Föreläsning 28/11-13

NUMERISKA SERIER

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

SATS: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergerar $\Longrightarrow$ $a_k \to 0,\ k \to \infty$

Positiva serier (serier med konstant tecken)

$a_k \geq 0 \qquad k = 1, 2, \ldots$

SATS: (integralkriteriet)

f positiv, avtagande på $[1, \infty)$

Då gäller: $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ konvergent $\Longleftrightarrow$ $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ konvergent

SATS: (jämförelsekriteriet)

$0 \leq a_k \leq b_k \qquad k = 1, 2, \ldots$

Då gäller

1. $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergent $\Longrightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent
2. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent $\Longrightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ divergent

Referensserier:

- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ konvergent $\Longleftrightarrow$ $p>1$
- $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^q}$ konvergent $\Longleftrightarrow$ $q>1$
- $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ konvergent $\Longleftrightarrow$ $|q|<1$

SATS: (jämförelsekriteriet på gränsvärdesform)

$a_k, b_k \geq 0$

$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} \in (0,\infty)$

Då gäller: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ och $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ båda konvergerar

eller båda divergerar

ROT/KVOTKRITERIET

SATS: (Rotkriteriet)

Antag $a_k \geq 0$, $k=1,2,\ldots$ och $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = A$

$\longrightarrow$

Då gäller: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergerar om $A < 1$

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergerar om $A > 1$

($\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ kan både vara konvergent och divergent om $A = 1$)

Ex $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergent

$$a_k = \frac{1}{k}$$

$$\sqrt[k]{a_k} = \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}} = \frac{1}{k^{\frac{1}{k}}} = \frac{1}{e^{\ln k^{\frac{1}{k}}}} =$$

$$= \frac{1}{e^{\frac{1}{k}\ln k}} \longrightarrow 1, \quad k \to \infty$$

Ex. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergent

$$a_k = \frac{1}{k^2}$$

$$\sqrt[k]{a_k} = \left(\frac{1}{k^2}\right)^{\frac{1}{k}} = \frac{1}{(k^{\frac{1}{k}})^2} \longrightarrow 1, \quad k \to \infty$$

SATS: (kvotkriteriet)

Antag $a_k \geq 0$, $k = 1, 2, \ldots$ och

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \tilde{A}$$

Då gäller: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergerar om $\tilde{A} < 1$

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergerar om $\tilde{A} > 1$

Ex: geometriska serien $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ $q \geq 0$

$$a_k = q^k$$

$$\sqrt[k]{a_k} = q \longrightarrow q, \; k \to \infty$$

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{q^{k+1}}{q^k} = q \longrightarrow q, \; k \to \infty$$

Ex. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{e^k}$ konvergerar?

$$a_k = \frac{k}{e^k}$$

rotkriteriet: $\sqrt[k]{a_k} = \frac{\sqrt[k]{k}}{e} \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{1}{e} < 1$

kvotkriteriet: $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k+1}{k} \cdot \frac{1}{e} \longrightarrow \frac{1}{e} < 1, \; k \to \infty$

BEVIS (rotkriteriet)

Fall 1: Antag att $A<1$

För $q \in (A,1)$ gäller

$\sqrt[k]{a_k} < q$ för alla $k \geq n$

för något positivt heltal n

Då gäller:

$a_k < q^k$ för alla $k \geq n$

Vidare

$\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ konvergerar då $0<q<1$

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergerar enligt jämförelse-kriteriet

Fall 2: Antag $A>1$

Då gäller $\sqrt[k]{a_k} > 1$ för alla $k \geq n$

för något positivt heltal n

$\longrightarrow$

Då gäller $a_k \geq 1$ för alla $k \geq n$

och alltså $a_k \not\to 0, \; k \to \infty$

Det följer att $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergerar enligt

satsen ovan.

$\square$

Ex. $a_{2k} = \frac{1}{2k}$ $\quad k = 1, 2, \ldots$

$a_{2k+1} = \frac{2}{k}$ $\quad k = 1, 2, \ldots$

$$\frac{a_{2k+1}}{a_{2k}} = \frac{\frac{2}{k}}{\frac{1}{2k}} = 4 \longrightarrow 4, \; k \to \infty$$

$$\frac{a_{2k}}{a_{2k-1}} = \frac{\frac{1}{2k}}{\frac{2}{k-1}} = \frac{k-1}{k} \cdot \frac{1}{4} \longrightarrow \frac{1}{4}, \; k \to \infty$$

Alltså

$$\nexists \lim_{k \to \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$$

$$\sqrt[2k]{a_{2k}} = \left(\frac{1}{2k}\right)^{\frac{1}{2k}} \longrightarrow 1, \quad k \to \infty$$

$$\sqrt[2k+1]{a_{2k+1}} = \left(\frac{2}{k}\right)^{\frac{1}{2k+1}} = e^{\frac{1}{2k+1} \ln\left(\frac{2}{k}\right)} =$$

$$= e^{\frac{1}{2k+1}(\ln 2 - \ln k)} \longrightarrow 1, \quad k \to \infty$$

$\longrightarrow$

Alltså

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = 1$$

SERIER MED GODTYCKLIGT TECKEN

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \ , \quad a_k \in \mathbb{R} \ , \quad k = 1, 2, \ldots$$

SATS: Om $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergerar så

konvergerar $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

BEVIS: Vi har

$$|a_k| + a_k \geq 0 \ , \quad k = 1, 2, \ldots$$

$$|a_k| + a_k \leq 2|a_k| \quad k = 1, 2, \ldots$$

Jämförelsekriteriet ger $\sum_{k=1}^{\infty} (|a_k| + a_k)$

konvergerar

Vi har jämfört med $\sum_{k=1}^{\infty} 2|a_k|$

$\rightarrow$

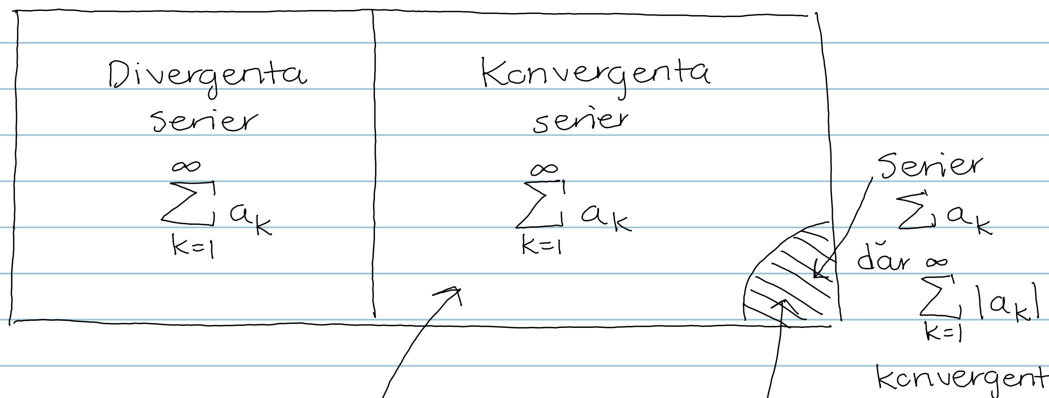
Vi har

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(|a_k| + a_k \right) \quad \text{och} \quad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)\,|a_k|$$

konvergerar

Alltså: konverg-rar

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(|a_k| + a_k + (-1)\,|a_k| \right) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \qquad \square$$



kallas betingat konvergenta

(= konvergerar men ej absolutkonvergenta)

kallas absolutkonvergenta

Leibniz konvergenskriterium

Antag att

1) $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq a_n \geq a_{n+1} \geq \ldots$

dvs $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ avtagande

2) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Då gäller

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k \quad \text{konvergerar}$$

BEVIS: Låt s_n beteckna n:te partialsumman av $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cdot a_k$

Betrakta s_{2n}

$$s_{2n} = \underbrace{(a_1 - a_2)}_{\geq 0} + \underbrace{(a_3 - a_4)}_{\geq 0} + \ldots + \underbrace{(a_{2n-1} - a_{2n})}_{\geq 0} =$$

$$= s_{2(n-1)} + (a_{2n-1} - a_{2n}) \geq s_{2(n-1)}$$

då $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ är avtagande

Alltså $\{s_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ är växande

Men

$$s_{2n} = a_1 - \underbrace{(a_2 - a_3)}_{\geq 0} - \underbrace{(a_4 - a_5)}_{\geq 0} - \dots - \underbrace{(a_{2(n-1)} - a_{2n-1})}_{\geq 0} - a_{2n} \leq a_1$$

eftersom $a_n \geq a_{n+1} \geq 0$ alla n

Alltså $\{s_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ är begränsad

$\{s_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ konvergerar då varje monoton begränsad följd är konvergent

dvs. $s_{2n} \longrightarrow s$, $n \to \infty$ för något $s \in \mathbb{R}$

Vidare

$$s_{2n+1} = s_{2n} + (-1)^{2n+1-1} a_{2n+1} \longrightarrow s, \quad n \to \infty$$

Alltså

$s_n \xrightarrow[n\to\infty]{} s$ och $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k$ konvergerar $\square$

Ex. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k}$

Här gäller

- $\sum_{k=1}^{\infty} \left| (-1)^{k-1} \cdot \frac{1}{k} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergerar

  och alltså

  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k}$ är ej absolut-konvergent

- Sätt $a_k = \frac{1}{k}$ $k = 1, 2, \ldots$

  $a_{k+1} = \frac{1}{k+1} < \frac{1}{k} = a_k$, $k = 1, 2, \ldots$

  dvs. $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ avtagande

$a_k = \frac{1}{k} \to 0$, $k \to \infty$

Leibniz medför $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k}$

konvergerar

Omordning av serier

Låt σ vara en permutation av

$\{1, 2, \dots, n, \dots\}$

dvs $\sigma : \{1, 2, \dots, n, \dots\} \longrightarrow \{1, 2, \dots, n, \dots\}$

med egenskaperna

- $\sigma(k) = \sigma(\ell) \implies k = \ell$ dvs σ injektiv
- $\forall$ positiva heltal n $\exists$ positivt heltal k s. a. $\sigma(k) = n$

dvs σ surjektiv

En omordning av $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är en serie

$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}$ där σ är en permutation

av de positiva heltalen

SATS: Antag att $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är absolutkonvergent

Då gäller

① varje omordning av $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergerar

② varje omordning $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}$ har samma summa som $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

SATS: Antag att $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är betingat konvergent

Då gäller

① För varje $s \in \mathbb{R}$ finns en permutation σ av $\{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ s.a. $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}$ konvergerar med summan s

② Finns permutation σ av $\{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ s.a. $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}$ divergerar

Sätt $a_k^+ = \max\{a_k, 0\}$, $a_k^- = \max\{-a_k, 0\}$

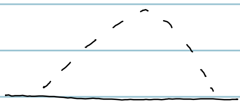
Det gäller

$$a_k = a_k^+ - a_k^-$$

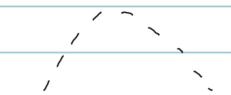
$$|a_k| = a_k^+ + a_k^- \qquad a_k^+ = \frac{1}{2}(|a_k| + a_k)$$

$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ divergerar

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$$



$a_k \geq 0$ $\quad \{c_k\}_{k=1}^{\infty}$



$a_k < 0$ $\quad \{d_k\}_{k=1}^{\infty}$

Fixera $s \in \mathbb{R}$

Antag $s > 0$

$$c_1, c_2, \ldots, c_k, d_1, d_2, c$$

1835a $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\ln k}{k^{4/3}}$

Lösning:

Påstående: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\ln k}{k^{4/3}}$ är absolutkonvergent

dvs $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k^{4/3}}$ konvergerar

ty: $\displaystyle 0 \leq \frac{\ln k}{k^{4/3}} = \frac{\ln k}{k^{1/6}} \cdot \frac{1}{k^{7/6}}$

och $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{7/6}}$ konvergerar

och $\displaystyle\frac{\ln k}{k^{1/6}} \longrightarrow 0, \; k \to \infty$

Alltså $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k^{4/3}}$ konvergerar enligt jämförelsekriteriet

Eftersom varje absolutkonvergent serie konvergerar så konvergerar

$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\ln k}{k^{4/3}}$

1836 e

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{k^2+1}{k}\pi\right)$$

Lösning:

$$\sin\left(\frac{k^2+1}{k}\pi\right) = \sin\left(k\pi + \frac{\pi}{k}\right) =$$

$$= \underbrace{\sin(k\pi)}_{=0} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{k}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{k}\right) \cdot \underbrace{\cos(k\pi)}_{(-1)^k}$$

Alltså $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{k^2+1}{k}\pi\right) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \sin\left(\frac{\pi}{k}\right)$

Det gäller

- $\left(\sin\left(\frac{\pi}{k}\right)\right)_{k=2}^{\infty}$ avtagande
- $\sin\frac{\pi}{k} \to 0, \quad k\to\infty$

Leibniz konvergenskriterium ger att

$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{k^2+1}{k}\pi\right)$ konvergerar

1837 b $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$

Lösning: Sätt $a_n = \dfrac{\ln n}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$

Det gäller

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

$\{a_n\}_{n=N}^{\infty}$ avtagande för något positivt heltal N ?

Betrakta

$$h(x) = \frac{\ln x}{x}$$

Derivera

$$h'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2} \leq 0$$

för $x \geq e$

Alltså

$\{a_n\}_{n=3}^{\infty}$ avtagande $(e < 3)$

Leibniz konvergenskriterium ger

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ konvergerar

1837 d Konvergerar $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{1+(-1)^n\sqrt{n}}$?

Lösning: Vi har

$$\frac{1}{1+(-1)^n\sqrt{n}} = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n} \qquad n=2,3,\ldots$$

Sätt $\displaystyle a_n = \frac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n} \qquad n=2,3,\ldots$

Vi noterar att

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Vidare

$$a_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2n}+1}$$

$$a_{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}-1}$$

$$a_{2n-1} - a_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}-1} - \frac{1}{\sqrt{2n}+1} =$$

$$= \frac{\sqrt{2n}+1-(\sqrt{2n+1}-1)}{(\sqrt{2n+1}-1)(\sqrt{2n}+1)} =$$

$$= \frac{2+\sqrt{2n}-\sqrt{2n(1+\frac{1}{2n})}}{(\sqrt{2n+1}-1)(\sqrt{2n}+1)} =$$

$$= \frac{2+\sqrt{2n}-\sqrt{2n}\sqrt{1+\frac{1}{2n}}}{(\sqrt{2n+1}-1)(\sqrt{2n}+1)} =$$

$$= \left\{ \sqrt{1+x} = 1+\frac{1}{2}x + O(x^2),\ x \to 0 \right\} =$$

$$= \frac{2+\sqrt{2n}-\sqrt{2n}\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}{(\sqrt{2n+1}-1)(\sqrt{2n}+1)} =$$

$$= \frac{2-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2n}}+O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)}{(\sqrt{2n+1}-1)(\sqrt{2n}+1)} > 0$$

för alla $n \geq N$ för något positivt heltal N

Vi har att

$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n+1} - a_{n2})$ divergerar enligt jämförelsekriteriet (vi jämför med $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$)

Den ursprungliga serien

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{1+(-1)^n\sqrt{n}} = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n a_n =$$

$$= a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + \ldots$$

$\rightarrow$

Vidare

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n+1}-a_{2n}) = (-a_2+a_3)-(a_4+a_5-)\ldots$$

Partialsummorna för

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n+1}-a_{2n})$ går mot ∞ och alltså

kommer partialsummorna för

$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{1+(-1)^n\sqrt{n}}$ att gå mot $-\infty$

Alltså divergerar $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{1+(-1)^n\sqrt{n}}$