx)^2} =$

$= x^3 \dfrac{k}{1+(1+k)^2} \longrightarrow 0, \ x \to 0$

Inför polära koordinater

$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

$\longrightarrow$

$$\left| f(r\cos\theta, r\sin\theta) - 0 \right| = \left| \frac{r^4\cos^4\theta \cdot r\sin\theta}{r^2\cos^2\theta + (r\cos\theta + r\sin\theta)^2} \right| =$$

$$= r^3 \cdot \frac{|\cos^4\theta \sin\theta|}{\cos^2\theta + (\cos\theta + \sin\theta)^2} \overset{?}{\leq} r^3 C$$ för något positivt C

Vi noterar att $h(\theta) = \cos^2\theta + (\cos\theta + \sin\theta)^2$ är en kontinuerlig funktion på $[0, 2\pi]$.
Alltså antar $h(\theta)$ sitt minsta värde på $[0, 2\pi]$

Men $h(\theta) > 0 \quad \forall \theta \in [0, 2\pi]$

Alltså $\exists\, c > 0$ s.a. $0 < c \leq h(\theta) \quad \forall \theta \in [0, 2\pi]$

Detta ger

$$\left| f(r\cos\theta, r\sin\theta) - 0 \right| = r^3 \frac{\overbrace{|\cos^4\theta \sin\theta|}^{0 \leq \ldots \leq 1}}{\cos^2\theta + (\cos\theta + \sin\theta)^2} \leq$$

$$\leq r^3 \cdot \frac{1}{c} \longrightarrow 0, \quad r \to 0$$

oberoende av θ!

Slutsats: $\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$